

## Алгоритм статистического моделирования надёжности на ЭВМ с использованием программного комплекса MathCAD

Данный алгоритм предназначен для моделирования надёжности системы (блока), состоящей из трёх параллельно включённых элементов (см. структурную схему надёжности, рис. 1). Причём, показатели безотказности в данном алгоритме вычисляются по закону распределения Вейбулла, а показатели восстанавливаемости — по экспоненциальному закону распределения. Кроме того, имеется возможность изменять параметры этих законов.

Алгоритм снабжён комментариями.

Максимальное время, для которого моделируется поведение системы (в смысле надёжности):

$$T_M := 10^7$$

**Параметры закона распределения Вейбулла:**

$T_W := 1.2 \cdot 10^4$  — параметр масштаба;  $v := 0.8$  — параметр формы (асимметрии);

$$a := T_W^{\frac{1}{v}} \quad b := v$$

форме.

**Параметр экспоненциального закона распределения:**

$\lambda := 0.001$  — [1/ч], плотность потока событий (интенсивность).

### Начало алгоритма

$m := 200$  — максимальная размерность матриц, содержащих реализации случайных величин для каждого элемента по каждому закону распределения;

Первая колонка — матрицы, содержащие реализации из  $m$  значений случайной величины с распределением по закону Вейбулла, вторая колонка — тоже, но с распределением по экспоненциальному закону, для каждого элемента схемы:

$$T1_{O\_Weibull} := rweibull(m, v) \cdot T_W^{\frac{1}{v}} \quad T1_{v\_exp} := rexp(m, \lambda)$$

$$T2_{O\_Weibull} := rweibull(m, v) \cdot T_W^{\frac{1}{v}} \quad T2_{v\_exp} := rexp(m, \lambda)$$

$$T3_{O\_Weibull} := rweibull(m, v) \cdot T_W^{\frac{1}{v}} \quad T3_{v\_exp} := rexp(m, \lambda)$$

Расчёт максимального количества интервалов «время работы до отказа + восстановление», помещающихся при данной случайной реализации в заданный интервал времени моделирования  $T_M$ :

$$\text{NUM}(\text{alltime}) := \left\{ \begin{array}{l} j1 \leftarrow 1 \\ j2 \leftarrow 1 \\ j3 \leftarrow 1 \\ \text{while } \sum_{k=0}^{j1} (T1_{o\_Weibull_k} + T1_{v\_exp_k}) \leq \text{alltime} \\ \quad j1 \leftarrow j1 + 1 \\ \text{while } \sum_{k=0}^{j2} (T2_{o\_Weibull_k} + T2_{v\_exp_k}) \leq \text{alltime} \\ \quad j2 \leftarrow j2 + 1 \\ \text{while } \sum_{k=0}^{j3} (T3_{o\_Weibull_k} + T3_{v\_exp_k}) \leq \text{alltime} \\ \quad j3 \leftarrow j3 + 1 \\ \max(j1, j2, j3) \end{array} \right.$$

$$N := \text{NUM}(T_M)$$

$N = 84$  — полученное количество включений.

Получение матриц, содержащих значения моментов времени, при которых происходит отказ или завершается восстановление, из векторов случайных реализаций, полученных выше.

Нечётным элементам этих матриц будет соответствовать начало времени работы элемента (или завершения его восстановления), чётным — отказ элемента (начало его восстановления):

$$i := 2 .. 2 \cdot N$$

$$\text{fullTime1}_0 := 0 \quad \text{fullTime1}_1 := T1_{o\_Weibull_0}$$

$$\text{fullTime1}_i := \left\{ \begin{array}{l} j \leftarrow i \\ k \leftarrow \text{Round}\left(\frac{j}{2}, 1\right) - 1 \\ \left(\text{fullTime1}_{j-1} + T1_{v\_exp_k}\right) \text{ if } \frac{j}{2} = \text{trunc}\left(\frac{j}{2}\right) \\ \left(\text{fullTime1}_{j-1} + T1_{o\_Weibull_k}\right) \text{ otherwise} \end{array} \right.$$

$$\text{fullTime2}_0 := 0 \quad \text{fullTime2}_1 := T2_{o\_Weibull_0}$$

$$\text{fullTime2}_i := \left\{ \begin{array}{l} j \leftarrow i \\ k \leftarrow \text{Round}\left(\frac{j}{2}, 1\right) - 1 \\ \left(\text{fullTime2}_{j-1} + T2_{v\_exp_k}\right) \text{ if } \frac{j}{2} = \text{trunc}\left(\frac{j}{2}\right) \\ \left(\text{fullTime2}_{j-1} + T2_{o\_Weibull_k}\right) \text{ otherwise} \end{array} \right.$$

$$\text{fullTime3}_0 := 0 \quad \text{fullTime3}_1 := T3_{o\_Weibull_0}$$

$$\text{fullTime3}_i := \begin{cases} j \leftarrow i \\ k \leftarrow \text{Round}\left(\frac{j}{2}, 1\right) - 1 \\ \left(\text{fullTime3}_{j-1} + T3_{v\_exp_k}\right) \text{ if } \frac{j}{2} = \text{trunc}\left(\frac{j}{2}\right) \\ \left(\text{fullTime3}_{j-1} + T3_{o\_Weibull_k}\right) \text{ otherwise} \end{cases}$$

Пример полученных первых k значений (для проверки алгоритма):

$$k := 0..5$$

$$T1_{o\_Weibull_k} =$$

4.968·10 <sup>5</sup>
6.845·10 <sup>3</sup>
9.029·10 <sup>4</sup>
1.568·10 <sup>4</sup>
8.775·10 <sup>4</sup>
8.315·10 <sup>4</sup>

$$T1_{v\_exp_k} =$$

646.073
445.934
283.384
833.915
4.154
3.063·10 <sup>3</sup>

$$\text{fullTime1}_k =$$

0
4.968·10 <sup>5</sup>
4.975·10 <sup>5</sup>
5.043·10 <sup>5</sup>
5.048·10 <sup>5</sup>
5.951·10 <sup>5</sup>

По найденным матрицам находятся временные логические функции работоспособности каждого из элементов и всего блока в целом (на интервале времени  $\tau \in 0 \dots T_M$ ):

$$F1_{logic}(\tau, num) := \text{for } j \in 0..num \begin{cases} 1 & \text{if } (\tau \geq \text{fullTime1}_{2,j}) \wedge (\tau < \text{fullTime1}_{2,j+1}) \\ 0 & \text{if } (\tau \geq \text{fullTime1}_{2,j+1}) \wedge (\tau < \text{fullTime1}_{2,j+2}) \end{cases}$$

$$F2_{logic}(\tau, num) := \text{for } j \in 0..num \begin{cases} 1 & \text{if } (\tau \geq \text{fullTime2}_{2,j}) \wedge (\tau < \text{fullTime2}_{2,j+1}) \\ 0 & \text{if } (\tau \geq \text{fullTime2}_{2,j+1}) \wedge (\tau < \text{fullTime2}_{2,j+2}) \end{cases}$$

$$F3_{logic}(\tau, num) := \text{for } j \in 0..num \begin{cases} 1 & \text{if } (\tau \geq \text{fullTime3}_{2,j}) \wedge (\tau < \text{fullTime3}_{2,j+1}) \\ 0 & \text{if } (\tau \geq \text{fullTime3}_{2,j+1}) \wedge (\tau < \text{fullTime3}_{2,j+2}) \end{cases}$$

Для всего блока:

$$F_{logic}(\tau, num) := \begin{cases} 1 & \text{if } (F1_{logic}(\tau, num) = 1 \wedge F2_{logic}(\tau, num) = 1) \vee (F1_{logic}(\tau, num) = 1 \wedge F3_{logic}(\tau, num) = 1) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Эти логические функции непрерывны и определены для любого вещественного  $t=\tau$  в указанном интервале  $(0 \dots T_M)$ . Поэтому их удобно использовать для определения состояния какого-либо из элементов или всего блока в контексте надёжности в конкретный момент времени.

Значения моментов времени, при которых происходит отказ или завершается восстановление.  
 Нечётным элементам этих матриц соответствует начало времени работы элемента (или завершения его восстановления), чётным — отказ элемента (начало его восстановления):

$k := 0..2 \cdot 20 - 1$  Приведены только несколько первых элементов матриц

fullTime1<sub>k</sub> =

0
$4.968 \cdot 10^5$
$4.975 \cdot 10^5$
$5.043 \cdot 10^5$
$5.048 \cdot 10^5$
$5.951 \cdot 10^5$
$5.953 \cdot 10^5$
$6.11 \cdot 10^5$
$6.119 \cdot 10^5$
$6.996 \cdot 10^5$
$6.996 \cdot 10^5$
$7.828 \cdot 10^5$
$7.858 \cdot 10^5$
$9.322 \cdot 10^5$
$9.329 \cdot 10^5$
$1.381 \cdot 10^6$

fullTime2<sub>k</sub> =

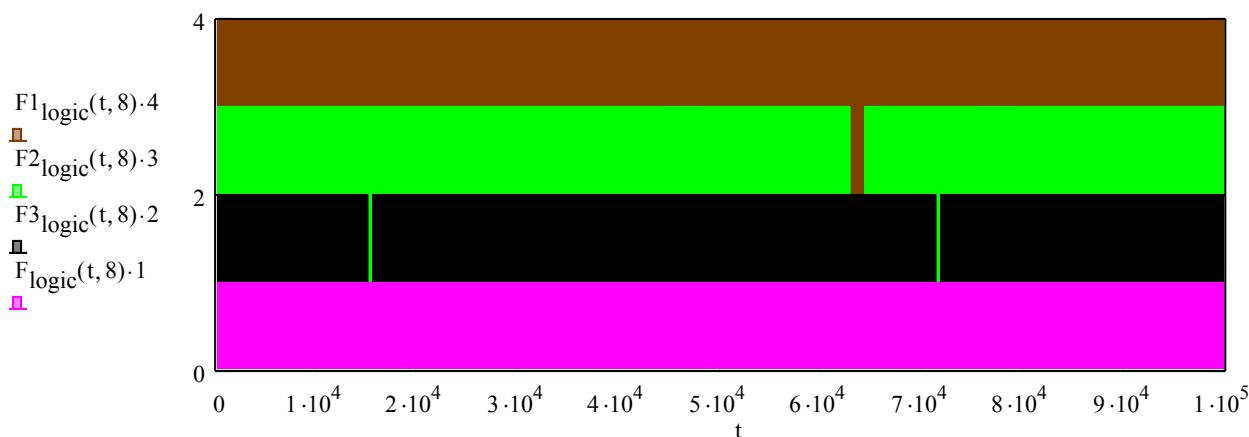
0
$6.172 \cdot 10^4$
$6.173 \cdot 10^4$
$6.275 \cdot 10^4$
$6.424 \cdot 10^4$
$3.262 \cdot 10^5$
$3.267 \cdot 10^5$
$3.34 \cdot 10^5$
$3.345 \cdot 10^5$
$4.271 \cdot 10^5$
$4.302 \cdot 10^5$
$4.354 \cdot 10^5$
$4.356 \cdot 10^5$
$4.401 \cdot 10^5$
$4.401 \cdot 10^5$
$4.405 \cdot 10^5$

fullTime3<sub>k</sub> =

0
$1.495 \cdot 10^4$
$1.558 \cdot 10^4$
$7.114 \cdot 10^4$
$7.172 \cdot 10^4$
$1.596 \cdot 10^5$
$1.615 \cdot 10^5$
$2.379 \cdot 10^5$
$2.41 \cdot 10^5$
$2.469 \cdot 10^5$
$2.491 \cdot 10^5$
$2.501 \cdot 10^5$
$2.527 \cdot 10^5$
$3.3 \cdot 10^5$
$3.309 \cdot 10^5$
$3.317 \cdot 10^5$

Для удобства воспроизведения (во избежание слияния областей графиков), периоды работы до отказов и периоды восстановления каждого из элементов приведены в небольшом интервале времени от 0 до  $10^5$  часов:

$t := 0, 60.. 1 \times 10^5$



Для нахождения моментов времени наступления отказа всего блока в целом удобно использовать следующую функцию:

$$\text{BREAKofBlock}(\text{startTime}, \text{maxTime}, \text{step}, \text{num}) := \left\{ \begin{array}{l} j \leftarrow \text{startTime} \\ \tau_{\text{break}} \leftarrow 0 \\ \text{while } \tau_{\text{break}} = 0 \wedge j \leq \text{maxTime} \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} j \leftarrow j + \text{step} \\ \tau_{\text{break}} \leftarrow j \text{ if } F_{\text{logic}}(j, \text{num}) = 0 \wedge F_{\text{logic}}(j - 1, \text{num}) = 1 \end{array} \right. \\ \tau_{\text{break}} \end{array} \right.$$

$\text{BREAKofBlock}(0, 10^5, 100, 5) = 0$

— функция ищет время отказа всего блока, ближайшего от заданного начального времени  $\text{startTime}$  с шагом поиска  $\text{step}$ .

Однако, для определения временных интервалов наработки до отказа и восстановления блока, применение этой функции нецелесообразно, так как она чрезвычайно требовательна к вычислительным ресурсам ЭВМ и возвращает значение с погрешностью, равной двойной величине шага. Поэтому для определения этих массивов используются следующие функции, основанные на поиске пересекающихся временных интервалов восстановления пар элементов блока и соответствующих общих интервалов наработки до отказа для пары элементов:

```

INT12 := k ← 0
        dτ ← 0
        dt ← 0
        for i ∈ 0..N - 1
            T10 ← fullTime12.i+1
            T11 ← fullTime12.(i+1)
            for j ∈ 0..N - 1
                T20 ← fullTime22.j+1
                T21 ← fullTime22.(j+1)
                if (T10 ≤ T20) ∧ (T11 ≥ T21)
                    dτ ← T21 - T20
                    buff ← T20
                    Intersectk,1 ← T20
                    Intersectk,2 ← T21
                if (T10 ≥ T20) ∧ (T11 ≤ T21)
                    dτ ← T11 - T10
                    buff ← T10
                    Intersectk,1 ← T10
                    Intersectk,2 ← T11
                if (T10 ≥ T20) ∧ (T11 ≥ T21) ∧ (T21 > T10)
                    dτ ← T21 - T10
                    buff ← T10
                    Intersectk,1 ← T10
                    Intersectk,2 ← T21
                if (T10 ≤ T20) ∧ (T11 ≤ T21) ∧ (T11 > T20)
                    dτ ← T11 - T20
                    buff ← T20
                    Intersectk,1 ← T20
                    Intersectk,2 ← T11
            Intersectk,0 ← dτ if dτ > 0
            Intersectk,3 ← buff - dt
            dt ← Intersectk,2
            k ← k + 1 if dτ > 0
            dτ ← 0
    
```

Intersect

```

INT13 := k ← 0
        dτ ← 0
        dt ← 0
        for i ∈ 0..N - 1
            T10 ← fullTime12.i+1
            T11 ← fullTime12.(i+1)
            for j ∈ 0..N - 1
                T20 ← fullTime32.j+1
                T21 ← fullTime32.(j+1)
                if (T10 ≤ T20) ∧ (T11 ≥ T21)
                    dτ ← T21 - T20
                    buff ← T20
                    Intersectk,1 ← T20
                    Intersectk,2 ← T21
                if (T10 ≥ T20) ∧ (T11 ≤ T21)
                    dτ ← T11 - T10
                    buff ← T10
                    Intersectk,1 ← T10
                    Intersectk,2 ← T11
                if (T10 ≥ T20) ∧ (T11 ≥ T21) ∧ (T21 > T10)
                    dτ ← T21 - T10
                    buff ← T10
                    Intersectk,1 ← T10
                    Intersectk,2 ← T21
                if (T10 ≤ T20) ∧ (T11 ≤ T21) ∧ (T11 > T20)
                    dτ ← T11 - T20
                    buff ← T20
                    Intersectk,1 ← T20
                    Intersectk,2 ← T11
            Intersectk,0 ← dτ if dτ > 0
            Intersectk,3 ← buff - dt
            dt ← Intersectk,2
            k ← k + 1 if dτ > 0
            dτ ← 0
    
```

Intersect

```

INT23 := k ← 0
        dτ ← 0
        dt ← 0
        for i ∈ 0 .. N - 1
            T10 ← fullTime22.i+1
            T11 ← fullTime22.(i+1)
            for j ∈ 0 .. N - 1
                T20 ← fullTime32.j+1
                T21 ← fullTime32.(j+1)
                if (T10 ≤ T20) ∧ (T11 ≥ T21)
                    dτ ← T21 - T20
                    buff ← T20
                    Intersectk,1 ← T20
                    Intersectk,2 ← T21
                if (T10 ≥ T20) ∧ (T11 ≤ T21)
                    dτ ← T11 - T10
                    buff ← T10
                    Intersectk,1 ← T10
                    Intersectk,2 ← T11
                if (T10 ≥ T20) ∧ (T11 ≥ T21) ∧ (T21 > T10)
                    dτ ← T21 - T10
                    buff ← T10
                    Intersectk,1 ← T10
                    Intersectk,2 ← T21
                if (T10 ≤ T20) ∧ (T11 ≤ T21) ∧ (T11 > T20)
                    dτ ← T11 - T20
                    buff ← T20
                    Intersectk,1 ← T20
                    Intersectk,2 ← T11
            Intersectk,0 ← dτ if dτ > 0
            Intersectk,3 ← buff - dt
            dt ← Intersectk,2
            k ← k + 1 if dτ > 0
            dτ ← 0
    Intersect
    
```



$$nV_1 := \text{rows}(\text{INT12}) - 1 \quad nV_1 = 2$$

$$nV_2 := \text{rows}(\text{INT13}) - 1 \quad nV_2 = 1$$

$$nV_3 := \text{rows}(\text{INT23}) - 1 \quad nV_3 = 2$$

$$\text{vosstTimes} := \left| \begin{array}{l} \text{for } j \in 0..nV_1 + nV_2 + nV_3 - 1 \\ \left| \begin{array}{l} vT_j \leftarrow \text{INT12}_{j,0} \quad \text{if } j < nV_1 \\ vT_j \leftarrow \text{INT13}_{j-nV_1,0} \quad \text{if } j < nV_1 + nV_2 \wedge j \geq nV_1 \\ vT_j \leftarrow \text{INT23}_{j-nV_1-nV_2,0} \quad \text{if } j < nV_1 + nV_2 + nV_3 \wedge j \geq nV_1 + nV_2 \end{array} \right. \\ vT \end{array} \right.$$

$$\text{vosstTimes}^T = (2.644 \times 10^3 \quad 79.806 \quad 181.085 \quad 309.499 \quad 585.304)$$

$$\text{wrkT} := \left| \begin{array}{l} nV \leftarrow nV_1 + nV_2 + nV_3 \\ \text{for } j \in 0..nV - 1 \\ \left| \begin{array}{l} \text{if } j < nV_1 \\ \left| \begin{array}{l} wT_j \leftarrow \text{INT12}_{j,1} \\ wT_{j+nV} \leftarrow \text{INT12}_{j,2} \end{array} \right. \\ \text{if } j < nV_1 + nV_2 \wedge j \geq nV_1 \\ \left| \begin{array}{l} wT_j \leftarrow \text{INT13}_{j-nV_1,1} \\ wT_{j+nV} \leftarrow \text{INT13}_{j-nV_1,2} \end{array} \right. \\ \text{if } j < nV_1 + nV_2 + nV_3 \wedge j \geq nV_1 + nV_2 \\ \left| \begin{array}{l} wT_j \leftarrow \text{INT23}_{j-nV_1-nV_2,1} \\ wT_{j+nV} \leftarrow \text{INT23}_{j-nV_1-nV_2,2} \end{array} \right. \end{array} \right. \\ wT \end{array} \right.$$

— вспомогательная функция-алгоритм;

sortwrkT := sort(wrkT) — сортировка по возрастающей;

$$\text{workTimes} := \left| \begin{array}{l} wrkT_0 \leftarrow \text{sortwrkT}_0 \\ \text{for } j \in 1.. \frac{\text{rows}(\text{sortwrkT})}{2} - 1 \\ \left| \begin{array}{l} wrkT_j \leftarrow \text{sortwrkT}_{2 \cdot j} - \text{sortwrkT}_{2 \cdot j - 1} \end{array} \right. \\ wrkT \end{array} \right.$$

$$\text{workTimes}^T = (7.884 \times 10^6 \quad 3.718 \times 10^5 \quad 8.592 \times 10^5 \quad 7.564 \times 10^3 \quad 1.55 \times 10^6)$$

— полученная реализация времён наработки до отказа всего блока;

Таким образом, по полученным массивам с временами наработки до отказа и восстановления можно построить соответствующие гистораммы и определить реализации коэффициента готовности блока  $K_r$ , среднего времени наработки до отказа  $t_{cp}$  и среднего времени восстановления  $t_{в_ср}$  (как для каждого элемента, так и для всего блока):

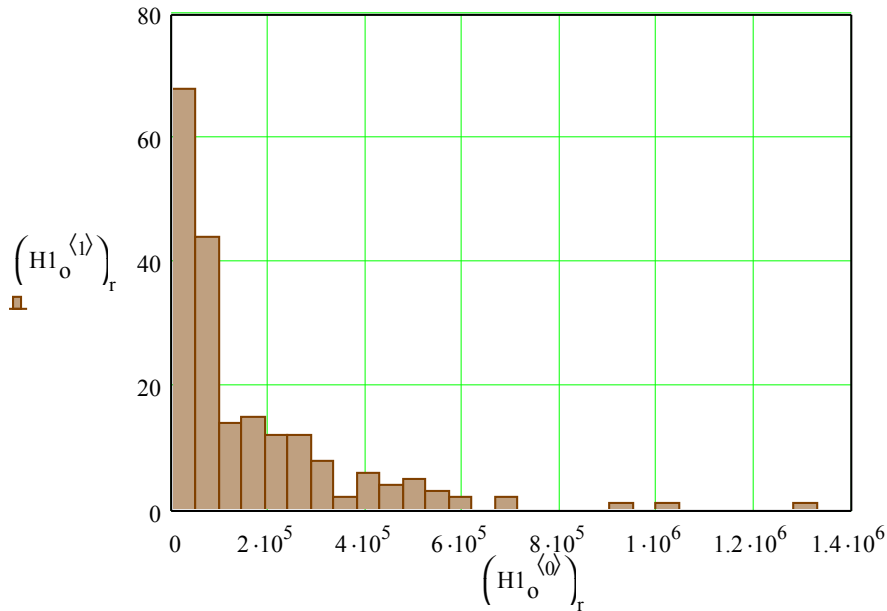
## Гистограммы

### Гистограммы времени наработки до отказа

Для первого элемента блока:

$$H1_o := \text{histogram} \left( \text{trunc} \left( \frac{\text{rows}(T1_o\_Weibull)}{7} \right), T1_o\_Weibull \right)$$

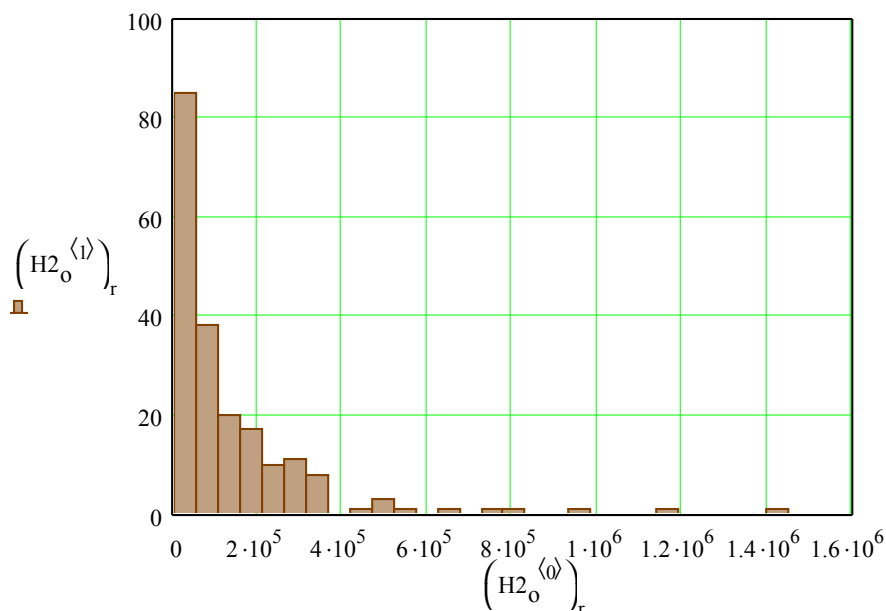
$$r := 0 .. 100$$



Для второго элемента блока:

$$H2_o := \text{histogram} \left( \text{trunc} \left( \frac{\text{rows}(T2_o\_Weibull)}{7} \right), T2_o\_Weibull \right)$$

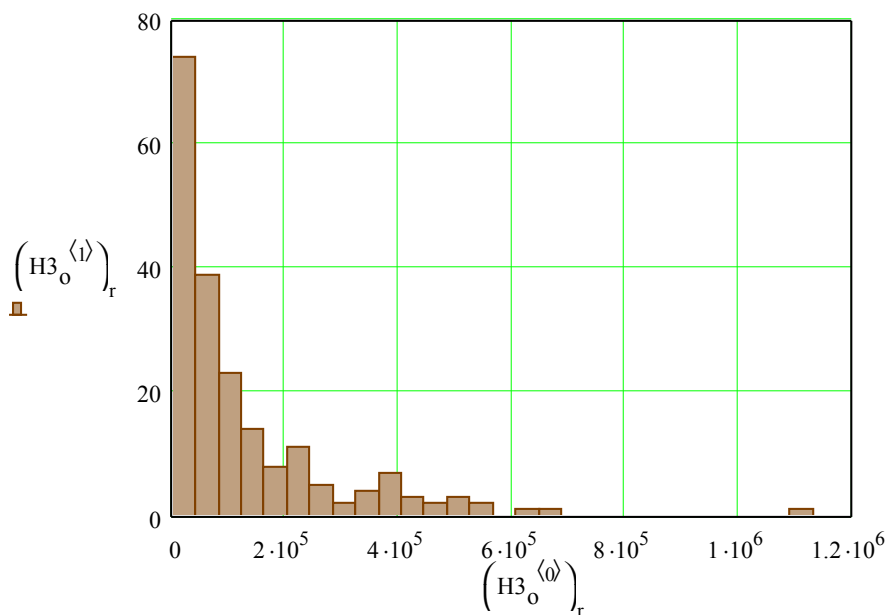
$$r := 0 .. 100$$



Для третьего элемента блока:

$$H3_o := \text{histogram} \left( \text{trunc} \left( \frac{\text{rows}(T3_o\_Weibull)}{7} \right), T3_o\_Weibull \right)$$

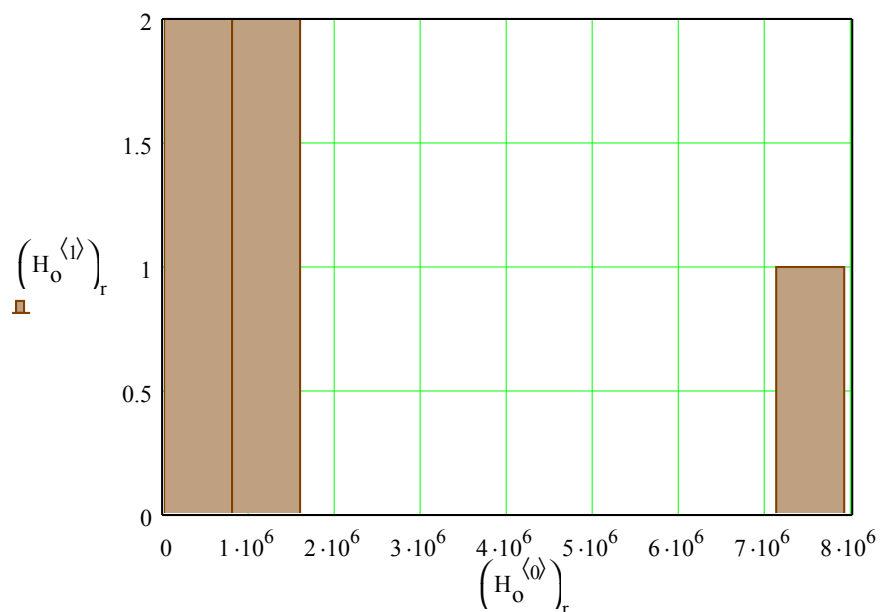
$$r := 0 .. 100$$



Для всего блока:

$$H_o := \text{histogram} \left( \text{trunc} \left( \frac{\text{rows}(\text{workTimes})}{0.5} \right), \text{workTimes} \right)$$

$$r := 0 .. 100$$



За время  $T_M$  в данной реализации произошло

$$\text{rows}(\text{workTimes}) = 5$$

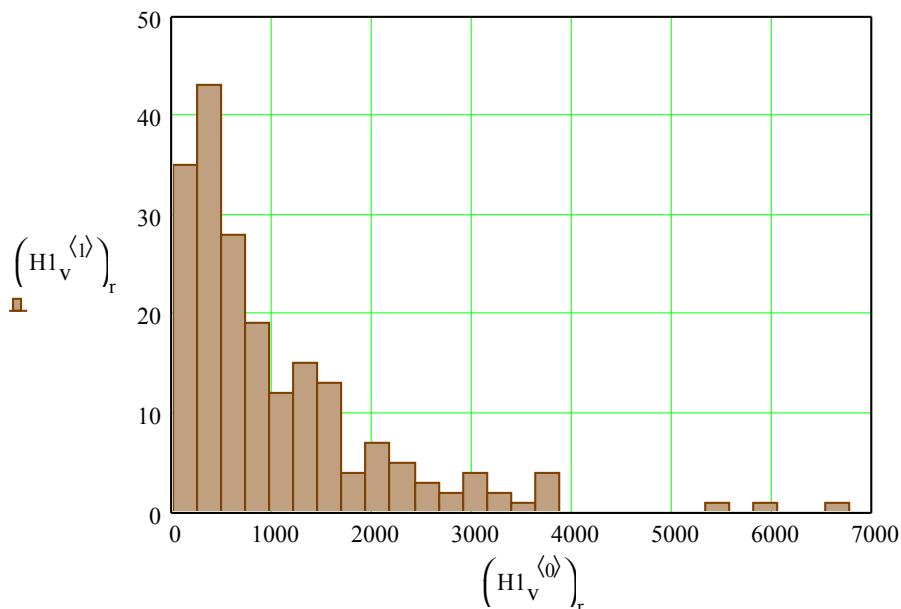
отказа.

## Гистограммы времени восстановления

Для первого элемента блока:

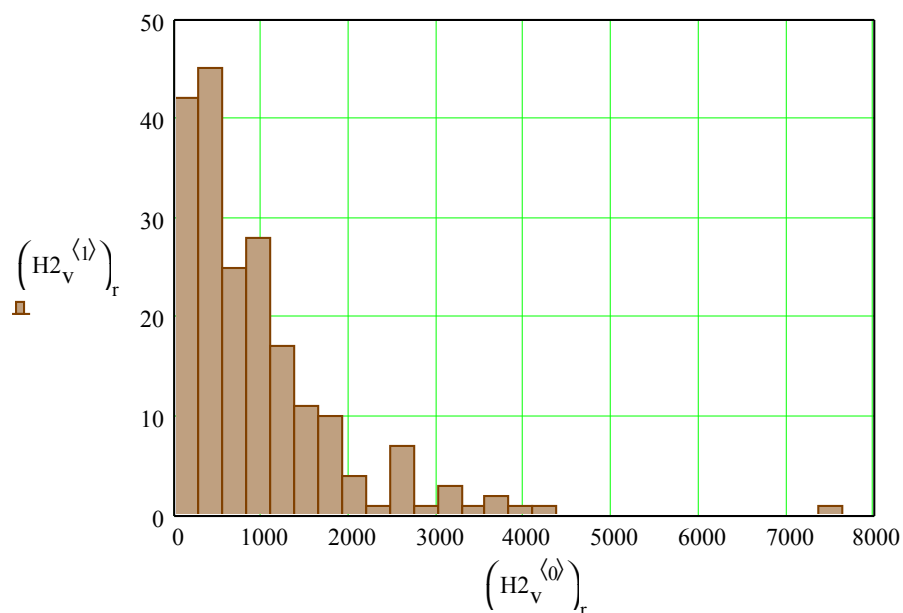
$$H1_v := \text{histogram} \left( \text{trunc} \left( \frac{\text{rows}(T1_{v\_exp})}{7} \right), T1_{v\_exp} \right)$$

$$r := 0 .. 100$$



Для второго элемента блока:

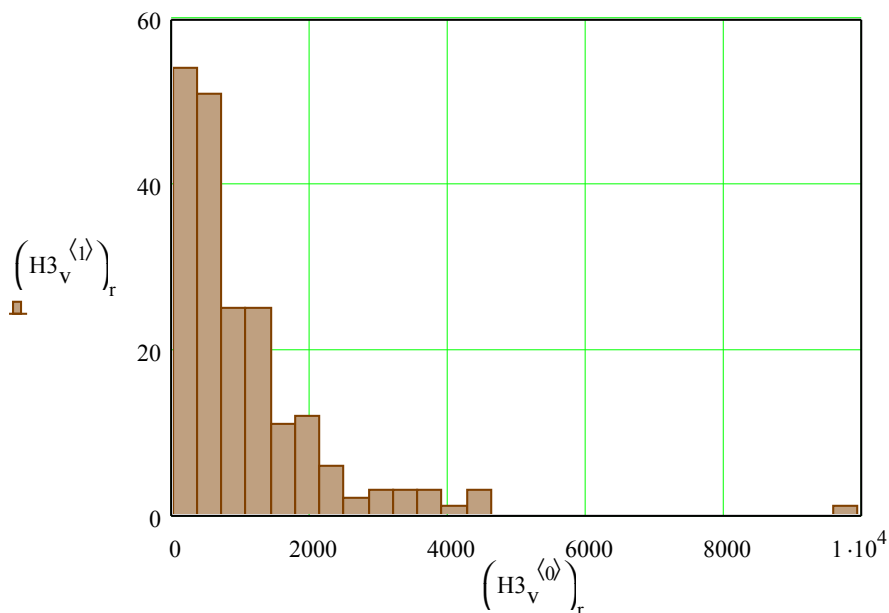
$$H2_v := \text{histogram} \left( \text{trunc} \left( \frac{\text{rows}(T2_{v\_exp})}{7} \right), T2_{v\_exp} \right)$$



Для третьего элемента блока:

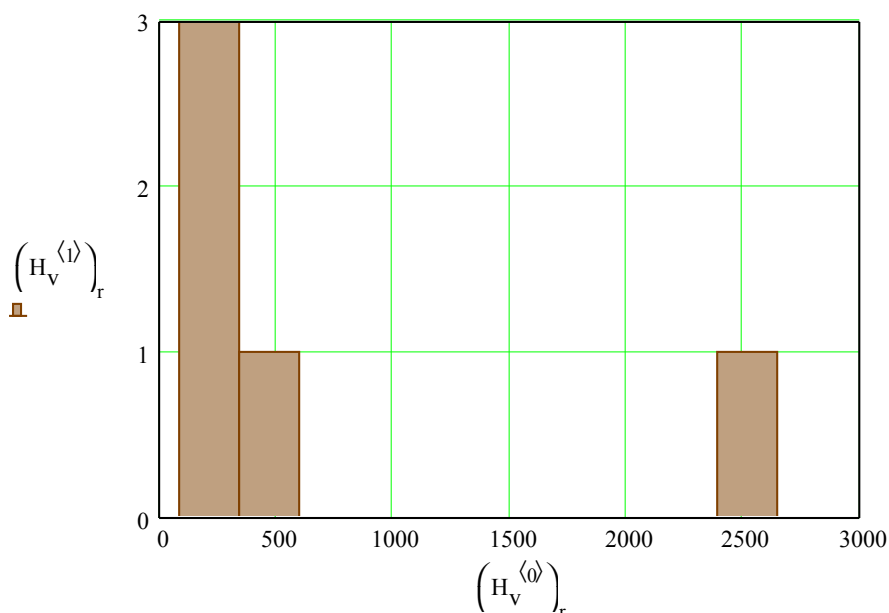
$$H3_v := \text{histogram} \left( \text{trunc} \left( \frac{\text{rows}(T3_{v\_exp})}{7} \right), T3_{v\_exp} \right)$$

$$r := 0 .. 100$$



Для всего блока:

```
H_v := histogram( trunc( rows(vosstTimes) / 0.5 ), vosstTimes )
r := 0 .. 100
```



**Оценка показателей надёжности по статистическим данным для полученной реализации поведения блока**

Оценка времени наработки до отказа элемента 1 блока:  $\text{mean}(T1_{o\_Weibull}) = 157110.573$  часов

Оценка времени наработки до отказа элемента 2 блока:  $\text{mean}(T2_{o\_Weibull}) = 133406.496$  часов

Оценка времени наработки до отказа элемента 3 блока:  $\text{mean}(T3_{o\_Weibull}) = 124806.689$  часов

**Оценка времени наработки до отказа блока в целом:**  $\text{mean}(\text{workTimes}) = 2134530.265$  часов

Оценка времени восстановления элемента 1 блока:  $\text{mean}(T1_{v\_exp}) = 1039.496$  часов

Оценка времени восстановления элемента 2 блока:  $\text{mean}(T2_{v\_exp}) = 937.259$  часов

Оценка времени восстановления элемента 3 блока:  $\text{mean}(T3_{v\_exp}) = 1030.257$  часов

**Оценка времени восстановления блока в целом:**  $\text{mean}(vosstTimes) = 759.883$  часов

**Коэффициент готовности блока:**  $K_{G\_statist} := \frac{\text{mean}(workTimes)}{\text{mean}(workTimes) + \text{mean}(vosstTimes)}$

$$K_{G\_statist} = 0.9996441314$$

### **Аналитическое определение показателей надёжности**

Интенсивность отказов каждого из трёх элементов блока:  $\frac{b}{a} T_M^{b-1} = 2.654 \times 10^{-6}$  1/ч

Среднее время наработки до отказа:  $T_O := a \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{b}\right) = (142300.902)$  ч

Вероятность безотказной работы каждого из трёх элементов:  $P_{123}(t) := \exp\left(-\frac{t^b}{T_W}\right)$

$$P_{123}(T_M) = 3.909 \times 10^{-15}$$

Вероятность безотказной работы блока в целом:  $P(t) := 1 - (1 - P_{123}(t))^3$

$$P(T_M) = 1.166 \times 10^{-14}$$

Среднее время восстановления (по экспоненциальному закону):  $T_v := \frac{1}{\lambda}$   $T_v = 1000$  ч

$$\vee (F2_{\text{logic}}(\tau, \text{num}) = 1 \wedge F2_{\text{logic}}(\tau, \text{num}) = 1)$$