



МОСКОВСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ  
ПРИБОРОСТРОЕНИЯ И ИНФОРМАТИКИ

---

---

Никульчев Е.В.

# **ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ В СРЕДЕ МАТЛАВ**

**Учебное пособие**

Москва, 2002

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ  
ПРИБОРОСТРОЕНИЯ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра «Управления и моделирования систем» (ИТ–6)

---

---

Никульчев Е.В.

**ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ  
В СРЕДЕ MATLAB**

Учебное пособие  
по специальностям 2202, 2204

Москва 2002

*Рекомендовано Ученым Советом  
МГАПИ в качестве учебного пособия  
по специальностям 2202, 2204*

УДК 519.2

**Никульчев Е.В. Практикум по теории управления в среде  
MATLAB: Учебное пособие. – М.: МГАПИ, 2002. – 88 с.; ил.  
ISBN 5-8068-0274-4**

*Рецензенты:*

Кафедра «Моделирование систем и ИТ» «МАТИ» - РГТУ им. К.Э. Циолковского,  
Гл. редактор научно-практического журнала «Exponenta Pro. Математика в  
приложениях» к.т.н. В.В. Анохин

Пособие предназначено для проведения практических занятий и лабораторных работ по дисциплинам «Основы теории управления», «Теоретические основы автоматизированного управления», «Теория автоматического управления» в среде инженерных и научных приложений MATLAB. Пособие содержит теоретические основы и методические примеры для выполнения практических занятий по основным разделам дисциплин.

Для студентов, обучающихся по специальностям 2202, 2204.

ISBN 5-8068-0274-4

$L \frac{1402020000}{ЛР020418-97}$

---

© Е.В. Никульчев, 2002

© МГАПИ, 2002

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие .....	5
Практическое занятие № 1. ДИНАМИЧЕСКИЕ И ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ САУ .....	6
Практическая работа № 2. АНАЛИЗ И СИНТЕЗ САУ МЕТОДОМ КОРНЕВОГО ГОДОГРАФА ..	17
Практическое занятие № 3. ОПИСАНИЕ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ .....	34
Практическое занятие № 4. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ .....	51
Практическое занятие № 5. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ.....	63
Практическое занятие № 6. ФИЛЬТР КАЛМАНА .....	76
ЛИТЕРАТУРА.....	87

## Предисловие

Основная цель этого пособия проиллюстрировать методы теории автоматического управления на примерах и научить применять математические программные системы для решения практических задач в рамках таких дисциплин как «Теоретические основы автоматического управления», «Основы теории управления».

Современные вычислительные средства позволяют без особого труда и затрат времени решать сложные задачи управления в технических системах не инженерными (адаптированными) методами, а с использованием математических аппаратов любой степени сложности. При этом не требуется помощь программиста для реализации методов и визуализации проводимых исследований. Все это выполняет такая современная математическая система, как MATLAB.

Структура книги следующая – каждый раздел начинается целью работы и постановкой задачи, приводятся необходимые теоретические основы, затем идут примеры и задачи с их реализацией в среде MATLAB с использованием пакета прикладных программ Control System Toolbox.

Пособие не содержит начальных сведений о работе с MATLAB. О них написано достаточно много пособий и руководств, существует свободно распространяемая документация. Вместе с тем изучая соответствующие примеры можно обучиться пользоваться программными средствами.

Учебное пособие предназначена для студентов, обучающихся по специальностям 2202, 2204 и другим родственным специальностям.

Практические занятия выполняются на персональных компьютерах в операционной среде Windows с установленной системой MATLAB 6.x и пакетом прикладных программ Control System Toolbox.

Указания по технике безопасности совпадают с требованиями, предъявляемыми к пользователю ЭВМ. Другие опасные и вредные факторы отсутствуют.

# Практическое занятие № 1.

## ДИНАМИЧЕСКИЕ И ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ САУ

### Цель работы

Ознакомление с динамическими и частотными характеристиками систем автоматического управления (САУ) и получение навыков исследования линейных динамических моделей.

### Постановка задачи

В качестве объекта исследования выступают линейные (линеаризованные) динамические стационарные системы управления с одним входом и одним выходом. При этом модель одномерной САУ задана в виде комплексной передаточной функции, записанной как отношение полиномов

$$W(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0}.$$

Необходимо:

1. Определить полюса и нули передаточной функции

$$s_j^*, (i = \overline{1, n}), s_j^0, (j = \overline{1, m}).$$

2. Записать дифференциальное уравнение, определяющее функционирование САУ.
3. Построить графики переходной и импульсно-переходной функции:

$$h(t), w(t).$$

4. Построить логарифмические частотные характеристики

$$L(\omega).$$

5. Построить частотный годограф Найквиста

$$W(i\omega), \omega = [0, \infty].$$

6. Представить исходную систему в виде последовательного соединения типовых звеньев. Построить характеристики этих типовых звеньев.

## Краткие сведения из теории

Рассмотрим систему автоматического управления (САУ), описываемую линейным (линеаризованным) дифференциальным уравнением вида:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = \\ = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $u(t)$  – входной процесс,  $y(t)$  – выходной процесс,  $a_i, b_j$ , ( $i = \overline{0, n}, j = \overline{0, m}$ ) – постоянные коэффициенты,  $n, m$  ( $n \geq m$ ) – постоянные числа. В операторной форме выражение (1.1) может быть записано –

$$A(D)y(t) = B(D)u(t).$$

Здесь  $D$  – оператор дифференцирования  $\left( D \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d}{dt} \right)$ . Отсюда

преобразование «вход-выход» системы –

$$\frac{y(t)}{u(t)} = \frac{B(D)}{A(D)} = W(D), \quad (1.2)$$

где  $W(D)$  называется операторной передаточной функцией.

Один из способов моделирования систем заключается в представлении преобразования «вход-выход» в виде комплексной передаточной функции:

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{B(s)}{A(s)} = W(s), \quad (1.3)$$

которая получается путем применения преобразования Лапласа к (1.2) при начальных нулевых условиях. Здесь  $s$ -комплексная переменная. Связь между операторной (1.2) и комплексной (1.3) передаточными функциями можно записать в виде

$$W(s) = W(D)|_{D=s}.$$

Комплексные числа, являющиеся корнями многочлена  $B(s)$ , называются нулями передаточной функции, а корни многочлена  $A(s)$  – полюсами.

Явный вид связи входа и выхода определяется выражением:

$$y(t) = \int_0^t w(t) v(t - \tau) d\tau, \quad (1.4)$$

где  $w(t)$  – оригинал (т.е. полученный с помощью обратного преобразования Лапласа) комплексной передаточной функции  $W(s)$ .

Динамические свойства систем характеризуют реакции на входные воздействия специального вида. В частности анализ выхода системы на единичный скачок и  $\delta$ -функцию (дельта-функцию).

Пусть  $u(t) = 1(t)$ , то есть на вход системы подается функция Хевисайда (единичный скачок), определяемая

$$1(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \leq 0, \\ 1, & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

График функции Хевисайда приведен на рис. 1.1. Реакция САУ на единичный скачек называется переходной функцией системы и обозначается  $h(t)$ .

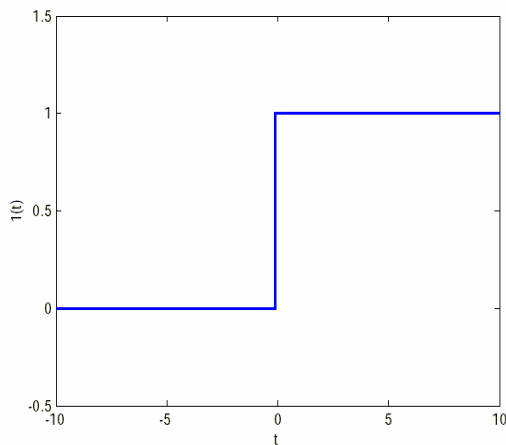


Рис. 1.1. Функция Хевисайда.

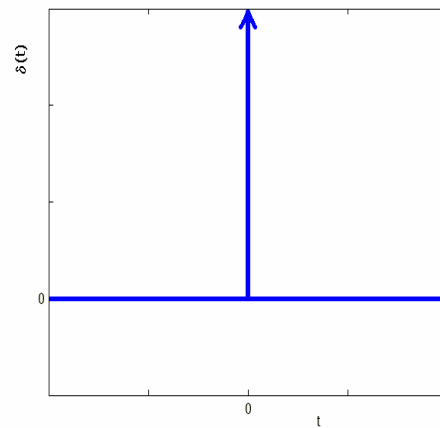


Рис. 1.2. Функция Дирака.

Если  $u(t) = \delta(t)$ , то есть на вход системы поступает функция Дирака ( $\delta$ -функция, импульсная функция, рис. 1.2) определяемая

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{при } t = 0, \\ 0, & \text{при } t \neq 0, \end{cases}$$

то реакция САУ называется импульсной переходной функцией системы и обозначается  $w(t)$ . Таким образом оригинал комплексной передаточной функции можно измерить как реакцию систему на импульс.

Импульсная и переходная функции системы связаны соотношением (из (1.4)):

$$h(t) = \int_0^t w(\tau) d\tau.$$



Благодаря широкому применению при исследовании устойчивости динамических систем и проектировании регуляторов получили распространение частотные характеристики.

Пусть на вход системы с передаточной функцией  $W(s)$  подается гармонический сигнал

$$u(t) = a_u \cos(\omega t), t > 0. \quad (1.5)$$

В этих условиях справедлива следующая теорема:

Если звено является устойчивым, то установившаяся реакция  $y(t)$  на гармоническое воздействие является функцией той же частоты с амплитудой

$$a_y = a_u |W(i\omega)|,$$

и относительным сдвигом по фазе

$$\psi = \arg W(i\omega).$$

Таким образом, выход определяется гармонической функцией

$$y(t) = a_u |W(i\omega)| \cos(\omega t + \arg W(i\omega)),$$

где  $i$  – комплексная единица ( $i^2 = -1$ ),  $W(i\omega) = W(s)|_{s=i\omega}$  – частотная характеристика.

Частотной характеристикой  $W(i\omega)$  стационарной динамической системы называется преобразование Фурье переходной функции:

$$W(i\omega) = F[h(t, \tau)] = \int_0^{\infty} w(t - \tau) e^{-i\omega(t - \tau)} d\tau,$$

где  $w(t - \tau)$  – импульсная переходная функция.

Связь между комплексной передаточной функцией и частотной характеристикой, исходя из свойств преобразований Фурье можно представить в виде соотношения:

$$W(s)|_{s=i\omega} = W(i\omega).$$

При фиксированном значении  $\omega$  частотная характеристика является комплексным числом, и, следовательно, может быть представлена в виде

$$W(i\omega) = A(\omega) e^{i\omega + \psi(\omega)} = U(\omega) + iV(\omega).$$

Здесь

$A(\omega) = |W(i\omega)|$  – амплитудно-частотная характеристика (АЧХ);

$\psi(\omega) = \arg W(i\omega)$  – фазово-частотная характеристика (ФЧХ);

$U(\omega) = \operatorname{Re} W(i\omega)$  – вещественная частотная характеристика (ВЧХ);

$V(\omega) = \operatorname{Im} W(i\omega)$  – мнимая частотная характеристика (МЧХ).

Геометрическое место точек  $W(i\omega)$  на комплексной плоскости при изменении  $\omega$  от  $\omega_0$  до  $\omega_1$  (обычно  $\omega_0 = 0$ ,  $\omega_1 = \infty$ ), называется амплитудно-фазовой характеристикой (АФХ) или частотным годографом Найквиста.

Имеет широкое практическое значение диаграмма Боде (логарифмическая амплитудная характеристика, ЛАХ), которая определяется как  $L = 20 \lg A(\omega)$ , измеряется в децибелах и строится как функция от  $\lg \omega$ .

### Последовательность выполнения работы

Для выполнения лабораторной работы используется пакет прикладных программ (ППП) Control System Toolbox. ППП предназначен для работы с ЛТИ-моделями (Linear Time Invariant Models) систем управления.

В Control System Toolbox имеется тип данных, определяющих динамическую систему в виде комплексной передаточной функции. Синтаксис команды, создающий ЛТИ-систему с одним входом и одним выходом в виде передаточной функции:

$$TF([b_m, \dots, b_1, b_0], [a_n, \dots, a_1, a_0])$$

$b_m, \dots, b_1$  – значения коэффициентов полинома  $B$  в (1.3),

$a_n, \dots, a_1$  – значения коэффициентов полинома  $A$  в (1.3).

Для выполнения работы могут применяться команды, приведенные в таблице 1.1.

Таблица 1.1. Некоторые команды Control System Toolbox

Синтаксис	Описание
pole(<ЛТИ-объект>)	Вычисление полюсов передаточной функции
zero(<ЛТИ-объект>)	Вычисление нулей передаточной функции
step(<ЛТИ-объект>)	Построение графика переходного процесса
impulse(<ЛТИ-объект>)	Построение графика импульсной переходной функции
bode(<ЛТИ-объект>)	Построение логарифмических частотных характеристик (диаграммы Боде)
nyquist(<ЛТИ-объект>)	Построение частотного годографа Найквиста

Для определения корней полиномов степени  $k$ , может, также, применяться команда MATLAB

`roots(P)`,

которая, в качестве аргумента  $P$ , получает матрицу коэффициентов полинома  $[p_k, \dots, p_0]$ .

Другим вариантом получения графиков динамических характеристик САУ является использование графического интерфейса ППП CST – LTI viewer, вызов которого осуществляется командой

`ltiview`

которой, в качестве параметра, можно указать имя переменной, содержащей LTI-объект.

Таким образом, выполнение лабораторной работы состоит из следующих шагов:

1. Изучить теоретические сведения.
2. Запустить систему MATLAB.
3. Создать tf-объект, в соответствии с заданным вариантом.
4. Составить дифференциальное уравнение, определяющее функционирование САУ.
5. Определить полюса передаточной функции  $s_j^*, (j = \overline{1, n})$  с использованием команды `roots` или `pole`.
6. Определить нули передаточной функции  $s_j^0, (j = \overline{1, m})$  с использованием команды `roots` или `zero`.
7. Используя LTI-viewer, или соответствующие команды (табл.1) получить динамические характеристики – переходную функцию  $h(t)$ , импульсно-переходную функцию  $w(t)$  и частотные характеристики – диаграмму Боде, частотный годограф Найквиста.
8. Получить представление исходной функции в виде произведения типовых звеньев.
9. Ответить на контрольные вопросы.
10. Оформить отчет.
11. Сдать отчет преподавателю и защитить работу.

Отчет оформляется в соответствии с требованиями, предъявляемыми к оформлению лабораторных работ в вузе, и должен содержать титульный лист, формулировку цели работы, постановку задачи в соответствии с вариантом задания, результаты работы, выводы.

Примечание: Варианты заданий, состоят из двух цифр: первая - номер передаточной функции, вторая – номер набора значений коэффициентов.

### Методический пример

Задана передаточная функция САУ

$$W = \frac{s + 2}{3s^3 + 4s^2 + 5s + 3}.$$

Найдем ее динамические и частотные характеристики. Будем работать в командном режиме среды MATLAB.

1. Создадим LTI-объект с именем w, для этого выполним:

```
>> w=tf([1 2],[3 4 5 3])
```

```
Transfer function:
```

```
      s + 2
```

```
-----  
3 s^3 + 4 s^2 + 5 s + 3
```

2. Найдем полюса и нули передаточной функции с использованием команд pole, zero.

```
>> pole(w)
```

```
ans =
```

```
 -0.2639 + 1.0825i
```

```
 -0.2639 - 1.0825i
```

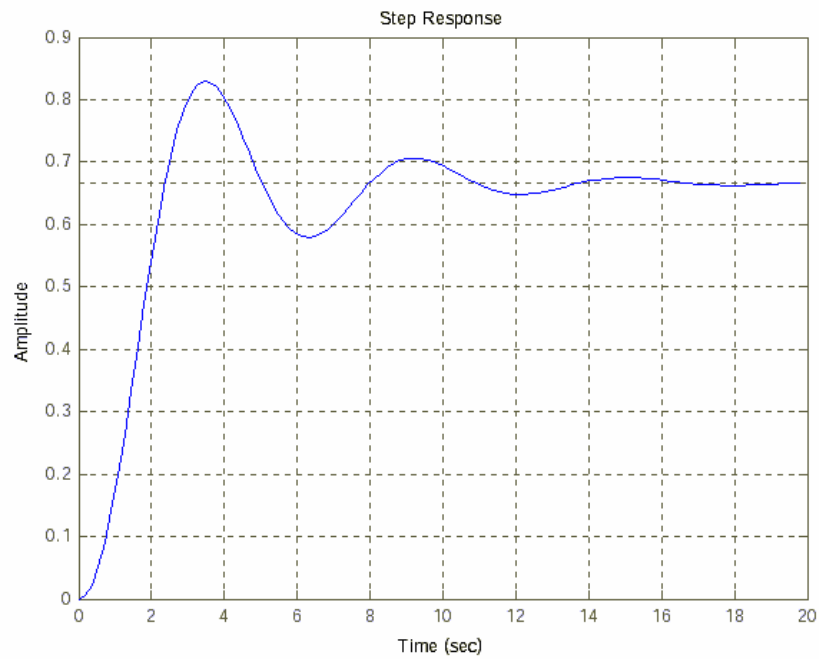
```
 -0.8055
```

```
>> zero(w)
```

```
ans =
```

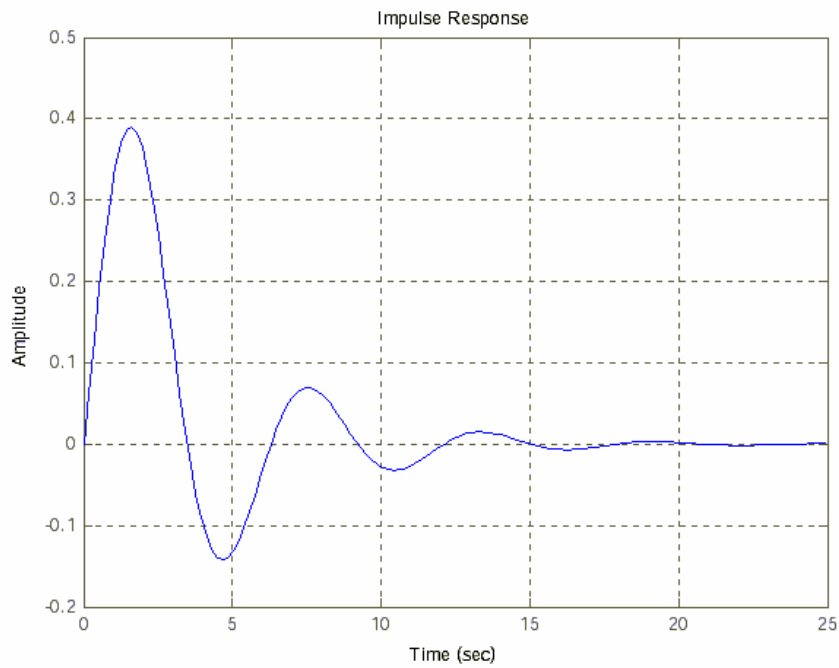
```
 -2
```

3. Построим переходную функцию командой `step(w)`. Результат ее выполнения приведен на рис. 1.3.



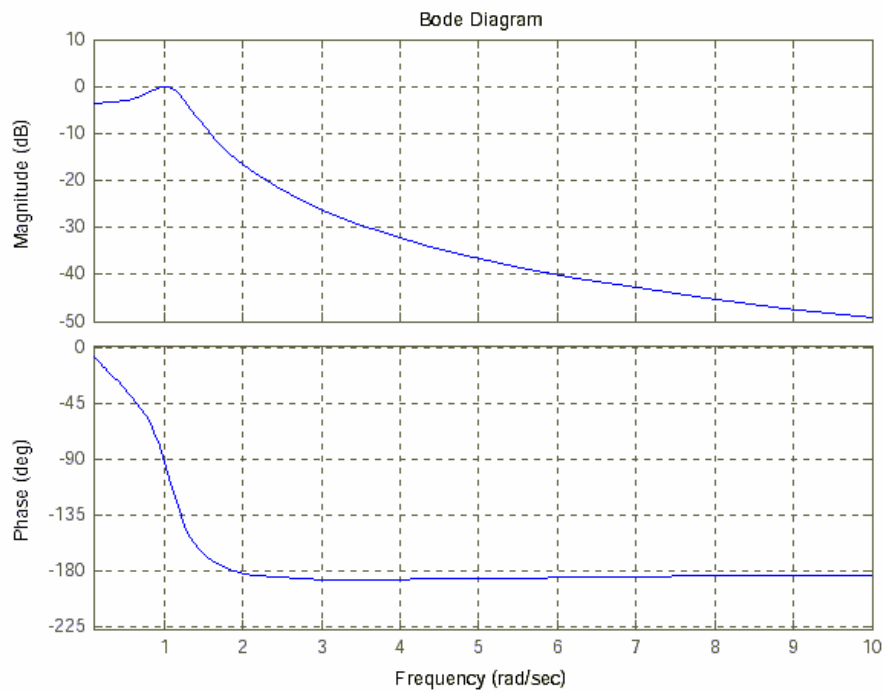
*Рис. 1.3. Переходная функция  $h(t)$ .*

4. Построим импульсную переходную функцию командой `impulse(w)`. Результат показан на рис. 1.4.



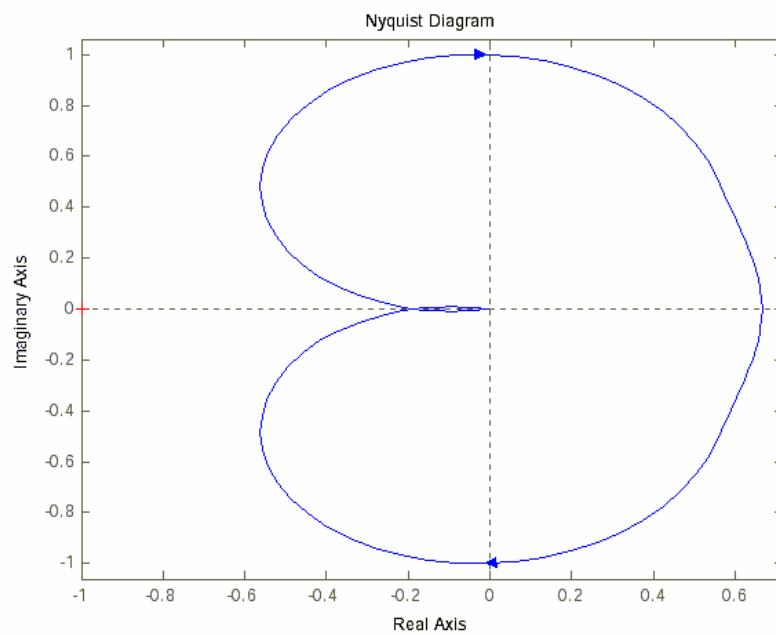
*Рис. 1.4. Импульсная переходная функция.*

5. Диаграмму Боде получим, используя команду `bode(w)` – рис. 1.5.



*Рис. 1.5. Логарифмические частотные характеристики.*

6. Определим частотный годограф Найквиста, выполнив команду `nyquist(w)` – рис. 1.6.



*Рис. 1.6. Частотный годограф.*

Аналогичные результаты (рис. 1.7) можно получить, используя команду `ltiview(w)`, с соответствующими настройками в меню «Plot Configuration».

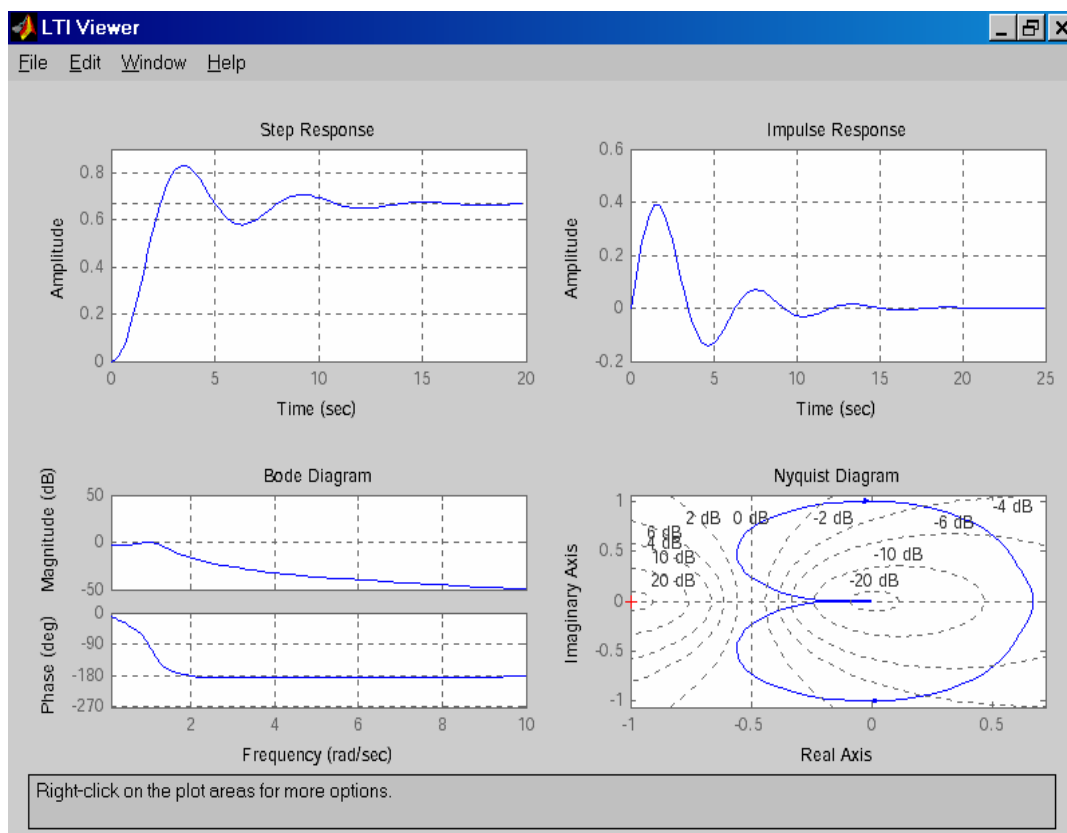


Рис. 1.7. LTI-viewer.

Каждая из построенных характеристик полностью и однозначно определяет рассматриваемую систему управления.

### Контрольные вопросы

1. Представьте систему в виде последовательного соединения типовых звеньев.
2. Дайте определение и поясните физический смысл переходной функции.
3. Представьте исходную систему в пространстве состояний.
4. Найдите передаточную функцию замкнутой системы.
5. Постройте динамические характеристики типовых звеньев.
6. Определите вид ЛЧХ для пропорционально – интегрально – дифференциального регулятора.

## Варианты заданий

№	Вид передаточной функции	№	Коэффициенты полиномов						
			$b_0$	$b_1$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
1.	$W(p) = \frac{b_1 p + b_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$	1.	0	3	1	2	3	0	1
		2.	2	6	4	0	1	5	1
		3.	0	-3	5	2	0	2	1
		4.	4	2	3	4	5	3	1
		5.	0	1	-2	-2	-3	-2	0
			$b_0$	$b_1$	$b_2$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$
2.	$W(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$	1.	0	-3	2	4	2	3	9
		2.	8	0	-3	-4	-6	-4	-1
		3.	-4	6	-2	5	5	0	1
		4.	6	-8	-7	0	-6	-3	-1
		5.	2	-1	-3	-1	0	-7	-2
			$b_0$	$b_1$	$b_2$	$a_0$	$a_1$	$a_3$	$a_4$
3.	$W(p) = \frac{b_2 p^2 + b_1 p + b_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_1 p + a_0}$	1.	0	2	8	-3	7	-7	1
		2.	-5	0	3	-8	-2	-1	-6
		3.	-7	1	2	0	5	2	9
		4.	-6	4	-4	1	0	6	3
		5.	2	-2	-1	5	3	0	9
			$b_0$	$b_1$	$b_2$	$a_0$	$a_1$	$a_3$	$a_4$
4.	$W(p) = \frac{b_2 p^2 + b_0}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$	1.	0	-5	4	3	7	9	1
		2.	7	-6	0	5	8	2	2
		3.	-2	-8	2	0	4	3	3
		4.	-7	-1	6	9	0	4	2
		5.	-3	7	-4	4	5	0	1
			$b_2$	$b_3$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$
5.	$W(p) = \frac{b_3 p^3 + b_2 p^2}{a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}$	1.	0	-5	4	3	7	9	1
		2.	7	-6	0	5	8	2	2
		3.	-2	-8	2	0	4	3	3
		4.	-7	-1	6	9	0	4	2
		5.	-3	7	-4	4	5	0	1



## Практическая работа № 2. АНАЛИЗ И СИНТЕЗ САУ МЕТОДОМ КОРНЕВОГО ГОДОГРАФА

### Цель работы

Ознакомление с методикой построения корневых годографов для анализа и синтеза линейных (линеаризованных) систем автоматического управления.

### Постановка задачи

Дана модель разомкнутой системы, записанная в виде отношения произведений типовых звеньев:

$$W(s) = \frac{K \cdot s^{\alpha_1} \prod_{j=1}^{\beta_1} (T_j s + 1) \prod_{j=1}^{\gamma_1} (T_j^2 s^2 + 2T_j \zeta_j s + 1)}{s^{\alpha_2} \prod_{i=1}^{\beta_2} (T_i s + 1) \prod_{i=1}^{\gamma_2} (T_i^2 s^2 + 2T_i \zeta_i s + 1)}.$$

Необходимо:

1. Построить корневой годограф.
2. Получить коэффициент усиления  $K^{кр}$ , при котором система находится на границе устойчивости.
3. Вычислить частоту  $\omega^{кр}$ , при которой в системе возникают незатухающие колебания.
4. Нанести на ветви корневого годографа значения полюсов замкнутой системы, соответствующие  $0.5 \cdot K^{кр}$  и  $0.25 \cdot K^{кр}$ .
5. Привести выражение для  $W_3(s)$  в виде произведения типовых звеньев. Указать значения параметров типовых звеньев.

### Краткие сведения из теории

В ряде случаев, имеющих практическое значение, модель линейной системы автоматического управления (САУ) задается в виде структурной схемы, состоящей из типовых звеньев, математическое описание которых задано в операторной форме. Связь между входом и выходом системы задается в виде передаточной функции  $W(s)$ . В общем виде передаточную функцию  $W(s)$  можно представить в виде:

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad (2.1)$$

где  $s$  – комплексная переменная,  $B(s)$  – полином степени  $m$ ;  $A(s)$  – полином степени  $n$ .

Для физически реализуемых САУ  $m \leq n$ . Коэффициенты указанных полиномов действительные числа.

Применение метода корневого годографа (КГ) обусловлено фундаментальной зависимостью поведения линейной САУ от полюсов и нулей ее передаточной функции. Под полюсами подразумеваются корни полинома - знаменателя  $A(s)$ , а под нулями - корни полинома числителя  $B(s)$ . Полином  $A(s)$  называется также характеристическим многочленом передаточной функции  $W(s)$ .

Положение полюсов  $W(s)$  на комплексной плоскости определяет устойчивость САУ, а в совокупности с нулями вид импульсной переходной функции  $w(t)$  и переходной функции  $h(t)$ .

Метод корневого годографа позволяет находить полюса и нули передаточной функции замкнутой системы, располагая полюсами и нулями разомкнутой системы при изменении коэффициента усиления разомкнутой системы  $k$ . Метод корневого годографа является также методом проектирования пропорционального устойчивого регулятора.

Передаточную функцию разомкнутой системы  $W_p(s)$  представим в виде:

$$W_p(s) = \frac{KC \prod_{j=1}^m (s - s_j^0)}{\prod_{i=1}^n (s - s_i^*)}, \quad (2.2)$$

где  $s_j^0$  – нули передаточной функции  $W_p(s)$ , ( $j = \overline{1, m}$ );  $s_i^*$  – полюса передаточной функции  $W_p(s)$ , ( $i = \overline{1, n}$ ),  $n$  и  $m$  – порядки знаменателя и числителя;  $K$  - коэффициент усиления разомкнутой системы;  $C$  - коэффициент представления.

Передаточная функция разомкнутой системы, как правило, задается в виде отношения произведений передаточных функций стандартных (типовых) звеньев, при описании которых используются выражения трех видов:

$$Ts \quad (2.3)$$

$$Ts + 1 \quad (2.4)$$

$$T^2 s^2 + 2T \zeta s + 1 \quad (2.5)$$

Здесь  $T$  постоянная времени [с].

Если выражения (2.3), (2.4), (2.5) стоят в знаменателе передаточных функций звеньев (в числителе 1), то звенья называются соответственно интегрирующим, апериодическим, колебательным. Для колебательного звена  $\zeta$  - безразмерный коэффициент затухания ( $0 < \zeta < 1$ ). Если выражения (2.3), (2.4), (2.5) стоят в числителе передаточных функций звеньев (2.1), то звенья называются соответственно дифференцирующим, форсирующим первого порядка, форсирующим второго порядка.

Для перехода от стандартной формы записи к формуле (2.2) необходимо вычислить полюса и нули соответствующих типовых звеньев.

Для передаточных функций, использующих выражение (2.3) –

$$s^{*(0)} = 0, \quad (2.6)$$

использующих выражение (2.4) –

$$s^{*(0)} = -\frac{1}{T}, \quad (2.7)$$

использующих выражение (2.5) –

$$s_{1,2}^{*(0)} = -\frac{\zeta}{T} \pm \sqrt{\left(\frac{\zeta}{T}\right)^2 - \frac{1}{T^2}}, \quad (2.8)$$

или

$$s_{1,2}^{*(0)} = -\frac{1}{T}(\zeta \pm i \cos \varphi) \quad (2.9)$$

где  $\varphi = \arcsin \zeta$ .

Коэффициент представления  $C$  вычисляется по формуле

$$C = \frac{\prod_{j=1}^m T_j^0}{\prod_{i=1}^n T_i^*} \quad (2.10)$$

Замечание. Для звеньев, использующих выражение (2.5), соответствующая постоянная времени входит в выражение (2.10) в квадрате.

При замыкании системы с передаточной функцией  $W_p(s)$  единичной обратной связью передаточная функция замкнутой системы  $W_3(s)$  принимает вид:

$$W_3(s) = \frac{W_p(s)}{1 \pm W_p(s)}, \quad (2.11)$$

где знак «+» соответствует отрицательной обратной связи; знак «-» соответствует положительной обратной связи.

Структурная схема системы с обратной связью приведена на рис. 2.1.

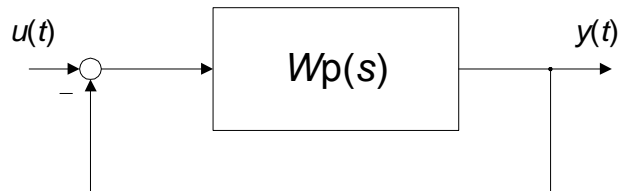


Рис. 2.1. Структурная схема САУ.

Из (2.11) следует, что нули передаточной функции замкнутой системы равны нулям передаточной функции разомкнутой системы.

Задачу можно представить следующим эквивалентным образом. Есть объект управления, определяемый передаточной функцией

$W_p(s) = C \prod_{j=1}^m (s - s_j^0) / \prod_{i=1}^n (s - s_i^*)$ . Необходимо найти значение параметра

пропорционального регулятора (рис. 2.2.)

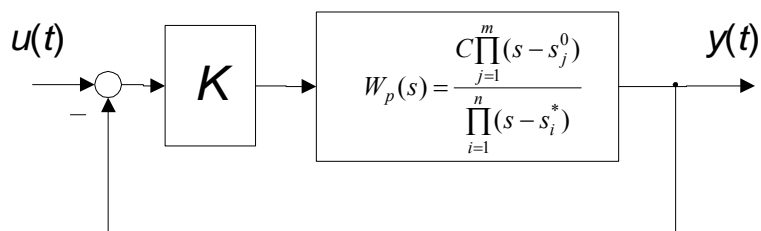


Рис. 2.2. Эквивалентная схема САУ.

Для определения полюсов замкнутой системы (рис. 2.1.) необходимо решить уравнение:

$$W_p(s) = -1 \quad (2.12)$$

Так как  $W_p(s)$  является функцией комплексного переменного  $s$ , то уравнение (12) распадается на два уравнения:

– уравнение модулей:

$$|W(s)|=1 \quad (2.13)$$

– уравнение аргументов:

$$\arg W(s) = \pm(2\nu+1)\pi, \quad \nu=0, 1, 2, \dots \quad (2.14a)$$

для отрицательной обратной связи и

$$\arg W(s) = \pm 2\pi, \quad \nu=0, 1, 2, \dots \quad (2.14б)$$

для положительной обратной связи.

Уравнения (2.14) имеют наглядный геометрический смысл. Если точка  $s$  является полюсом замкнутой системы, то, проведя в точку  $s$  вектора из всех нулей  $W_p(s)$  (обозначим аргументы этих векторов  $\theta_j^0$ ) и вектора из всех полюсов  $W_p(s)$  (обозначим аргументы этих векторов  $\theta_i^*$ ), уравнение (2.14а) можно записать в следующем виде:

$$\sum_{j=1}^m \theta_j^0 - \sum_{i=1}^n \theta_i^* = \pm (2\nu + 1)\pi, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (2.15а)$$

а уравнение (2.14б) в виде:

$$\sum_{j=1}^m \theta_j^0 - \sum_{i=1}^n \theta_i^* = \pm 2\nu\pi, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots \quad (15б)$$

Углы  $\theta$  отсчитываются от положительного направления действительной оси. Знак угла «+» соответствует повороту против часовой стрелки, знак угла «-» соответствует повороту по часовой стрелке.

Геометрическое место точек на комплексной плоскости « $s$ », удовлетворяющее выражениям (2.15а) и (2.15б) называется корневым годографом.

Как следует из (2.15), конфигурация корневого годографа не зависит от коэффициента усиления  $K$ , но каждому конкретному значению  $K$  однозначно соответствуют точки на корневом годографе.

Для определения этого соответствия достаточно воспользоваться уравнением (2.13) в следующей интерпретации:

$$\frac{K C \prod_{j=1}^m l_j^0}{\prod_{i=1}^n l_i^*} = 1, \quad (2.16)$$

где  $l_j^0$  – модуль (длина) вектора, проведенного из  $j$ -нуля в точку  $s$  КГ;  $l_i^*$  – модуль вектора, проведенного из  $i$ -полюса в ту же точку  $s$ .

Приведем свойства корневых годографов (случай отрицательной обратной связи):

1. Ветви корневого годографа непрерывны и расположены на комплексной плоскости симметрично относительно действительной оси.

2. Число ветвей КГ равно порядку системы  $n$ . Ветви начинаются в  $n$  полюсах разомкнутой системы при  $K = 0$ . При возрастании  $K$  от 0 до бесконечности полюса замкнутой системы двигаются по ветвям КГ.

3. Отрезки действительной оси, по которым перемещаются действительные полюса замкнутой системы являются действительными ветвями корневого годографа. Эти ветви находятся в тех частях действительной оси, справа от которых расположено нечетное общее число действительных полюсов и нулей разомкнутой системы.

4.  $m$  ветвей КГ при возрастании  $K$  от 0 до бесконечности заканчиваются в  $m$  нулях  $W_p(s)$ , а  $(n - m)$  ветвей при  $K$ , стремящемся к бесконечности, удаляются от полюсов вдоль асимптот.

5. Асимптоты в виде звезды из  $(n - m)$  полупрямых выходят из точки с координатой

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^m s_j^0 - \sum_{i=1}^n s_i^*}{n - m}$$

на действительной оси под углами

$$\theta_a = \frac{2\nu + 1}{n - m} \pi, \quad (\nu = \overline{0, n - m - 1})$$

к действительной оси.

6. Угол выхода  $\theta_i^*$  ветви КГ из полюса  $s_i^*$  определяется из уравнения (2.15а), примененного к данному полюсу. Аналогично определяется угол входа ветви КГ в нуль  $s_j^0$ .

7. При расположении ветвей корневого годографа в левой полуплоскости  $s$  САУ устойчива. При пересечении ветвей КГ мнимой оси слева направо САУ становится неустойчивой. Пусть при  $K = K^{кр}$  пересечение КГ с мнимой осью произойдет в некоторой точке  $i\omega^{кр}$ . Назовем это значение коэффициента усиления критическим  $K^{кр}$ , а величину  $\omega^{кр}$  критической угловой частотой, на которой система становится неустойчивой.

Метод КГ позволяет выбрать коэффициент усиления САУ, подобрать расположение полюсов и нулей передаточной функции корректирующих звеньев, определить параметры доминирующих полюсов САУ (ближайших к началу координат плоскости  $s$ ).

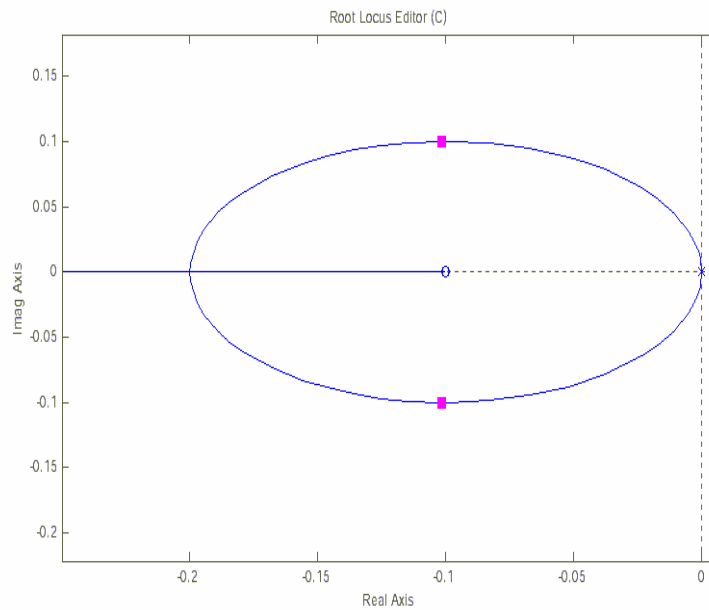
В качестве примеров, приведем КГ для двух систем автоматического управления.

На рисунке 2.3а приведен корневой годограф САУ, передаточная функция разомкнутой системы, которой равна:

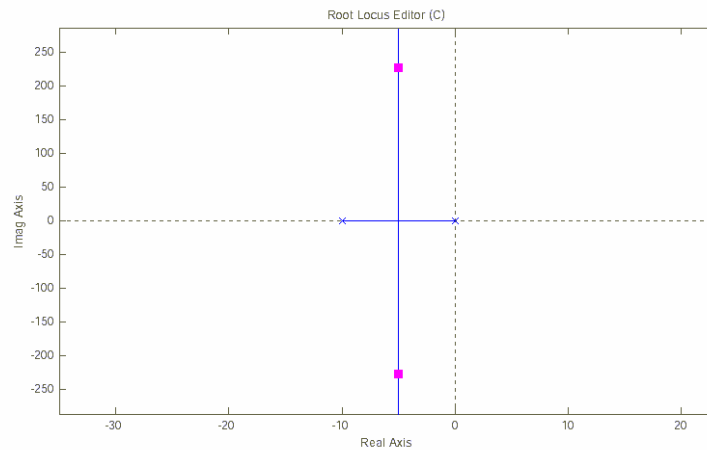
$$W_{P1} = \frac{K(s + 0.1)}{s^2}.$$

Рисунок 2.3б иллюстрирует КГ САУ с передаточной функцией разомкнутой системы вида:

$$W_{P2} = \frac{K}{s(s + 10)}.$$



*a*



*б*

*Рис. 2.3. Примеры корневых годографов.*

## Последовательность выполнения

Для выполнения работы используется GUI-интерфейс «SISO-Design Tool» из пакета прикладных программ Control System Toolbox.

Графический интерфейс предназначен для анализа и синтеза одномерных линейных (линеаризованных) систем автоматического управления (SISO - Single Input/Single Output).

В Control System Toolbox имеется тип данных, определяющих динамическую систему в виде набора полюсов, нулей и коэффициента усиления передаточной функции. Синтаксис команды, создающий LTI (Linear Time Invariant)-систему в виде объекта ZPK (zero-pole-gain) с одним входом и одним выходом

$$\text{ZPK}([s_1^0, \dots, s_m^0], [s_1^*, \dots, s_n^*], K)$$

$s_1^0, \dots, s_m^0$  – значения нулей системы,  $s_1^*, \dots, s_n^*$  – значения полюсов системы,

$K$  – коэффициент усиления.

Более естественным является вариант, при котором с помощью функции ZPK создается символьная переменная 's', которая затем используется для определения передаточной функции в виде отношения (2). Например, после выполнения команд

$$s = \text{zpk}('s'); W1 = (s+0.1)/(s^2)$$

произойдет создание переменной W1 типа ZPK, определяющей передаточную функцию вида  $W1 = \frac{(s + 0.1)}{s^2}$ .

Запуск графического интерфейса SISO-Design Tool осуществляется командой

`sisotool`

или выбором соответствующего пункта в окне «Launch Pad».

Для выполнения лабораторной работы необходимо выбрать в меню View пункт Root Locus (корневой годограф), для отображения редактора Root Locus Editor. В правом верхнем углу SISO-Design Tool можно менять тип обратной связи (кнопка «+/-») и структурную схему



САУ. В лабораторной работе предполагается наличие отрицательной обратной связи, и структурной схемы, показанной на рис.1.

Для загрузки данных из рабочего пространства MATLAB необходимо использовать меню «File/Import», в результате которой появляется диалог Import System Data. Необходимо, чтобы в результате импортирования данных получилась рассматриваемая схема САУ (рис. 2.1). Используя Root Locus Editor и значение коэффициента усиления (здесь  $C$  – Current Compensator), выполнить задания лабораторной работы. Изменение динамических и частотных характеристик замкнутой системы при изменении  $K$  можно проследить используя меню «Tools/Loop Responses».

Таким образом, последовательность выполнения практической работы следующая:

1. Ознакомиться с основными элементами теории метода корневого годографа.
2. В соответствии с заданным вариантом нарисовать структурную схему САУ.
3. Запустить систему MATLAB.
4. Создать zpk-объект, в соответствии с заданным вариантом.
5. Определить значения полюсов и нулей разомкнутой системы  $W_p(s)$ .
6. Запустить SISO-Design Tool и построить КГ.
7. В соответствии с теорией проанализировать расположение ветвей корневого годографа.
8. Определить условия неустойчивости замкнутой САУ. Определить  $K^{кр}$  и  $\omega^{кр}$ .
9. Определить значения полюсов, соответствующие  $0.5K^{кр}$  и  $0.25K^{кр}$ .
10. Проанализировать влияние удаленных полюсов и нулей на величины  $K^{кр}$  и  $\omega^{кр}$ .
11. При  $K=1$  привести выражение для  $W_3(s)$  в виде произведения типовых звеньев. Указать значения параметров типовых звеньев.
12. Оформить отчет.

### Методический пример

Пусть необходимо исследовать САУ с передаточной функцией разомкнутой системы:

$$W(s) = \frac{(0.2s + 1)}{s(0.1s + 1)(0.04s^2 + 2 \cdot 0.2 \cdot 0.3s + 1)}$$

1. Создадим ZPK-объект, найдем полюса и нули разомкнутой системы:

```
>> s = zpk('s'); W = (0.2*s+1)/(s*(0.1*s+1)*(0.2^2*s^2+2*0.2*0.3*s+1))

Zero/pole/gain:
      50 (s+5)
-----
s (s+10) (s^2 + 3s + 25)

>> pole(W)

ans =

      0
 -10.0000
 -1.5000 + 4.7697i
 -1.5000 - 4.7697i

>> zero(W)

ans =

      -5
```

2. Запустим SISO-Design Tool, настроим параметры и импортируем ZPK-объект из рабочего пространства MATLAB (рис. 2.4). В окне Root Locus Editor интерфейса SISO-Design Tool построится корневой годограф (рис. 2.5).

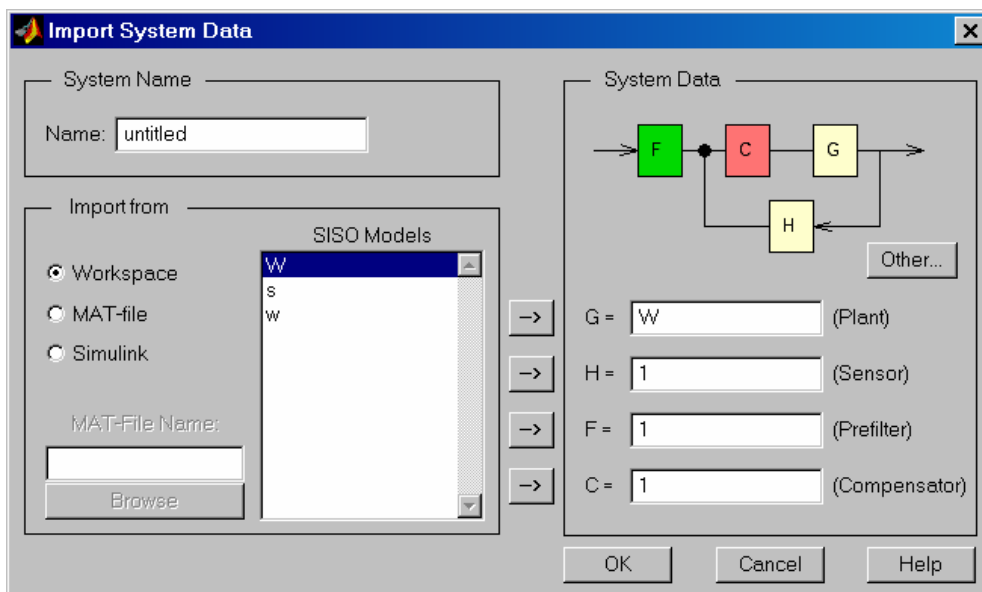
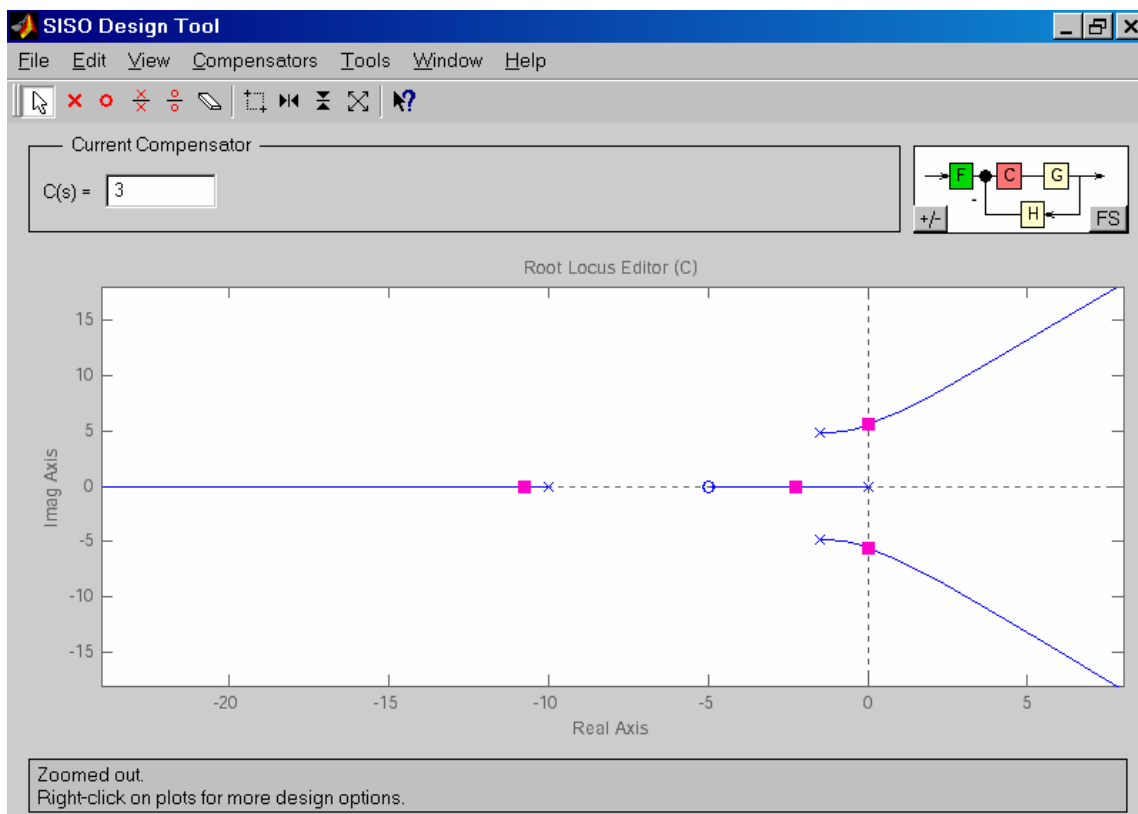


Рис. 2.4. Диалог импортирования данных в SISO-Design Tool.



*Рис 2.5. SISO-Design Tool.*

3. Захватив «мышью», передвигать красным курсором по корневому годографу до пересечения ветвей с мнимой осью, определить значение  $K^{кр}$  (рис. 2.6). Передвижение курсора происходит также при вводе значения коэффициента усиления  $C$  в соответствующее поле ввода в верхней части GUI-интерфейса.

Для рассматриваемого случая  $K^{кр} \approx 3$ . Значение  $\omega^{кр}$  соответствует мнимой координате пересечения КГ мнимой оси. Просмотреть это значение можно в нижней части интерфейса или выбрав меню пункт «View/Closed-Loop Poles» (рис. 2.7).

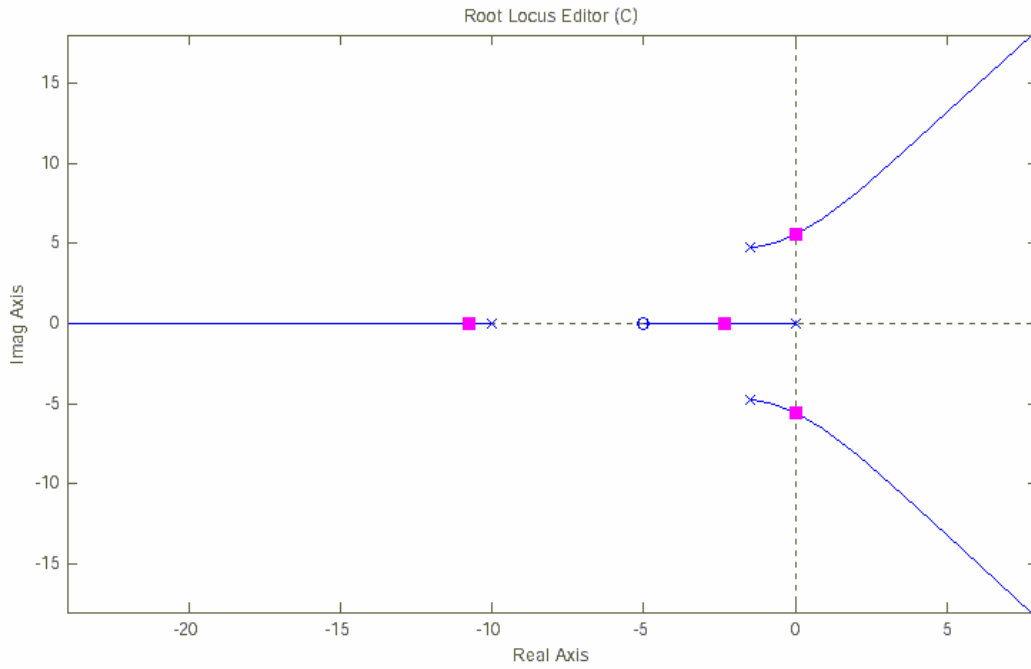


Рис. 2.6. Корневой годограф с нанесенным значением  $K^{kp}$ .

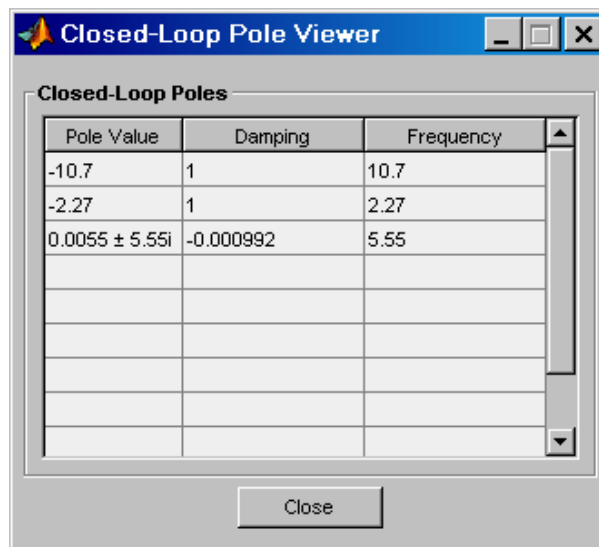
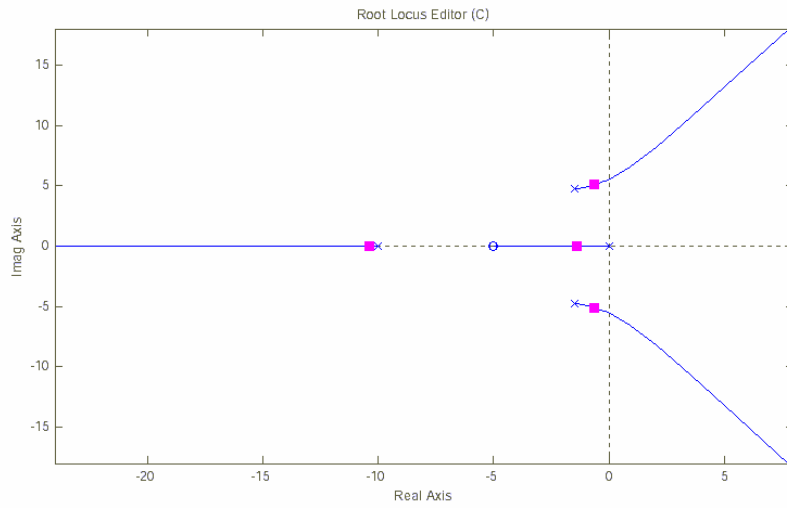
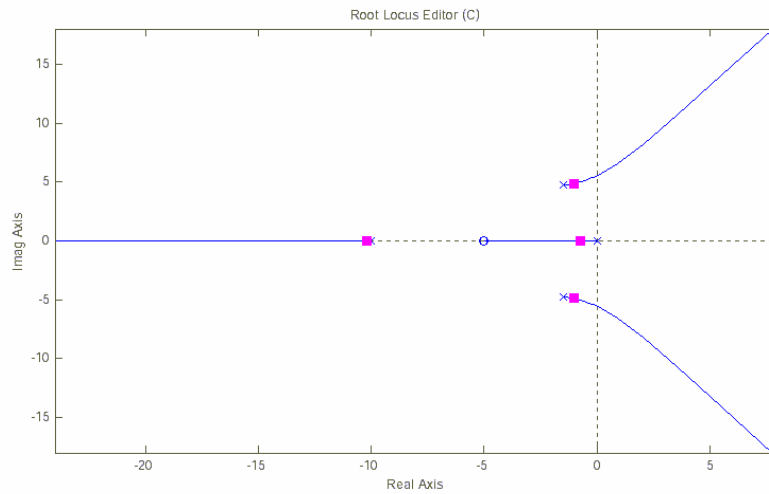


Рис. 2.7. Closed-Loop Poles Viewer.

4. Зададим значения  $0.5K^{kp}$  и  $0.25K^{kp}$  (рис. 2.8а , 2.8б) и определим значения полюсов (рис. 2.9а , 2.9б).



a.  $C = 0.5K^{kp}$

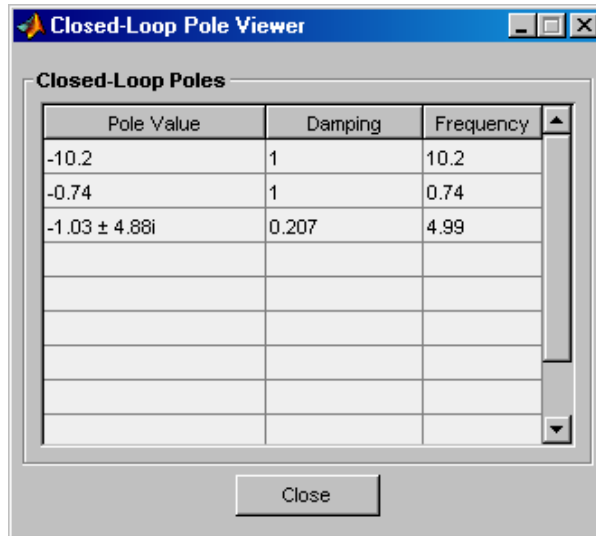


б.  $C = 0.25K^{kp}$

Рис. 2.7. Корневой годограф САУ.

Closed-Loop Poles		
Pole Value	Damping	Frequency
-10.4	1	10.4
-1.38	1	1.38
-0.617 ± 5.07i	0.121	5.11

a.  $C = 0.5K^{kp}$



б.  $C = 0.25K^{кр}$

Рис. 2.9. Closed-Loop Poles Viewer.

5. Например, для значения  $0.5K^{кр}$  построим вид переходной функции замкнутой системы. Для этого необходимо выбрать в меню пункт «Tools/Loop Responses/Closed-Loop Step». Результат построения переходной функции – рис. 2.10. Видно, что система устойчива.

Меня значения  $C$  можно увидеть в соответствующее изменение переходной функции или других характеристик системы в динамике. При изменении  $C$  происходит автоматическое обновление выбранных характеристик замкнутой системы.

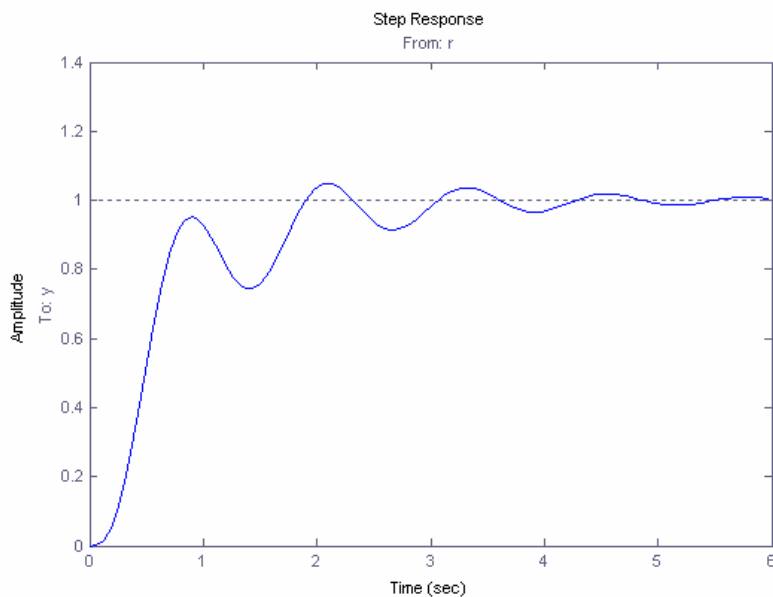


Рис. 2.10. Переходная функция при  $C = 0.5K^{кр}$ .

В работе на основе использования метода корневого годографа получены области значений коэффициента усиления, в которых система автоматического управления является устойчивой.

## Отчет о работе

Отчет оформляется в соответствии с требованиями, предъявляемыми к оформлению в вузе, и должен содержать:

1. Титульный лист
2. Наименование и цель работы.
3. Исходные данные варианта задания и структурную схему САУ.
4. Чертежи комплексной плоскости и КГ. Нанести на все ветви значения  $K^{кр}$ ,  $0.5K^{кр}$  и  $0.25K^{кр}$ .
5. Выражение для  $W_3(s)$  в виде произведения типовых звеньев с указанными значениями параметров типовых звеньев.
6. Анализ результатов построения КГ.
7. Выводы.

Замечание: Если САУ устойчива (при любом  $K > 0$ ), то ограничиться построением КГ, удаленного от начала координат на удвоенный модуль наиболее удалённого от начала координат полюса разомкнутой системы.

## Контрольные вопросы

1. Дать определение передаточной функции, полюсов, нулей, корневого годографа. Назвать типовые звенья САУ. Что такое отрицательная обратная связь?
2. Доказать правила построения КГ №№ 1, 2, 3, 5.
3. Показать влияние расположения нуля на поведение ветвей КГ (для примера указанного преподавателем).
4. Показать на конкретном примере, что по мере удаления ветви КГ от начала координат движение ветви в зависимости от  $K$  замедляется.
5. Вывести зависимость для малого перемещения ветвей КГ от исходного полюса в зависимости от изменения  $K$ .
6. Провести анализ влияния изменения расположения полюса или нуля (по указанию преподавателя) на величины  $K^{кр}$  и  $\omega^{кр}$ .

## Варианты заданий

№	Вид передаточной функции	№	Варианты параметров
	$W_p(s)$		Значения $T_i$ [с]
1.	$\frac{K(T_1s + 1)}{s(T_2s + 1)}$	1.	$T_1 = 0.5, T_2 = 0.1$
		2.	$T_1 = 0.1, T_2 = 0.01$
		3.	$T_1 = 0.1, T_2 = 0.9$
		4.	$T_1 = 0.01, T_2 = 0.1$
		5.	$T_1 = 0.15, T_2 = 0.2$
2.	$\frac{K}{s(T^2s^2 + 2T\zeta s + 1)}$	1.	$T = 0.1, \zeta = 1$
		2.	$T = 0.05, \zeta = 0.707$
		3.	$T = 0.03, \zeta = 0.1$
		4.	$T = 0.08, \zeta = 0.5$
		5.	$T = 0.01, \zeta = 0.15$
3.	$\frac{K(T_1s + 1)}{s(T_2s + 1)(T_3s + 1)(T_4s + 1)}$	1.	$T_1 = 0.03, T_2 = 0.5,$ $T_3 = 0.1, T_4 = 0.05$
		2.	$T_1 = 0.05, T_2 = 0.4,$ $T_3 = 0.08, T_4 = 0.033$
		3.	$T_1 = 0.2, T_2 = 0.45,$ $T_3 = 0.1, T_4 = 0.05$
		4.	$T_1 = 0.5, T_2 = 0.25,$ $T_3 = 0.1, T_4 = 0.02$
		5.	$T_1 = 0.1, T_2 = 0.25,$ $T_3 = 0.1, T_4 = 0.05$
4.	$\frac{K(T_1s + 1)}{s(T_2s + 1)(T_3s + 1)(T_4^2s^2 + 2T_4\zeta s + 1)}$	1.	$T_1 = 0.2, T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.05, T_4 = 0.07, \zeta = 0.5$
		2.	$T_1 = 0.07, T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.05, T_4 = 0.07, \zeta = 0.5$
		3.	$T_1 = 0.3, T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.05, T_4 = 0.07, \zeta = 0.5$
		4.	$T_1 = 0.01, T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.1, T_4 = 0.07, \zeta = 0.5$
		5.	$T_1 = 0, T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.1, T_4 = 0.07, \zeta = 0.5$



№	Вид передаточной функции $W_p(s)$	№	Варианты параметров Значения $T_i$ [с]
5.	$\frac{K(T_1^2 s^2 + 2T_1 \zeta_1 s + 1)}{s(T_2^2 s^2 + 2T_2 \zeta_2 s + 1)(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)^2}$	1.	$T_1 = 0.05, \zeta_1 = 0.3, T_2 = 0.1,$ $\zeta_2 = 0.3, T_3 = T_4 = 0.01$
		2.	$T_1 = 0.05, \zeta_1 = 0.3,$ $T_2 = 0.1, \zeta_2 = 0.3, T_3 = T_4 = 0.05$
		3.	$T_1 = 0.05, \zeta_1 = 0.707,$ $T_2 = 0.07, \zeta_2 = 0.3, T_3 = T_4 = 0.1$
		4.	$T_1 = 0.05, \zeta_1 = 0.707, T_2 = 0.07,$ $\zeta_2 = 0.3, T_3 = T_4 = 0.05$
		5.	$T_1 = 0.05, \zeta_1 = 0.3, T_2 = 0.05,$ $\zeta_2 = 0.3, T_3 = T_4 = 0.1$

## Практическое занятие № 3. ОПИСАНИЕ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

### Цель работы

Целью работы является ознакомление с описанием и исследованием динамических систем управления в пространстве состояний.

### Постановка задачи

Даны математические модели трех систем и структурная схема, представляющая собой соединение этих систем. Необходимо:

- получить модель результирующей системы в пространстве состояний,
- исследовать наблюдаемость и управляемость трех подсистем в отдельности и их соединения в соответствии со схемой.

### Краткие сведения из теории

Многомерные системы, в отличие от одномерных имеют несколько входов и несколько выходов.

Для описания таких систем используются три набора параметров (три вектора), см. рис. 3.1:

1. вектор входных воздействий (управлений);
2. вектор переменных состояний;
3. вектор выходных параметров

и двумя преобразованиями:

1. преобразование «входы-состояния»;
2. преобразование «состояния-выходы».

Широкое распространение, обусловленное разработанным математическим аппаратом, получили линейные модели многомерных систем в пространстве состояний, которые имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t); \\ y(t) &= C(t)x(t);\end{aligned}\tag{3.1}$$

первое соотношение называется уравнением состояния, второе – уравнением выхода. Здесь  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$  – вектор переменных

состояний;  $u = (u_1, u_2, \dots, u_r)^T \in U \subseteq \mathbb{R}^n$  – вектор управлений;  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T \in \mathbb{R}^n$  – вектор измеряемых параметров;  $t$  – время;  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  – матрицы размерности  $(n \times n)$ ,  $(n \times r)$ ,  $(m \times n)$  соответственно. Предполагается, что известны начальные состояния  $x(t_0) = x_0$ , где  $t_0$  – начальный момент времени.

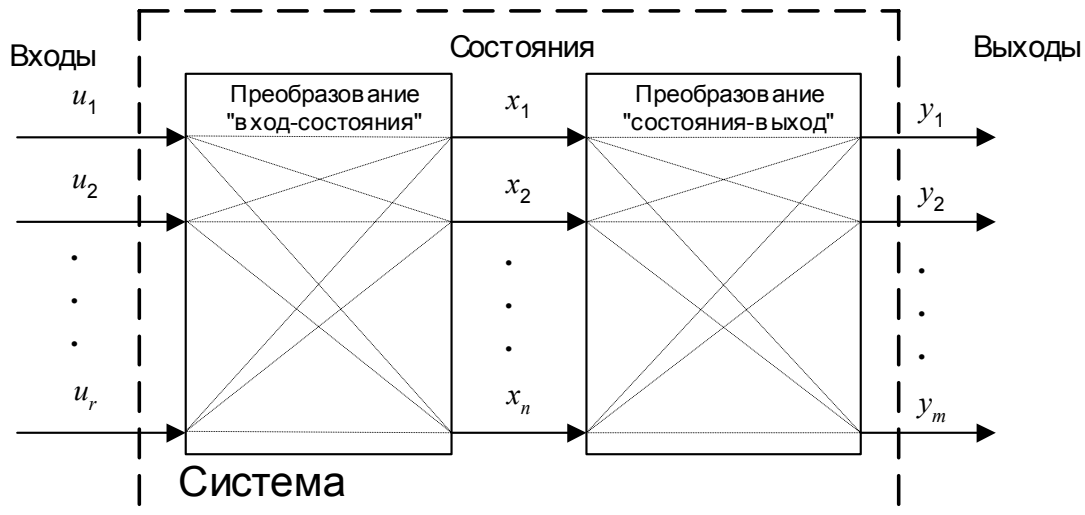


Рис. 3.1. Многомерные системы.

Если матрицы  $A(t)$ ,  $B(t)$ ,  $C(t)$  не зависят от времени  $t$ , то система называется стационарной. Далее предполагается, что системы стационарны.

Рассмотрим задачи соединения двух подсистем в систему. При соединении возможны три варианта (рис. 3.2): параллельное (а), последовательное (б) и в обратной связи (в). Предполагается, что обе системы описываются в пространстве состояний соотношениями:

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= A_1 x^1 + B_1 u^1; & y^1 &= C x^1; \\ \dot{x}^2 &= A_2 x^2 + B_2 u^2; & y^2 &= C x^2; \end{aligned}$$

где  $x^1$ ,  $u^1$ ,  $y^1$  – векторы состояний, управлений, выходов первой системы,  $x^2$ ,  $u^2$ ,  $y^2$  – второй. Необходимо по известным матрицам  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $A_2$ ,  $B_2$ ,  $C_2$  получить матрицы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  (рис. 3.2г).

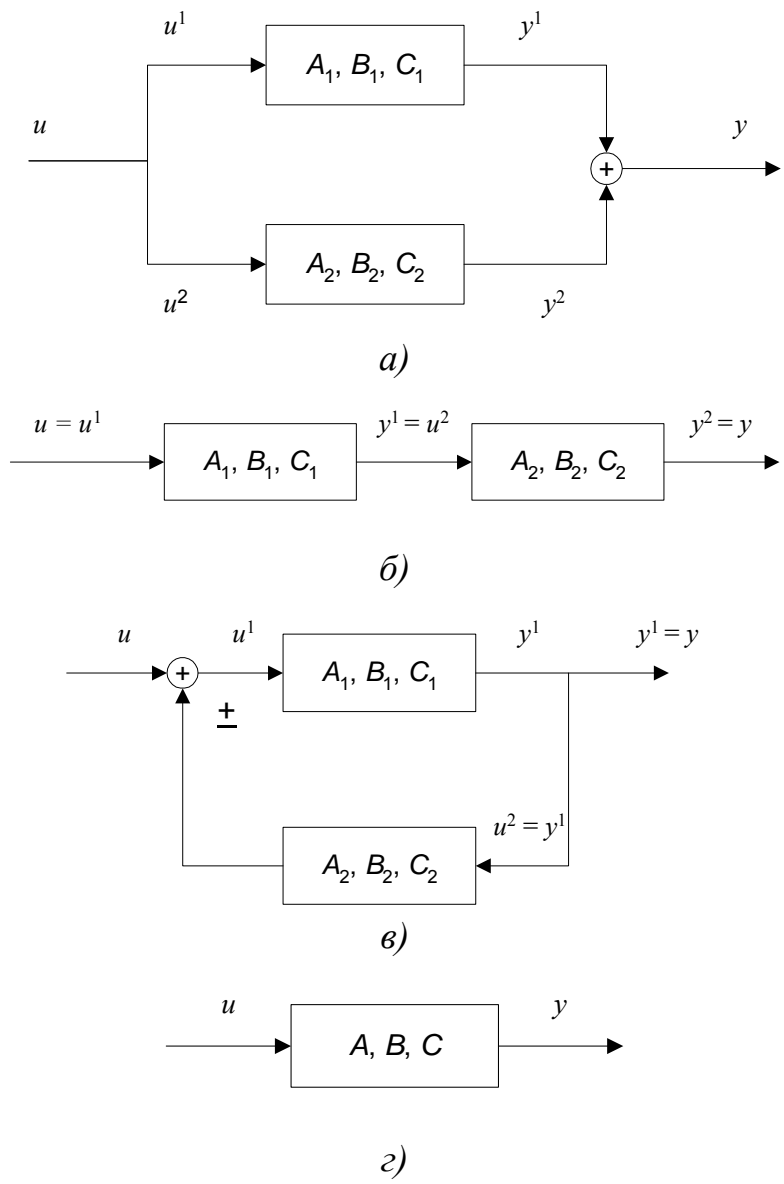


Рис. 3.2. Соединение двух систем.

1. Параллельное соединение.

Запишем уравнения системы, с учетом особенностей соединения, указанных на рис. 3.2.а.

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= A_1 x^1 + B_1 u; \\ \dot{x}^2 &= A_2 x^2 + B_2 u; \\ y &= C_1 x^1 + C_2 x^2; \end{aligned}$$

отсюда

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u;$$

$$y = (C_1 \quad C_2) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Окончательно матрицы соединения имеют вид –

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}; \quad C = (C_1 \quad C_2).$$

2. Последовательное соединение –

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= A_1 x^1 + B_1 u; \\ \dot{x}^2 &= A_2 x^2 + B_2 C_1 x^1; \\ y &= C_2 x^2; \end{aligned}$$

в матричном виде –

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u; \\ y &= (0 \quad C_2) \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

окончательно, имеем

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad C = (0 \quad C_2).$$

3. Обратная связь –

$$\begin{aligned} \dot{x}^1 &= A_1 x^1 + B_1 u \pm B_1 C_2 x^2; \\ \dot{x}^2 &= A_2 x^2 + B_2 C_1 x^1; \\ y &= C_1 x^1; \end{aligned}$$

в матричном виде –

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_1 & \pm B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} u; \\ y &= (C_1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \pm B_1 C_2 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad C = (C_1 \quad 0).$$

Для линейных систем легко показать справедливость следующего результата, называемого принципом суперпозиции: эффект, вызываемый суммой нескольких воздействий, равен сумме нескольких

воздействий, равен сумме эффектов от нескольких воздействий в отдельности. Закон изменения вектора состояний линейной системы представляется в виде суммы свободного и вынужденного колебания

$$x(t) = x_c(t) + x_g(t).$$

Свободное движение  $x_c(t)$  происходит при отсутствии внешнего воздействия в ненулевых начальных условиях. Оно определяется решением однородной системы уравнений, соответствующей исходному уравнению состояний

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t)$$

с начальными условиями  $x(t_0) = x_0$ .

Вынужденное движение  $x_g(t)$  – это реакция системы на внешнее воздействие  $u(t)$  при нулевых начальных условиях. Оно определяется решением неоднородного уравнения при нулевых начальных условиях.

Для многомерных нестационарных систем, описываемых соотношениями, поведение векторов состояния и выхода определяется по формулам

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (3.2)$$

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t C(t)\Phi(t, \tau)B(\tau)u(\tau)d\tau \quad (3.3)$$

где  $\Phi(t, \tau)$  – переходная матрица, или матрица Коши, являющаяся решением уравнения

$$\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} = A(t)\Phi(t, \tau), \quad (3.4)$$

с начальным условием  $\Phi(\tau, \tau) = E$ .

Первые слагаемые в (3.2), (3.3) описывают свободное движение, а вторые - вынужденное.

Для многомерных стационарных систем, описываемых уравнениями (3.1), законы изменения вектора состояния и вектора выхода находятся по формулам

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = C\Phi(t)x(0) + \int_{t_0}^t C\Phi(t - \tau)Bu(\tau)d\tau$$

где  $\Phi(t - \tau)$  – переходная матрица стационарной системы, зависящая от разности  $t - \tau$ . В данном случае решение уравнения (3.4) имеет вид

$$\Phi(t, \tau) = \Phi(t - \tau) = \exp[A(t - \tau)].$$

Одними из важнейших задач теории управления является исследование управляемости и наблюдаемости динамических систем. Приведем соответствующие определения и критерии для стационарных линейных систем, полученные Калманом.

Система называется вполне управляемой, если выбором управляющего воздействия  $u(t)$  на интервале времени  $[t_0, t_1]$  можно перевести систему из любого начального состояния  $x(t_0)$  в произвольное заранее заданное конечное состояние  $x(t_1)$ .

Система называется вполне наблюдаемой, если по реакции  $y(t_1)$  на выходе системы на интервале времени  $[t_0, t_1]$  при заданном управляющем воздействии  $u(t)$  можно определить начальное состояние  $x(t_0)$ .

*Критерий управляемости линейных систем.* Для того чтобы система была вполне управляемой, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы управляемости

$$M_U = (B \mid AB \mid A^2B \mid \dots \mid A^{n-1}B)$$

равнялся размерности вектора состояния:

$$\text{rank } M_U = n.$$

*Критерий наблюдаемости линейных систем.* Для того чтобы система была вполне наблюдаемой, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы наблюдаемости

$$M_Y = (C^T \mid A^T C^T \mid (A^T)^2 C^T \mid \dots \mid (A^T)^{n-1} C^T)$$

равнялся размерности вектора состояния:

$$\text{rank } M_Y = n.$$

Знак  $Z = (X \mid Y)$  означает присоединение матриц, т.е. для получения  $i$ -ой строки матрицы  $Z$  берется сначала  $i$ -ая строка матрицы  $X$ , затем следуют элементы  $i$ -ой строка матрицы  $Y$ . Предполагается, что количество строк у матриц одинаково.

Напомним, что под рангом матрицы подразумевается наивысший из порядков отличных от нуля миноров этой матрицы. Ранг матрицы равен наибольшему числу линейно независимых строк.

## **Последовательность выполнения**

В Control System Toolbox имеется тип данных, определяющих динамическую систему в пространстве состояний. Синтаксис команды,

создающий непрерывную LTI (Linear Time Invariant)-систему в виде ss-объекта с одним входом и одним выходом

$$SS(A, B, C, D)$$

В эту функцию в качестве параметров передаются матрицы уравнений состояний и выходов вида

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t);$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t);$$

в связи с тем, что рассматривается модель вида (3.1), то матрица динамики  $D$  будет нулевой.

Для выполнения работы могут применяться команды, приведенные в таблице 3.1.

Таблица 3.1. Некоторые команды Control System Toolbox

Синтаксис	Описание
ctrb(LTI-объект) ctrb(A, B)	Формирование матрицы управляемости
obsv(<LTI-объект>) obsv(A, C)	Формирование матрицы наблюдаемости
parallel(<LTI1>,<LTI2>)	Параллельное соединение
series(<LTI1>,<LTI2>)	Последовательное соединение
feedback(<LTI1>,<LTI2>)	Соединение обратной связью
append( <LTI1>, ..., <LTIN>)	Объединение систем
connect(<sys>,<Con>,<in>,<out>)	Установление связей в соединении

Для получения результатов вычисления матриц, результирующей системы, по структурной схеме, воспользуемся последними двумя командами.

Функция `append` создает объект `sys`, представляющий собой объединение всех подсистем. При этом первый входной сигнал первой системы становится входом номер 1, второй входной сигнал первой системы – номер 2, и т.д. далее идут входы второй системы, и т.д.; аналогично определяются и выходы.

В функции `connect` – параметр `<Con>` определяет матрицу связей по структурной схеме. Матрица формируется по следующему правилу:



каждая строка представляет собой один вход системы *sys*, первый элемент – номер входа (в соответствии с порядком в команде *append*), затем идут номера выходов, которые суммируются и подаются на рассматриваемый вход. Параметры *<in>*, *<out>* – строки из номеров входов и выходов соединения, являющиеся внешними.

Например, для последовательного соединения двух систем (рис. 2.б):

```
sys1= ss(A1, B1, C1, D1)
sys2= ss(A2, B2, C2, D2)
sys=append (sys1, sys2)
sysc=connect(sys, [2 1], [1], [2])
```

В этом случае на вход второй системы (общий вход номер 2), поступает выход первой (общий выход номер 1); вход первой системы (номер один) и выход второй системы (номер два) являются внешними.

Последовательность выполнения лабораторной работы следующая:

1. Ознакомиться с основными элементами теории.
2. Привести все системы в варианте в форму (3.1).
3. Запустить систему MATLAB.
4. Создать три *ss*-объекта, в соответствии с заданным вариантом.
5. Определить управляемость и наблюдаемость каждой системы.
6. В соответствии со структурной схемой получить матрицы *A*, *B*, *C* соединения.
7. Определить управляемость и наблюдаемость соединения.
8. Оформить отчет.

### Методический пример

Даны три линейные стационарные системы:

$$1. \begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases} ;$$

$$2. \begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2 ; \\ y^2 = (4 \ 3) x^2 \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \dot{x}^3 - 3x^3 - 2x^3 = 4u ; \\ y^3 = x^3 \end{cases}$$

и имеется структурная схема соединения систем:

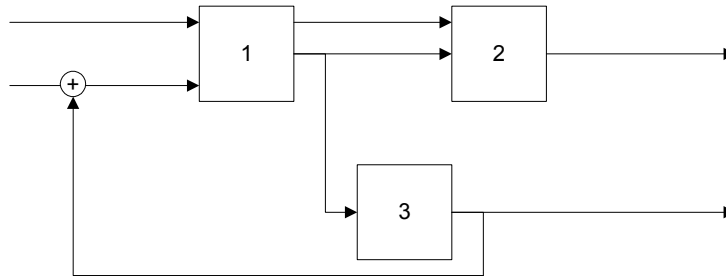


Рис. 3.3. Вариант задания.

1. Приведем систему 3 к виду (3.1), для этого введем переменные

$$x_1^3 = x^3$$

$$x_2^3 = \dot{x}_1^3 = \dot{x}^3$$

и, подставляя их в исходные уравнения, получим –

$$\begin{cases} \dot{x}_1^3 = x_2^3 \\ \dot{x}_2^3 - 3x_2^3 - 2x_1^3 = 4u^3 ; \\ y^3 = x_1^3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \dot{x}_1^3 = x_2^3 \\ \dot{x}_2^3 = 2x_1^3 + 3x_2^3 + 4u^3 ; \\ y^3 = x_1^3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = (1 \ 0) x^3 \end{cases} .$$

2. Создадим матрицы первой системы –

```
>> A1=[7 3; 2 1]
```

```
A1 =
```

```
    7    3
    2    1
```

```
>> B1=[1 0; 0 2]
```

```
B1 =
```

```
    1    0
    0    2
```

```
>> C1=[3 -2; 2 1]
```

```
C1 =
```

```
    3   -2
    2    1
```

Создавая, аналогично, матрицы двух других систем создадим ss-объекты:

```
>> s1=ss(A1, B1, C1,0)
```

```
a =  
      x1 x2  
x1    7  3  
x2    2  1
```

```
b =  
      u1 u2  
x1    1  0  
x2    0  2
```

```
c =  
      x1 x2  
y1    3 -2  
y2    2  1
```

```
d =  
      u1 u2  
y1    0  0  
y2    0  0
```

Continuous-time model.

```
>> s2=ss(A2, B2, C2,0)
```

```
a =  
      x1 x2  
x1    1  2  
x2    3  2
```

```
b =  
      u1 u2  
x1    1  5  
x2    2  1
```

```
c =  
      x1 x2  
y1    4  3
```

```
d =  
      u1 u2  
y1    0  0
```

Continuous-time model.

```
>> s3=ss(A3, B3, C3,0)
```

```
a =  
      x1  x2  
x1    0   1  
x2    2   3
```

```
b =  
      u1  
x1    0  
x2    4
```

```
c =  
      x1  x2  
y1    1   0
```

```
d =  
      u1  
y1    0
```

```
Continuous-time model.
```

3. Исследуем наблюдаемость и управляемость каждой системы, для чего построим соответствующие матрицы и посчитаем их ранги –

```
>> rank(ctrb(A1,B1))
```

```
ans =
```

```
2
```

```
>> rank(observ(A1,C1))
```

```
ans =
```

```
2
```

```
>> rank(ctrb(A2,B2))
```

```
ans =
```

```
2
```

```
>> rank(observ(A2,C2))
```

```
ans =
```

```
2
```

```

>> rank(ctrb(A3,B3))

ans =

     2

>> rank(observ(A3,C3))

ans =

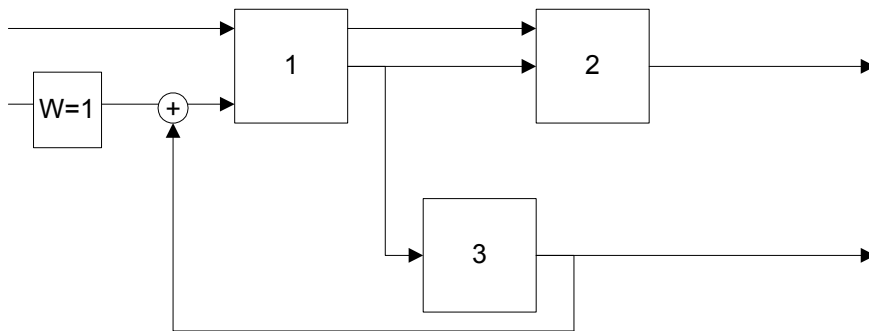
     2

```

Видно, что во всех случаях ранги матриц управляемости и наблюдаемости совпадают с размерностями пространства состояний.

4. Получим систему, определяемую соединением.

Для корректного использования функции connect введем дополнительную систему, передаточная функция которой равна 1 (рис).



*Рис. 3.4. Эквивалентная схема.*

```

>> s4 = tf(1)
Transfer function:
1
>> sys=append(s1,s2,s3,s4);
>> Q=[2 -4 5; 3 1 0; 4 2 0; 5 2 0];
>> in=[1 5];
>> out=[3 4];
>> s_com=connect(sys,Q, in,out);

```

Обращаясь к данным объекта, можно получить матрицы A, B, C:

```

>> A=s_com.A;
>> B=s_com.B;
>> C=s_com.C;

```

4. Вычислим ранги матриц наблюдаемости и управляемости итоговой системы:

```
>> rank(ctrb(A,B))
ans =
     6
>> rank(observ(A,C))
ans =
     6
```

Результаты показывают, что система управляема и наблюдаема.

## Отчет о работе

Отчет оформляется в соответствии с требованиями, предъявляемыми к оформлению работ в вузе, и должен содержать:

1. Титульный лист
2. Наименование и цель работы.
3. Результаты выполнения работы.
4. Анализ результатов и выводы.

## Контрольные вопросы

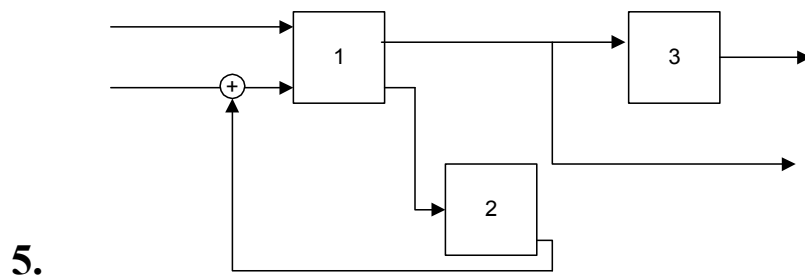
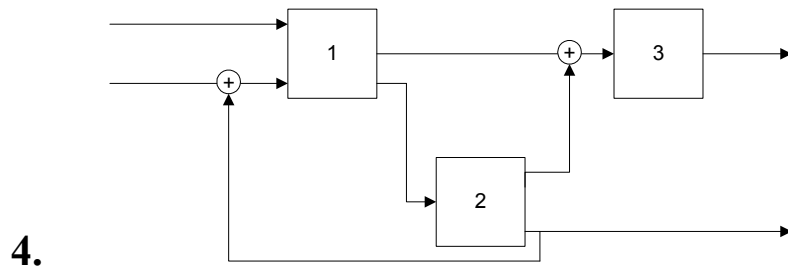
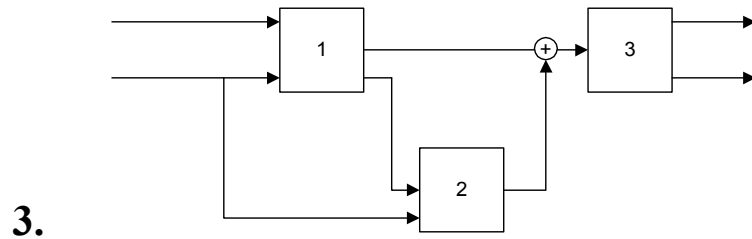
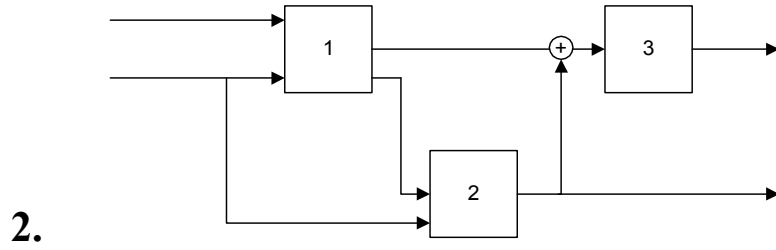
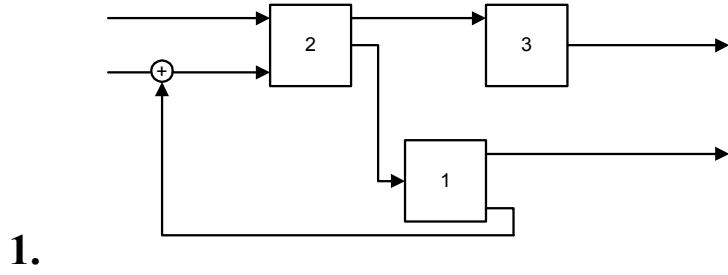
1. Дать определение и примеры состояний управляемой системы.
2. Показать на примере справедливость принципа суперпозиции.
3. Вывести уравнения в пространстве состояний для заданной схемы соединения трех систем.
4. Получить описание одномерной системы (1.1) в канонической форме Коши.
5. Провести анализ влияния размерности векторов управления и выходов на управляемость и наблюдаемость схемы.

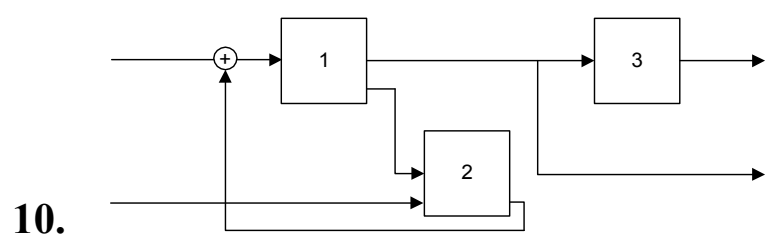
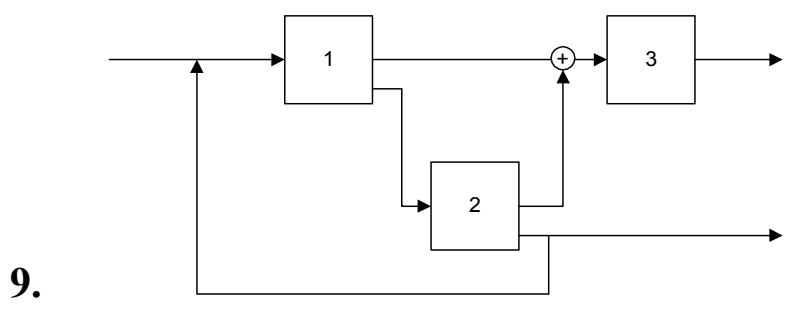
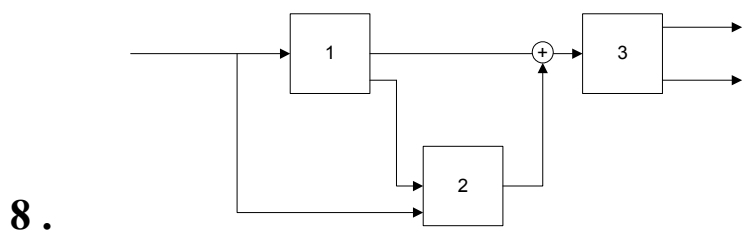
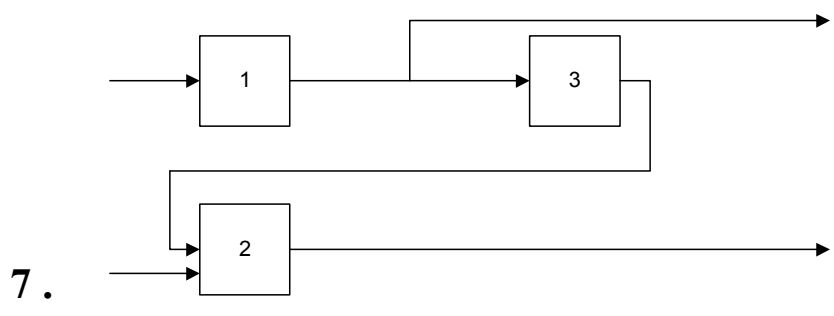
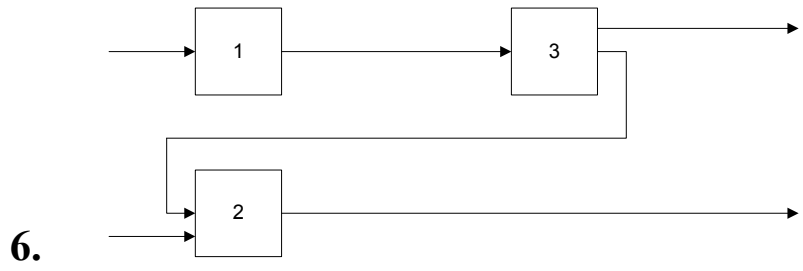


11	$1. \begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$ $2. \begin{cases} -\ddot{x}^3 + 3\dot{x}^3 - 2x^3 = 2u \\ y^3 = x^3 \end{cases}$ $3. \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$	5
12	$1. \begin{cases} -\ddot{x}^3 + 2\dot{x}^3 - x^3 = 4u \\ y^3 = x^3 \end{cases}$ $2. \begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$ $3. \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$	7
13	$1. \begin{cases} \ddot{x}^3 + 2\dot{x}^3 - x^3 = -2u \\ y^3 = x^3 \end{cases}$ $2. \begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$ $3. \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$	6
14	$1. \begin{cases} \dot{x}_1^1 = 2x_2^1 + u \\ \dot{x}_2^1 = -x_1^1 + 3x_2^1 - u \\ y_1^1 = x_1^1 \\ y_2^1 = x_1^2 - 2x_2^1 \end{cases}$ $2. \begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$ $3. \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$	8
15	$1. \begin{cases} \dot{x}_1^1 = -2x_2^1 + 2u \\ \dot{x}_2^1 = -x_1^1 + 3x_2^1 - u \\ y_1^1 = -x_1^1 \\ y_2^1 = x_1^2 - 2x_2^1 \end{cases}$ $2. \begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} -4 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$ $3. \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$	8
16	$1. \begin{cases} \dot{x}^1 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} u^1 \\ y^1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x^1 \end{cases}$ $2. \begin{cases} \dot{x}_1^2 = 3x_1^2 - 2x_2^2 + 3u \\ \dot{x}_2^2 = -x_1^2 + 3x_2^2 - u \\ y_1^2 = -x_1^1 \\ y_2^2 = x_1^2 - x_2^1 \end{cases}$ $3. \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$	9
17	$1. \begin{cases} \dot{x}_1^1 = x_1^1 + 4x_2^1 + 3u \\ \dot{x}_2^1 = -x_1^1 + 3x_2^1 - 2u \\ y_1^1 = -x_1^1 + 2x_2^1 \\ y_2^1 = x_1^2 - x_2^1 \end{cases}$ $2. \begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$ $3. \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 14 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$	10
18	$1. \begin{cases} \dot{x}_1^1 = x_1^1 - 4x_2^1 + 3u \\ \dot{x}_2^1 = -x_1^1 + 3x_2^1 - 4u \\ y_1^1 = -x_1^1 + 5x_2^1 \\ y_2^1 = x_1^2 - x_2^1 \end{cases}$ $2. \begin{cases} \dot{x}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} u^2 \\ y^2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$ $3. \begin{cases} \dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} u^3 \\ y^3 = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x^2 \end{cases}$	8



## Структурные схемы к вариантам





## Практическое занятие № 4. УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

### Цель работы

Ознакомление с критериями устойчивости и выявление у заданной управляемой линейной системы с полной обратной связью свойства асимптотической устойчивости.

### Постановка задачи

Задана система управления, описываемая конечно-разностными уравнениями в пространстве состояний

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad (k = \overline{0, N}), \quad (4.1)$$

и известна матрица  $K$ , определяющая закон управления  $u = Kx$ .

Требуется определить асимптотическую устойчивость систему с полной обратной связью.

### Краткие сведения из теории

Система управления называется устойчивой по Ляпунову, если при ненулевых ограниченных начальных условиях свободное движение ограничено.

Согласно определению, система (4.1) асимптотически устойчива, если для любого начального состояния  $x(0) = x_0$ , ее решение  $x(k, x_0)$  стремится к нулю по норме, при  $k \rightarrow \infty$ .

Существует большое количество критериев, являющихся достаточным условием устойчивости. Для линейных систем устойчивость системы являются асимптотически устойчивыми.

Для того, что бы система (4.1) была асимптотически устойчива, необходимо, что все собственные числа матрицы  $A + BL$  по модулю меньше единицы. По определению, собственными числами  $\lambda$  матрицы  $A + BL$  являются корни характеристического уравнения  $\det(\lambda E - [A + BL])$ . Здесь  $E$  – единичная матрица.

Мощным инструментом исследования устойчивости динамических систем является метод функций Ляпунова. Для линейных автономных систем существование функции Ляпунова в виде квадратичной формы является одновременно необходимым и достаточным условием равномерной асимптотической устойчивости в целом.

Рассмотрим линейную стационарную систему

$$\dot{x} = Ax \quad (4.2)$$

Допустим, что нам удалось найти функцию Ляпунова:  $V(x)=x^T Qx$ , где  $Q$  – симметричная и положительная определенная матрица. Тогда

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T Qx + x^T Q\dot{x} = x^T A^T Qx + x^T QA x = x^T (A^T Q + QA)x \quad (4.3)$$

Обозначим

$$A^T Q + QA = -C, \quad (4.4)$$

тогда, поскольку  $C$  положительно определена, то система асимптотически устойчива в целом. Более того, т.к.

$$C^T = -(A^T Q + QA)^T = -(Q^T A + A^T Q^T) = -(QA + A^T Q) = -C,$$

то матрица  $C$  симметрична.

На практике целесообразно решать обратную задачу. Выбирают какую-либо положительно определенную положительную матрицу, например  $C = I$ . Тогда из (4.4) можно получить  $Q$ . Если квадратичная форма  $Q$  оказывается неопределенной (знакопеременной), то по теореме Ляпунова о неустойчивости начало координат неустойчиво. Если  $Q$  положительно определена, то поскольку система линейна и стационарна, начало координат асимптотически устойчиво в целом. Обоснованность такого анализа зависит от того, определяет ли уравнение (4.4) однозначно матрицу  $Q$ , если задана симметричная и положительная  $C$ .

Справедливы следующие утверждения:

1. Если  $n$  собственных значений  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  матрицы  $A$  таковы, что  $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$  ( $i, j = \overline{1, n}$ ), то из уравнения (4.4) при заданной матрице  $C$  матрица  $Q$  определяется однозначно. (Достаточное условие устойчивости матрицы  $A$ ).

2. Если матрица  $A$  устойчива и матрица  $C$  положительно определена, то матрица  $Q$  также положительно определена. (Необходимое условие устойчивости матрицы  $A$ ).

Система (4.1) асимптотически устойчива в том и только том случае, если решение  $\Gamma$ , являющееся  $(n \times n)$ -матрицей, уравнения Ляпунова

$$(A + BL)^T \Gamma (A + BL) - \Gamma = -H, \quad (4.5)$$

является положительно-определенной матрицей. Здесь  $H$  – произвольная положительно-определенная симметричная матрица. Для определенности в уравнении (4.5) матрицу  $H$  можно положить единичной.

Для установления положительной определенности симметричной матрицы  $\Gamma$  можно воспользоваться критерием Сильвестра:  $\Delta_i > 0$  для  $i = \overline{1, n}$ , где  $\Delta_i$  – миноры  $i$ -го порядка матрицы  $\Gamma$ .

Для определения асимптотической устойчивости линейных систем можно воспользоваться критерием Раусса-Гурвица. Согласно этому критерию, система (4.2) является устойчивой, если все миноры матрицы Гурвица были положительны. Матрица Гурвица имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Здесь  $a_i$  – коэффициенты характеристического полинома матрицы  $A$ :

$$\det(\lambda E - A) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0.$$

Асимптотическая устойчивость определяется аналогично, только вместо матрицы  $A$  берется матрица  $A+BL$ .

## Последовательность выполнения работы

Для определения асимптотической устойчивости линейных стационарных систем в Control System Toolbox имеются команды, приведенные в таблице 4.1.

Таблица 4.1. Команды  
Control System Toolbox

Синтаксис	Описание
$Q = \text{luyar}(A, C)$	Решение непрерывных уравнений Ляпунова
$Q = \text{luyar}(A, X, Y)$	Решение непрерывных обобщенных уравнений Ляпунова (уравнений Сильвестра)
$\Gamma = \text{dlyar}(A, H)$	Решение дискретных уравнений Ляпунова

Функция

$$Q = \text{luyar}(A, C)$$

находит решение системы уравнений Ляпунова вида (4.4).

Функция

$$Q = \text{luyar}(A, X, Y)$$

находит решение уравнений Сильвестра (обобщенных уравнений Ляпунова) вида:

$$A\Gamma + \Gamma X - Y = 0.$$

Функции решения непрерывных уравнений Ляпунова выдают результат только в случае единственности решения, т.е. в случае, когда собственные значения  $\lambda_1^1, \dots, \lambda_n^1$ , матрицы  $A$  и собственные значения  $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ , матрицы  $X$  для всех  $(i, j)$  удовлетворяют условию

$$\lambda_i^1 + \lambda_j^2 \neq 0.$$

Функция

$$\Gamma = \text{dlyar}(A, H)$$

находит решение системы уравнений Ляпунова вида (4.5). Результат решения уравнений Ляпунова для дискретных систем выдается только в случае единственности решения, т.е., когда собственные значения  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , матрицы  $A$  для всех  $(i, j)$  удовлетворяют условию

$$\lambda_i \lambda_j \neq 1.$$

Таким образом, выполнение лабораторной работы состоит из следующих шагов:

1. Изучить теоретические сведения.
2. Запустить систему MATLAB.
3. Создать ss-объекта, в соответствии с заданным вариантом.
4. Определить устойчивость системы.
5. Определить устойчивость системы с полной обратной связью.
6. Построить графики динамики системы при ненулевых начальных условиях.
7. Оформить отчет.
8. Сдать отчет преподавателю и защитить лабораторную работу.

### Методический пример

Задана система управления, описываемая конечно-разностными уравнениями в пространстве состояний

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \quad (k = \overline{0, N}),$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

и известна матрица  $K$ , определяющая закон управления  $u = Kx$ ,

$$K = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Зададим матрицы, определяющие систему:

```
>> A=[1 2; -3 4]
```

```
A =
```

```
     1     2
    -3     4
```

```
>> B= [1 2]'
```

```
B =
```

```
     1
     2
```

```
>> L=[2 1]
```

```
L =
```

```
     2     1
```

## 2. Определим решение уравнения Ляпунова

```
>> G=dlyap(A, eye(2))
```

```
G =  
-0.2211    -0.1215  
-0.1215    -0.1285
```

## 3. Произведем расчет главных миноров

```
>> det(G(1:1, 1:1))
```

```
ans =
```

```
-0.2211
```

```
>> det(G)
```

```
ans =
```

```
0.0136
```

По критерию Сильвестра решение не является положительно-определенной матрицей, следовательно, система не является асимптотически устойчивой. График свободного движения системы при начальных условиях  $x = (x_1, x_2) = (2, 1)$  показан на рис. 4.1 и 4.2.

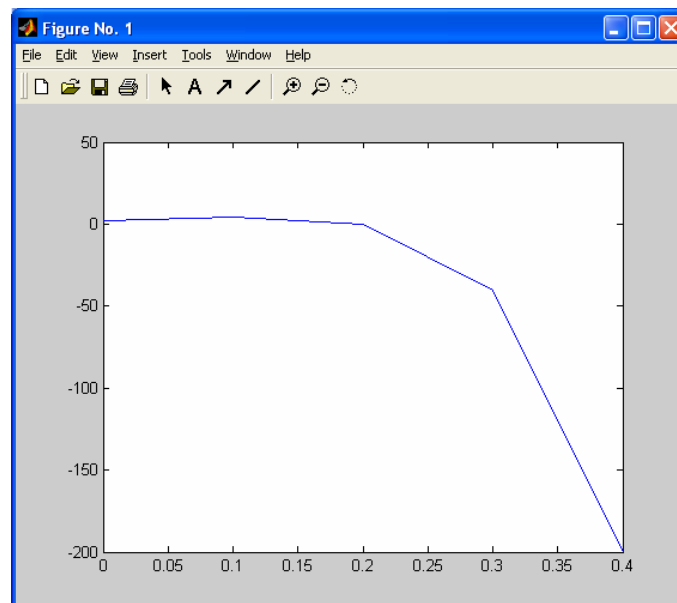


Рис. 4.1.  $x_1(k)$ .



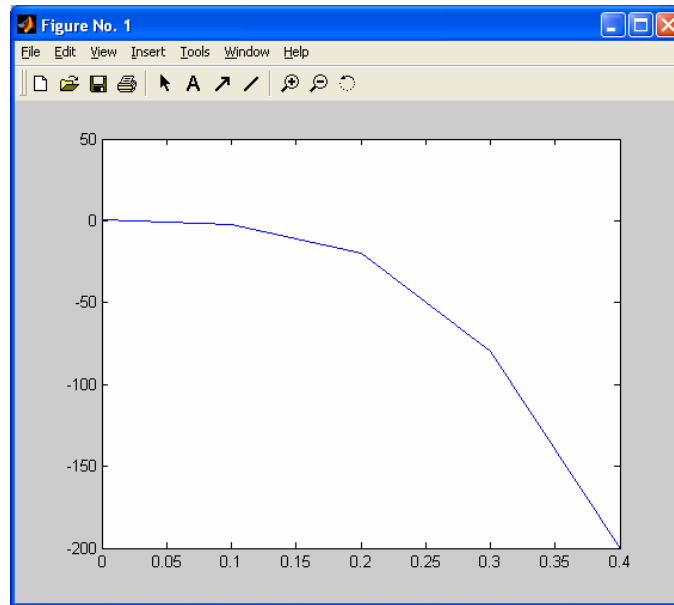


Рис. 4.2.  $x_2(k)$ .

4. Аналогично можно определить свойство асимптотической устойчивости в управляемой системе.

```
>> G=dlyap(A+B*L, eye(2))
```

```
G =
    -0.2563    0.0833
     0.0833   -0.0498
```

```
>> det(G)
```

```
ans =
     0.0058
```

```
>> det(G(1:1, 1:1))
```

```
ans =
    -0.2563
```

По критерию Сильвестра решение дискретного уравнения Ляпунова не является положительно-определенной матрицей, следовательно, система не является асимптотически устойчивой.

5. Приведем текст script-файла для определения устойчивости матрицы X на основе использования метода Раусса-Гурвица.

```

%получение коэффициентов характеристического полинома
lm= poly(X);
%определение размерности
[L, N] =size(lm);
%создание матрицы с нулевыми значениями
g=zeros(N, N);
%заполнение нечетных строк матрицы Гурвица
s=0;
for i=1:2:N
    j=1;
    j=j+s;
    r=0;
    for r=2:2:N
        g(i, j)=lm(r);
        j=j+1;
    end
    s=s+1;
end
%заполнение четных строк матрицы Гурвица
s=0;
for i=2:2:N
    j=1;
    j=j+s;
    r=0;
    for r=1:2:N
        g(i, j)=lm(r);
        j=j+1;
    end
    s=s+1;
end
g=g(1:N-1, 1:N-1);
%вычисление главных миноров
minor=1;
for i=1:N-1
    dd = det(g(1:i, 1:i));
    if dd<0
        minor=0;
    end
end
%вывод результатов
if minor==0
    disp('СИСТЕМА НЕ УСТОЙЧИВА');
else
    disp('СИСТЕМА УСТОЙЧИВА');
end
end

```

Результат вычисления показывает, что система управления не является асимптотически устойчивой.

График динамики управляемой системы при начальных условиях  $x = (x_1, x_2) = (2, 1)$  показан на рис. 4.3 и 4.4.

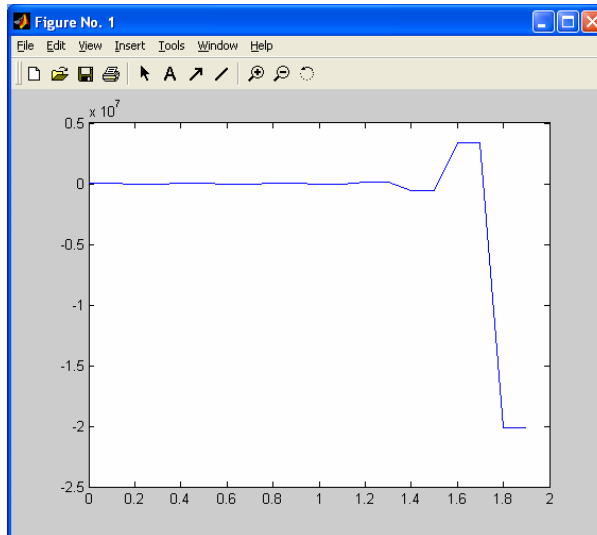


Рис. 4.3.  $x_1(k)$ .

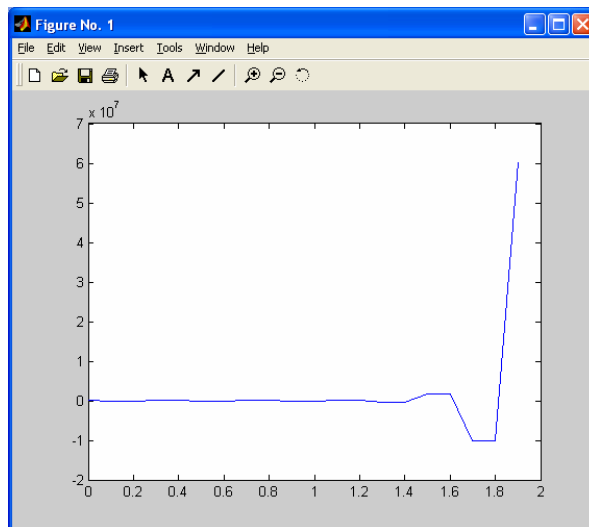


Рис. 4.4..  $x_2(k)$ .

Полученные графики динамики системы иллюстрируют полученный аналитический результат о неустойчивости системы.

## **Отчет о работе**

Отчет оформляется в соответствии с требованиями, предъявляемыми к оформлению лабораторных работ в вузе, и должен содержать:

1. Титульный лист
2. Наименование и цель работы.
3. Порядок и результаты определения асимптотической устойчивости заданной системы и системы с управлением с полной обратной связью методами функций Ляпунова и Раусса-Гурвица.
4. Анализ результатов и выводы.

## **Контрольные вопросы**

1. Дать определение устойчивости Ляпунова и асимптотической устойчивости.
2. Покажите, что для линейных систем всегда можно найти функцию Ляпунова.
3. Постройте матрицу Гурвица и примените критерий Раусса-Гурвица для определения устойчивости типовых звеньев САУ.
4. Выясните, существуют ли связь между переходной характеристикой системы и свойством асимптотической устойчивости.
5. Используя технику приведения матриц к канонической форме Фробениуса, получите критерий Раусса-Шура.

## Варианты заданий

№№	Уравнения систем	L
1.	$\dot{x} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}u$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \end{pmatrix}$
2.	$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}u$	$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
3.	$\dot{x} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}u$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
4.	$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}u$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}$
5.	$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}u$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}$
6.	$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}u$	$\begin{pmatrix} -0.2 & -1 \end{pmatrix}$
7.	$\dot{x} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}u$	$\begin{pmatrix} -4 & -3 \end{pmatrix}$
8.	$\dot{x} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}u$	$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$
9.	$\dot{x} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}u$	$\begin{pmatrix} 32 & 10 \end{pmatrix}$
10.	$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}u$	$\begin{pmatrix} 7 & 9 \end{pmatrix}$
11.	$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}u$	$\begin{pmatrix} 3 & -8 \end{pmatrix}$
12.	$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}u$	$\begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$
13.	$\dot{x} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}x + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}u$	$\begin{pmatrix} 5 & -1 \end{pmatrix}$
14.	$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 + u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 3x_2 - u \end{cases}$	$\begin{pmatrix} -1 & 10 \end{pmatrix}$
15.	$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_2 + 2u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 8x_2 - 2u \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 2 & 9 \end{pmatrix}$
16.	$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_1 - 2x_2 + 7u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 3x_2 - u \end{cases}$	$\begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix}$

17.	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 4x_2 + 3u \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 3x_2 - 2u \end{cases}$	(21 -1)
18.	$\dot{x}^3 = \begin{pmatrix} -4 & 12 \\ 18 & -2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} u^3$	(12 -8)
19.	$\dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} u^3$	(-4 8)
20.	$\dot{x}^3 = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ -7 & -2 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} u^3$	(-2 -3)
21.	$\dot{x} = \begin{pmatrix} -9 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} u$	(3 -8)
22.	$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 9 & 2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & -8 \end{pmatrix} u$	$\begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$
23.	$\dot{x} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 7 & -3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} u$	(5 -1)
24.	$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + 2u \\ \dot{x}_2 = -1x_1 + 3x_2 - 6u \end{cases}$	(-1 10)
25.	$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 3x_2 + 7u \\ \dot{x}_2 = -2x_1 + 4x_2 - 8u \end{cases}$	(2 9)

## Практическое занятие № 5. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

### Цель работы

Ознакомление с методикой построения линейных оптимальных систем управления с полной обратной связью методом динамического программирования Беллмана.

### Постановка задачи

Математическая модель системы, описывающая поведение объекта управления, имеет вид

$$\begin{aligned}x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k), \\ y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k) \\ k &= 0, 1, \dots, N-1,\end{aligned}\tag{5.1}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0,\tag{5.2}$$

задан функционал качества управления –

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)\tag{5.3}$$

где  $Q(k)$ , – неотрицательно определенная симметрическая матрица размера  $(n \times n)$ ,  $R(k)$  – положительно определенная симметрическая матрица  $(q \times q)$ .

Требуется найти управление  $u^*(k, x)$  с полной обратной связью, минимизирующее функционал (5.3).

### Краткие сведения из теории

Пусть поведение модели объекта управления описывается обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),\tag{5.4}$$

где  $x$  – вектор состояния системы,  $x \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{R}^n$  –  $n$ -мерное евклидово пространство;  $u$  – вектор управления, и  $u \in U \subset \mathbf{R}^n$ ,  $U$  – некоторое

заданное множество допустимых значений управления,  $t \in T = [t_0, t_1]$  – интервал времени функционирования системы, моменты начала процесса  $t_0$  и окончания процесса  $t_1$  заданы,  $f(t, x, u): T \times \mathbf{R}^n \times U \rightarrow \mathbf{R}^n$ .

Задан функционал качества управления

$$J = \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, x(t), u(t))dt + F(x(t_1)), \quad (5.5)$$

где  $f^0(t, x, u)$ ,  $F(x)$  – заданные непрерывно дифференцируемые функции. Предполагается, что при управлении используется информация о текущем времени и векторе состояния  $x$ .

Применяемое в каждый момент времени  $t \in T$  управление имеет вид управления с полной связью по всем переменным вектора состояния (рис. 5.1).

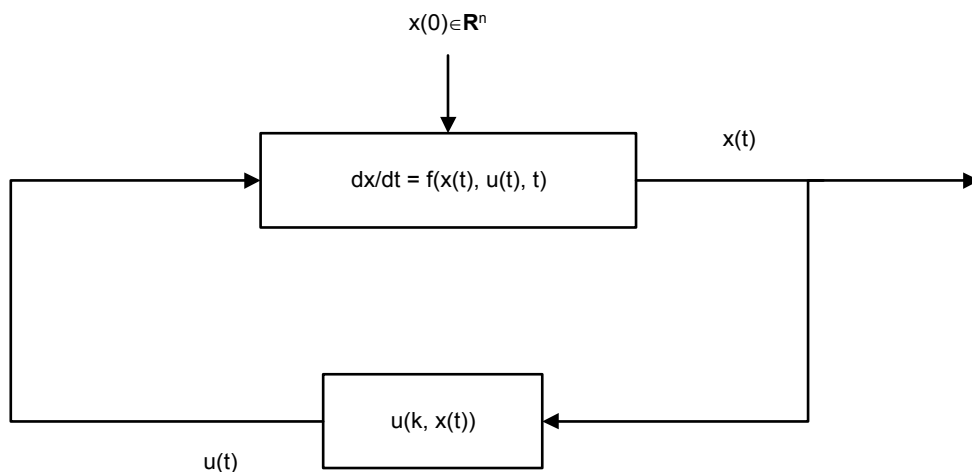


Рис.5.1. Схема управления с полной обратной связью по вектору состояния.

Требуется найти такую функцию  $u^*(t, x) \in U_n$ , что

$$J = \min_{u \in U} J, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}^n. \quad (5.6)$$

Функция  $u^*(t, x) \in U_n$  называется оптимальным управлением с полной обратной связью. Для любого начального состояния  $x_0$  из множества  $\mathbf{R}^n$  она порождает соответствующую оптимальную пару, т.е. оптимальную траекторию  $x^*(\cdot)$  и оптимальное программное управление  $u^*(\cdot)$ .

Достаточным условием минимума функционала (5.5) является уравнение Беллмана для непрерывных детерминированных систем.



Если существуют функция  $\phi(t, x) \in C^{1,1}$ , удовлетворяющая уравнению Беллмана с граничным условием:

$$\max_{u \in U} \left\{ \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right\} = 0, \quad \forall(t, x), \quad (5.7)$$

$$\phi(t_1, x) = -F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

и управление  $u^*(t, x) \in U_n$ , удовлетворяющее условию

$$u^*(t, x) = \arg \max_{u \in U} \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right\},$$

то  $u^*(t, x)$  является оптимальным управлением с полной обратной связью. При этом минимальное значение функционала (5.5)

$$\min_u J = -\phi(t_0, x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n. \quad (5.8)$$

Пусть система, описывающая поведение модели объекта управления, имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + B(t)u(t), \\ y(t) &= C(t)x(t) + D(t)u(t) \end{aligned} \quad (5.9)$$

Пусть функционал качества управления квадратичный:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} [x^T(t)S(t)x(t) + u^T(t)Q(t)u(t)] dt + \frac{1}{2} x^T(t_1)\Lambda x(t_1) \quad (5.10)$$

где  $S(t)$ ,  $\Lambda$  - неотрицательно определенные симметрические матрицы размера  $(n \times n)$ , а  $Q(t)$  - положительно определенная симметрическая матрица  $(q \times q)$ .

Используем известные правила и обозначения :

$$1. \frac{\partial(Ax)}{\partial x} = A^T; \quad 2. \frac{\partial(x^T Ax)}{\partial x} = Ax + A^T x; \quad 3. (AB)^T = B^T A^T;$$

$$4. x^T Ax \equiv 0 \Leftrightarrow A + A^T = 0; \quad 5. \operatorname{tr} A = \sum_i a_{ii}.$$

Уравнение Беллмана для данной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \max_{u \in R^q} \left\{ \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial t} + \left( \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \right)^T [A(t)x + B(t)u] - \frac{1}{2} [x^T(t)S(t)x(t) + u^T(t)Q(t)u(t)] \right\} &= 0, \\ \phi(t_1, x) &= -\frac{1}{2} x^T \Lambda x \end{aligned} \quad (5.11)$$

Отсюда

$$u^*(t, x) = \arg \max_{u \in U} \left\{ \left( \frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x} \right)^T B(t)u - \frac{1}{2} u^T(t)Q(t)u(t) \right\}.$$

Найдем максимум в последнем выражении по управлению с использованием необходимых условий экстремума и правила 1-3. Дифференцируя выражение в квадратных скобках по  $u$  и приравнявая результат нулю, получаем структуру оптимального управления:

$$u^*(t, x) = Q^{-1}(t)B^T(t) \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t}. \quad (5.12)$$

Решение уравнения (5.11) ищется в виде

$$\varphi(t, x) = \frac{1}{2} x^T K_2 x, \quad (5.13)$$

где  $K_2(t)$  - неизвестная симметрическая матрица ( $n \times n$ ).

Подставляя (5.13) в уравнение (5.11), приравнявая нулю квадратичные формы, получаем:

$$\begin{aligned} \dot{K}_2(t) &= -A^T(t)K_2(t) - K_2(t)A(t) - K_2(t)B(t)Q^{-1}(t)B^T(t)K_2(t) + S(t), \\ K_2(t_1) &= -\Lambda \end{aligned} \quad (5.14)$$

Решая уравнение Риккати (5.14), можно получить явный вид оптимального управления (5.12) с полной обратной связью

$$u^*(t, x) = Q^{-1}(t)B^T(t)K_2(t). \quad (5.15)$$

Минимальная величина функционала вычисляется по формуле

$$\min J = -\varphi(t_0, x_0) = -\frac{1}{2} x_0^T K_2(t_0) x_0.$$

Рассмотрим дискретный случай

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k)x(k) + B(k)u(k), \\ y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k) \\ k &= 0, 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (5.16)$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, \quad (5.17)$$

и функционалом качества

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} (x^T(k)Q(k)x(k) + u^T(k)R(k)u(k)) + (x^T(N)\Lambda x(N)) \quad (5.18)$$

где  $Q(k)$ ,  $\Lambda$  – неотрицательно определенные симметрические матрицы размера ( $n \times n$ ),  $R(k)$  - положительно определенная симметрическая матрица ( $q \times q$ ).

Требуется найти управление  $u^*(k, x)$  с полной обратной связью, минимизирующее функционал (5.19).

Уравнение Беллмана принимают вид

$$B(k, x) = \min_u [x^T Q(k)x + u^T R(k)u + B(k+1, A(k)x + B(k)u)] \quad (5.19)$$

Функция Беллмана  $B(k, x)$  ищется в форме

$$B(k, x) = x^T P(k)x, \quad (5.20)$$

где  $P(k)$  – где неизвестная неотрицательно определенная симметрическая матрица размера  $(n \times n)$ .

Подставляя (5.20) в (5.19) получаем, что в задаче (5.16)–(5.18) оптимальное управление определяется соотношением

$$u^*(k, x) = -K(k)x, \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (5.21)$$

где  $K(k)$  - матрица коэффициентов усиления регулятора размера  $(q \times n)$

$$K(k) = [R(k) + B^T P(k+1)B(k)]^{-1} B^T(k) P(k+1) A(k), \quad k = \overline{0, N-1}, \quad (5.22)$$

а матрица  $P(k)$  размера  $(n \times n)$  удовлетворяет уравнению

$$P(k) = Q(k) + K^T(k)R(k)K(k) + [A(k) - B(k)K(k)]^T P(k+1) [A(k) - B(k)K(k)],$$

$$k = \overline{N-1, 0},$$

$$P(N) = \Lambda. \quad (5.23)$$

Минимальная величина функционала определяется по формуле

$$\min J = x_0^T P(0)x_0. \quad (5.24)$$

Структурная схема регулятора системы управления с обратной связью по всем переменным состояния изображена на рис 5.2.

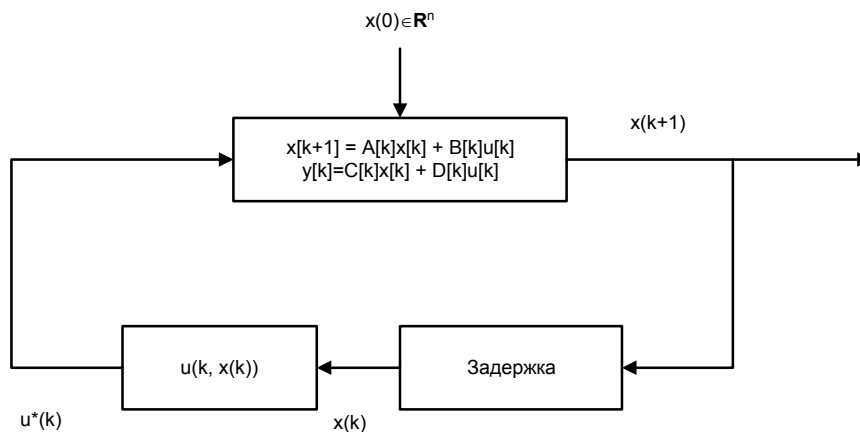


Рис. 5.2. Схема регулирования.

Для каждого начального состояния  $x_0$  оптимальный линейный регулятор порождает оптимальное программное управление  $u^*(x, k)$  и оптимальную траекторию  $x^*(k)$ .

## Последовательность выполнения

Для синтеза оптимальных регуляторов линейных стационарных систем в Control System Toolbox имеются функции решений уравнений Беллмана (табл. 5.1).

Таблица 5.1. Функции Control System Toolbox

Синтаксис	Описание
[K P e] = lqr(A, B, Q, S)	Синтез непрерывного регулятора
[K P e] = lqr(A, B, Q, S, N)	Синтез непрерывного регулятора
[K P e] = dlqr(A, B, Q, R)	Синтез дискретного регулятора
[K P e] = dlqr(A, B, Q, R, N)	Синтез дискретного регулятора
[K P e] = lqrd(A, B, Q, R, Ts)	Синтез дискретного регулятора
[K P e] = lqrd(A, B, Q, R, N, Ts)	Синтез дискретного регулятора

Функция `lqr` вычисляет матрицу коэффициентов регулирования  $K$  со среднеквадратичным функционалом качества без терминального члена:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [x^T Q x + u^T S u + 2x^T N u] dt,$$

при этом вычисляются матрица  $P$ , являющаяся решением уравнения Риккати и собственные значения  $e$  матрицы  $(A - BK)$ .

Функция `dlqr` вычисляет матрицу коэффициентов регулирования по всем переменным состояния  $K$  для дискретной системы со среднеквадратичным функционалом качества без терминального члена:

$$J = \sum_{k=0}^{N-1} (x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k) + x^T(k) N u(k)),$$

при этом вычисляются матрица  $P$ , являющаяся решением уравнения Риккати и собственные значения  $e$  матрицы  $(A - BK)$ .

Функция `lqrd` предназначена для синтеза оптимального дискретного регулятора непрерывной системы со среднеквадратичным функционалом качества:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [x^T Q x + u^T S u + 2x^T N u] dt.$$

В качестве параметра в функцию передается шаг дискретизации  $T_s$ , возвращаются значения матрицы  $K$  дискретного управления, матрица  $P$ , являющаяся решением уравнения Риккати и собственные значения  $e$  матрицы системы управления, полученный в результате дискретизации.

При использовании всех команд синтеза оптимального линейного регулятора по всем переменным состояниям на исходные данные накладываются следующие ограничения:

- система, определяемая матрицами  $(A, B)$  должна быть стабилизируема;
- должны выполняться неравенства  $S > 0, Q - NR^{-1}N^T > 0$ ,
- пара матриц  $(Q - NR^{-1}N^T, A - BR^{-1}B^T)$  не должна иметь наблюдаемые моды с собственными значениями на действительной оси.

Для выполнения практической работы необходимо выполнить следующие действия:

1. Изучить теоретические сведения.
2. Запустить систему MATLAB.
3. Создать ss-объекта, в соответствии с заданным вариантом.
4. Определить матрицы  $P(k), K(k)$ .
5. Построить оптимальный регулятор  $u^*(k, x) = -K(k)x$ .
6. Определить значение функционала на оптимальном управлении.
7. Построить графики динамики системы при ненулевых начальных условиях.
8. Ответить на контрольные вопросы.
9. Оформить отчет и защитить работу.

## Методический пример

Ниже приведен пример script-файла, моделирующего систему управления и синтез оптимального регулятора.

```
% Параметры системы
A=[1 0; -2 1];
B=[1 0; 1 0]';

% Параметров критерия качества управления
Q=[1/2 0; 0 1/2];
```

```

R=[1/2 0; 0 1/2];

% Время регулирования
T=10;
% Величина шага
SS=0.5;
% Количество шагов
N=T/SS

% Вычисление параметров регулятора
[k p e]= dlqr(A, B, Q, R)

x = zeros(2, N);
u= zeros(2, N-1);

% Начальные условия
x(1,1)=2;
x(2,1)=1;

% Построение графиков динамики системы
for i=1:N-1,
    u(:, i)= - k*x(:, i);,
    x(:, i+1)=A*x(:, i)+B*u(:, i);
end

x1= x(1,:);
x2= x(2,:);
t = 0:SS:T-SS;

subplot(4, 1, 1);
plot(t, x1, 'b');
subplot(4, 1, 2);
plot(t, x2, 'g');

subplot(4, 1, 3);
plot(SS:SS:T-SS, u(1, :), 'y');

subplot(4, 1, 4);
plot(SS:SS:T-SS, u(2, :), 'r');

```

Результаты вычисления следующие: значения параметров оптимального регулятора –

```

k =
    0.8229   -0.1771

```

$$\begin{aligned}
 & 0.8229 \quad -0.1771 \\
 p = & \\
 & 3.7343 \quad -1.4114 \\
 & -1.4114 \quad 1.1614 \\
 e = & \\
 & 0.1771 + 0.1771i \\
 & 0.1771 - 0.1771i
 \end{aligned}$$

графики динамики системы – рис. 5.3.

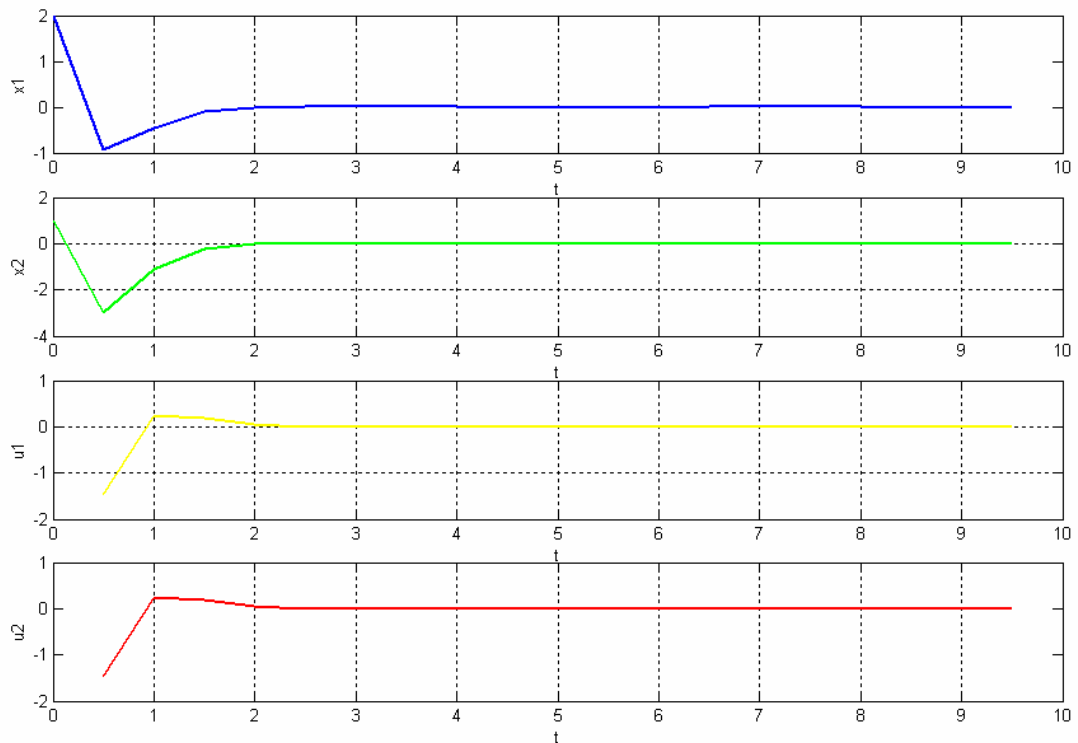


Рис. 5.3. Динамика состояний и управлений:  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ .

На рис. 5.4 – 5.7 показан другой пример синтеза оптимального линейного регулятора.

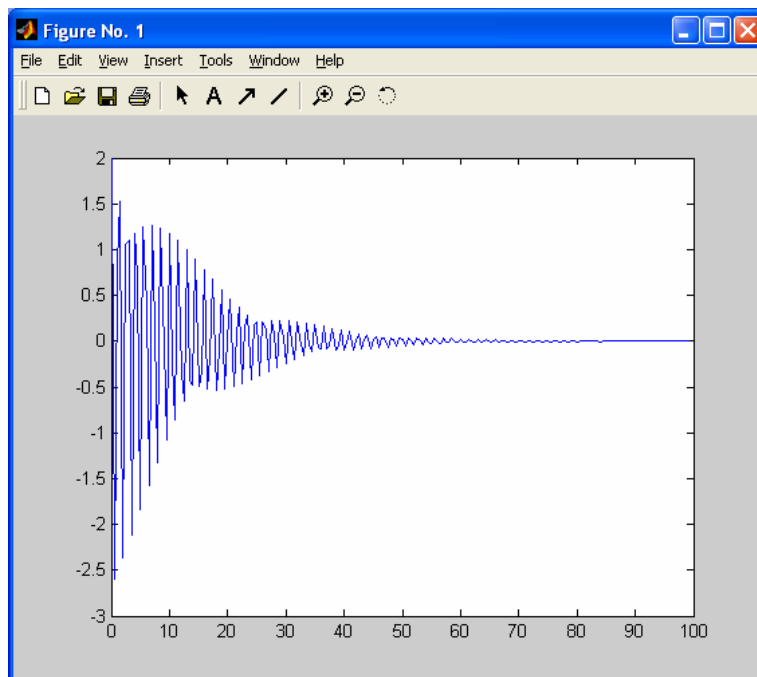


Рис. 5.4.  $x_1(k)$ .

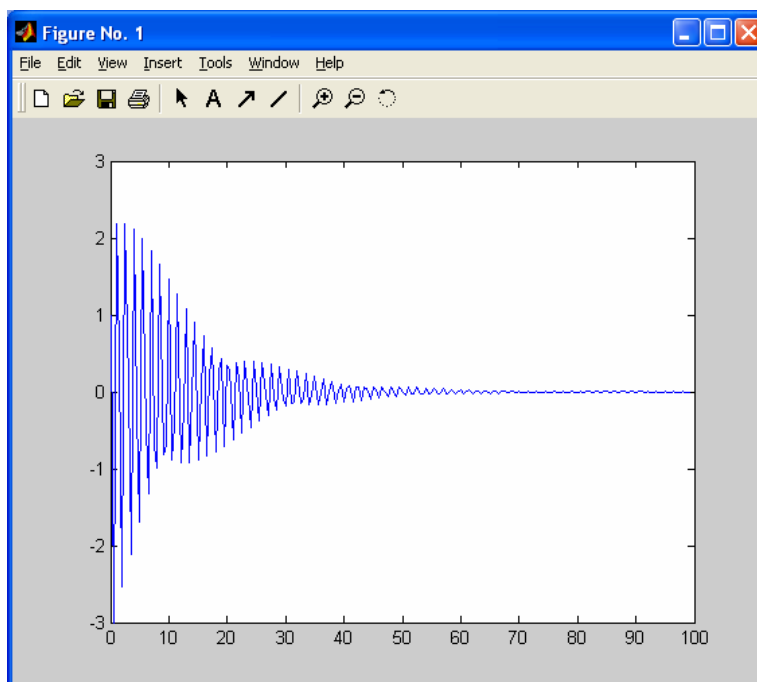


Рис. 5.5.  $x_2(k)$ .



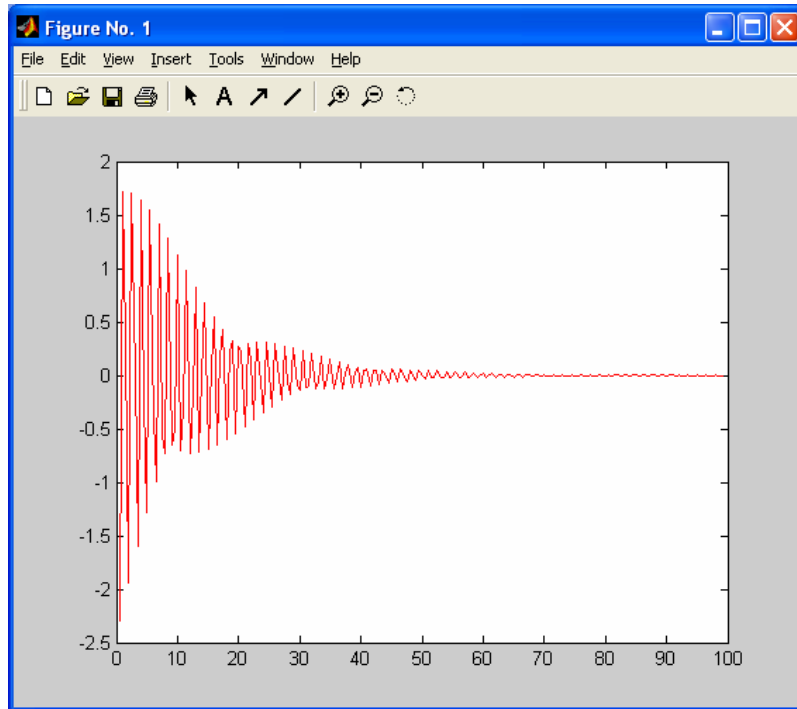


Рис. 5.6.  $u_1(k)$ .

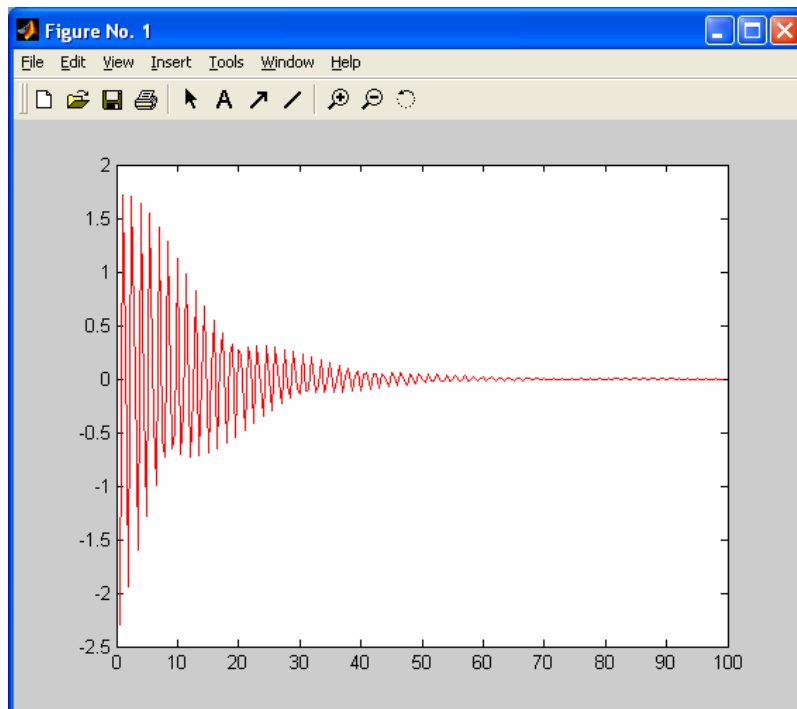


Рис. 5.7.  $u_2(k)$ .

## **Отчет о работе**

Отчет оформляется в соответствии с требованиями, предъявляемыми к оформлению работ в вузе, и должен содержать:

1. Титульный лист.
2. Наименование и цель работы.
3. Постановка задачи в соответствии с вариантом.
4. Порядок и результаты определения вычисления матриц  $P$  и  $K$ .
5. Уравнение Беллмана для решаемой задачи.
6. Значение минимальной величины функционала качества управления.
7. Результаты моделирования динамики системы в числовом и графическом виде.
8. Анализ результатов и выводы.

## **Контрольные вопросы**

1. Сформулировать основную задачу оптимального управления.
2. Дать определение критерия качества. Привести примеры критериев и дать их физическую интерпретацию.
3. Вывести необходимое условие оптимальности.
4. Показать, что для применения метода необходимо, чтобы система была стабилизируема.
5. Разработать в среде MATLAB интерфейс для интерактивного построения регулятора с полной обратной связью.
6. Выяснить влияние задержки при синтезе дискретного регулятора непрерывной системы.

## Варианты заданий

Модель системы	Функционал качества управления
1. $x_1(k+1) = 3x_1(k) - u_1(k) + 3u_2(k)$ $x_2(k+1) = x_1(k) - x_2(k) + u_1(k)$ $x_1(0) = 1, x_2(0) = 3$	1. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 3u_1^2(k) + 4u_2^2(k) + x_2^2(k)$
	2. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 2u_1^2(k) + x_2^1(k) + 4x_2^1(k)$
	3.  $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 2u_1^2(k) + 4u_2^2(k) + 8x_2^1(k) + 12x_2^1(k)$
2. $x_1(k+1) = x_1(k) + 2x_2(k) - 2u_1(k) - 3u_2(k)$ $x_2(k+1) = 2x_1(k) + x_2(k) - 4u_1(k) - u_2(k)$ $x_1(0) = 1, x_2(0) = 2$	1. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 7u_1^2(k) + u_2^2(k) + 5x_2^2(k)$
	2. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 2u_1^2(k) + 9x_2^1(k) + x_2^1(k)$
	3. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 u_1^2(k) + 4u_2^2(k) + 6x_2^1(k) + 8x_2^1(k)$
3. $x_1(k+1) = 2x_2(k) + x_1(k) - u_1(k)$ $x_2(k+1) = x_1(k) + 4x_2(k) - 2u_2(k)$ $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$	1. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 2u_1^2(k) + 4u_2^2(k) + x_2^2(k)$
	2. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 2u_1^2(k) + 3x_2^1(k) + 4x_2^1(k)$
	3. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 u_1^2(k) + 2u_2^2(k) + 3x_2^1(k) + 7x_2^1(k)$
4. $x_1(k+1) = x_1(k) - x_2(k) - u(k)$ $x_2(k+1) = 2x_1(k) + x_2(k) - 2u(k)$ $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1$	1. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 4u^2(k) + 8x_2^2(k)$
	2. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 u^2(k) + x_2^1(k) + 4x_2^1(k)$
	3. $J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 3u^2(k) + 3x_2^1(k) + x_2^1(k)$

## Практическое занятие №6. ФИЛЬТР КАЛМАНА

### Постановка задачи

Исследуется модель объекта управления в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Gw \\ y_v = Cx + Du + Hw + v \end{cases} \quad (6.1)$$

с известными входами  $u$  и возмущениями по входам  $w$  и измерениям  $v$ , которые являются «белым» шумом со следующими характеристиками:

$$\begin{aligned} M\{w\} &= M\{v\} = 0, \\ M\{w(t)w(\tau)^T\} &= Q\delta(t - \tau), \\ M\{v(t)v(\tau)^T\} &= R\delta(t - \tau), \\ M\{v(t)w(\tau)^T\} &= N\delta(t - \tau). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Требуется выполнить синтез наблюдателя для оценивания вектора переменных состояния объекта, который минимизирует установившуюся ошибку оценивания

$$P = \lim_{t \rightarrow \infty} M\{(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T\}. \quad (6.3)$$

### Краткие сведения из теории

Пусть многомерная система определяется как система с  $l$ -входами и  $n$ -выходами, у которой преобразование «вход-выход» задано в виде матричной импульсной переходной функции  $K(t, \tau)$ .

Пусть  $U(t)$  –  $l$ -мерный вектор входа фильтра, а  $\hat{X}(t)$  –  $n$ -мерный вектор выхода. Тогда связь между векторами  $\hat{X}(t)$  и  $Y(t)$  определена интегралом

$$\hat{X}(t) = \int_{t_0}^t K(t, \tau)Y(\tau)d\tau, \hat{X}(t_0) = 0.$$

Пусть  $Y(t)$  – действительный случайный процесс с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией  $R_{YY}(t, \tau)$ . Обозначим норму произвольной квадратной матрицы  $B$  через  $\|B\|$  и определим её следующим образом:

$$\|B\| = \sqrt{\text{tr}(BB^T)},$$

где  $\text{tr}(\cdot)$  – след, т.е. сумма диагональных элементов матрицы.

Пусть на вход многомерного фильтра поступает искаженный сигнал как сумма полезного сигнала  $M(t)$  и помехи  $N(t)$ , т.е.

$$Y(t) = M(t) + N(t),$$

где  $M(t)$  и  $N(t)$  –  $l$ -мерные векторы с известными корреляционными функциями  $R_{MM}(t, \tau)$  и  $R_{NN}(t, \tau)$ .

Предположим, что существует идеальный вход  $X(t)$  некоторой системы, который определяет желаемый выход и связан с полезным сигналом соотношением

$$X(t) = \int_{t_0}^t K_{ID}(t, \tau) M(\tau) d\tau,$$

где  $K_{ID}(t, \tau)$  – матрица импульсной передаточной функция идеальной системы. Рассмотрим вектор ошибок

$$X'_\sigma(t) = X(t) - \hat{X}(t).$$

Задача состоит в том, чтобы выбрать такую физическую реализуемую матричную импульсную переходную функцию  $K^*(t, \tau)$  так, чтобы математическое ожидание квадрата нормы ошибок было минимальным

$$M \left\{ \|X'_\sigma(t)\|^2 \right\} = \min_{K(t, \tau)}, \quad (6.4)$$

где  $K(t, \tau) = 0$ .

В зависимости от того, какая задача стоит: прогнозирование, фильтрации или сглаживания, определяется  $K_{ID}(t, \tau)$  идеальной системы. В задаче фильтрации  $X(t) = M(t)$ , т.е.  $K_{ID}(t, \tau) = E^* \delta(t - \tau)$ . При такой постановке задачи минимум среднеквадратической ошибки (6.4) определяется МИПФ  $K^*(t, \tau)$ , получаемой из обобщенного уравнения Винера-Хопфа для многомерных систем

$$R_{MY}(t, \tau) = \int_0^t K^*(t, s) R_{YY}(s, \tau) ds.$$

Известно, что если на вход системы поступает случайный сигнал  $Y(t)$ , являющийся стационарным, в широком смысле, случайным процессом, оптимальную матричную передаточную функцию  $W^*(s)$  многомерного фильтра можно получить факторизацией рациональной матрицы спектральных плоскостей. В случае нестационарного случайного процесса решение интегрального уравнения Вольтерра 1-го рода даже для скалярного случая представляет серьезные трудности, не говоря уже о векторном.

Калман в своих работах модифицировал постановку задачи многомерной фильтрации Винера, придав ей форму проблемы пространства состояния. В результате такой модификации был получен фильтр Калмана, осуществляющий процедуру рекурсивного оценивания, когда подлежащий оцениванию сигнал является входным сигналом линейной нестационарной динамической системы.

Рассмотрим непрерывную модель объекта управления

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu + Gw \\ y_v = Cx + Du + Hw + v \end{cases}$$

с известными входами  $u$  и возмущениями по входам  $w$  и измерениям  $v$ , которые являются "белым" шумом со следующими характеристиками:

$$\begin{aligned} M\{w\} &= M\{v\} = 0, \\ M\{w(t)w(\tau)^T\} &= Q\delta(t - \tau), \\ M\{v(t)v(\tau)^T\} &= R\delta(t - \tau), \\ M\{v(t)w(\tau)^T\} &= N\delta(t - \tau). \end{aligned}$$

Требуется выполнить синтез наблюдателя для оценивания вектора переменных состояния объекта, который минимизирует установившуюся ошибку оценивания

$$P = \lim_{t \rightarrow \infty} M\{(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T\}$$

Оптимальным решением является фильтр Калмана, описываемый уравнениями

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y_v - C\hat{x} - Du), \\ \begin{bmatrix} \hat{y}_v \\ \hat{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ I \end{bmatrix} \hat{x} + \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} u + Hw + v, \end{cases}$$

где матрица коэффициентов обратных связей  $L$  определяется на основе решения алгебраического матричного уравнения Риккати. Например, при  $H=0$  дисперсия  $P$  определяется из уравнения

$$AP + PA^T - (PC^T + GN)R^{-1}(CP + N^T G^T) + GQG^T = 0,$$

матрица  $L$  –

$$L = APC^T(N + CPC^T)^{-1}.$$

Наблюдатель (рис. 3) объединяет фильтр Калмана и объект управления.

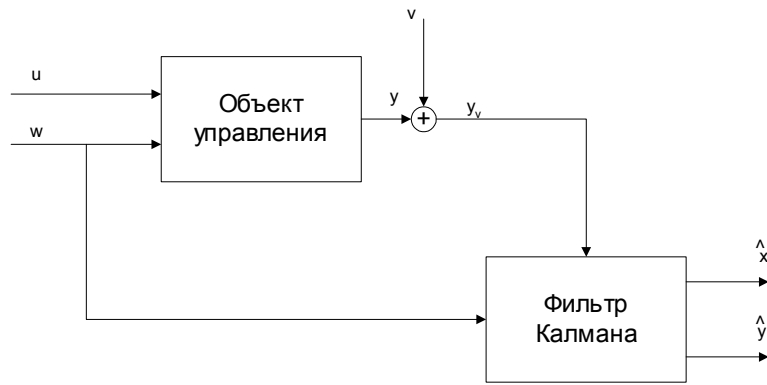


Рис. 7.1. Наблюдатель Калмана

Наблюдатель использует известные входы  $u$  и результаты измерений  $y_v$ , искаженные случайными помехами, для того, чтобы вычислить оценки вектора переменных состояния  $\hat{x}$  и выходов  $\hat{y}$ .

Пусть задана дискретная модель объекта управления

$$\begin{cases} x[n+1] = Ax[n] + Bu[n] + Gw[n] \\ y_v[n] = Cx[n] + Du[n] + Hw[n] + v[n] \end{cases}$$

с известными входами  $u$  и возмущениями по входам  $w$  и измерениям  $v$ , которые являются "белым" шумом со следующими характеристиками:

$$\begin{aligned} M\{w\} &= M\{v\} = 0, \\ M\{w[n]w[m]^T\} &= Q\delta_{nm}, \\ M\{v[n]v[m]^T\} &= R\delta_{nm}, \\ M\{v[n]w[m]^T\} &= N\delta_{nm}. \end{aligned}$$

Требуется выполнить синтез наблюдателя для оценивания вектора переменных состояния объекта управления, который минимизирует установившуюся ошибку оценивания,

$$P = \lim_{t \rightarrow \infty} M\{(x - \hat{x})(x - \hat{x})^T\}.$$

В этом случае фильтр Калмана, описывается уравнениями

$$\begin{cases} \hat{x}[n+1] = A\hat{x}[n] + Bu[n] + L(y_v - C\hat{x}[n] - Du[n]), \\ \begin{bmatrix} \hat{x}[n] \\ \hat{y}[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C(I - MC) \\ I - MC \end{bmatrix} \hat{x}[n] + \begin{bmatrix} (I - CM)D & CM \\ -MD & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u[n] \\ y_v[n] \end{bmatrix}; \end{cases}$$

где матрица коэффициентов обратных связей  $L$  и новая матрица коэффициентов обратных связей  $M$  определяются на основе решения матричного алгебраического уравнения Риккати.

Наблюдатель объединяет фильтр Калмана и объект управления; он использует известные входы  $u[n]$  и результаты измерений  $y_v[n]$ ,

искаженные случайными помехами, для того, чтобы вычислить оценки вектора переменных состояния  $x[n]$  и выходов  $y[n]$ .

Обновленная матрица коэффициентов обратных связей  $M$  применяется для того, чтобы уточнить предсказание  $x[n]$  на основе измерения  $y_v[n]$

$$\hat{x}[n+1] = \hat{x}[n] + M(y_v[n] - C\hat{x}[n] - Du[n]).$$

## Последовательность выполнения

Для синтеза фильтра Калмана в предназначены следующие функции Control System Toolbox:

```
[kest, L, P] = kalman(sys, Qn, Rn, Nn)
```

```
[kest, L, P] = kalman(sys, Qn, Rn, Nn, sensors, known)
```

для дискретных моделей

```
[kest, L, P, M, Z] = kalman(sys, Qn, Rn, Nn)
```

для синтеза дискретного фильтра Калмана для непрерывных систем

```
[kest, L, P, M, Z] = kalmz(sys, Qn, Rn, Nn)
```

Приведенные выше функции выполняют синтез фильтров Калмана для оценки переменных состояния объекта управления на основе данных о случайных внешних возмущениях и ошибках измерений.

На систему, описывающую объект управления и случайные воздействия накладываются следующие ограничения:

- пара матриц  $(C, A)$  должна быть обнаруживаемой;
- необходимо выполнение неравенств

$$\bar{R} > 0, \quad \bar{Q} - \bar{N} \bar{R}^{-1} \bar{N}^T,$$

с учетом обозначений

$$\bar{Q} = GQG^T, \quad \bar{R} = HN + N^T H^T + HQH^T, \quad \bar{N} = G(QH^T + N).$$

Для выполнения практической работы необходимо выполнить следующие действия:



1. Изучить теоретические сведения.
2. Запустить систему MATLAB.
3. Произвести расчет фильтра Калмана.
4. Выполнить моделирование системы управления с наблюдателем.
5. Сравнить данные, полученные на основе
6. Построить графики динамики системы при ненулевых начальных условиях.
7. Ответить на контрольные вопросы.
8. Оформить отчет и защитить работу.

### Методический пример

Произведем расчет фильтра Калмана для системы с передаточной функцией

$$W(s) = \frac{100}{s^2 + s + 100},$$

и параметрами  $Q = 1, R = 0.01$ .

#### 1. Произведем расчет фильтра Калмана

```
>> sys=ss(tf(100,[1 1 100]))
```

```
a =
```

	x1	x2
x1	-1	-3.125
x2	32	0

```
b =
```

	u1
x1	2
x2	0

```
c =
```

	x1	x2
y1	0	1.563

```
d =
```

	u1
y1	0

```
Continuous-time model.
```

```
>> [A,B,C,D]=ssdata(sys)
```

```
A =
```

-1.0000	-3.1250
32.0000	0

```
B =
```

```

      2
      0
C =
      0      1.5625
D =
      0
>> [A,B,C,D]=ssdata(sys)
A =
  -1.0000   -3.1250
  32.0000      0
B =
      2
      0
C =
      0      1.5625
D =
      0
>> P=ss(A, [B B], C, [D D])
a =
      x1      x2
x1      -1   -3.125
x2      32      0

b =
      u1  u2
x1      2   2
x2      0   0
c =
      x1      x2
y1      0   1.563
d =
      u1  u2
y1      0   0
Continuous-time model.
>> Kest=kalman(P,1,0.01)
a =
      x1_e   x2_e
x1_e      -1  -30.11
x2_e      32  -41.56
b =
      u1      y1
x1_e      2   17.27
x2_e      0   26.6
c =
      x1_e   x2_e
y1_e      0   1.563
x1_e      1      0
x2_e      0      1

```

```

d =
      u1  y1
y1_e    0   0
x1_e    0   0
x2_e    0   0

I/O groups:
      Group name      I/O      Channel(s)
      KnownInput      I         1
      Measurement     I         2
      OutputEstimate  O         1
      StateEstimate   O         2,3

```

Continuous-time model.

2. Выполним моделирование системы управления с наблюдателем. Для этого с учетом  $x_1 = x1$ ,  $x_2 = x2$ ,  $\hat{x}_1 = x3$ ,  $\hat{x}_2 = x4$ , введем следующие матрицы

```

>> A1=[-1 -6.25 0 0; 16 0 0 0; 0 54 1 -60.2; 0 41.5 16 -41.5]
A1 =
   -1.0000   -6.2500         0         0
   16.0000         0         0         0
         0   54.0000    1.0000  -60.2000
         0   41.5000   16.0000  -41.5000
>> B1= [2 2 0; 0 0 0; 2 0 17.3; 0 0 13.3]
B1 =
    2.0000    2.0000         0
         0         0         0
    2.0000         0   17.3000
         0         0   13.3000
>> C1=[0 3.125 0 0; 0 0 0 3.125]
C1 =
         0    3.1250         0         0
         0         0         0    3.1250

```

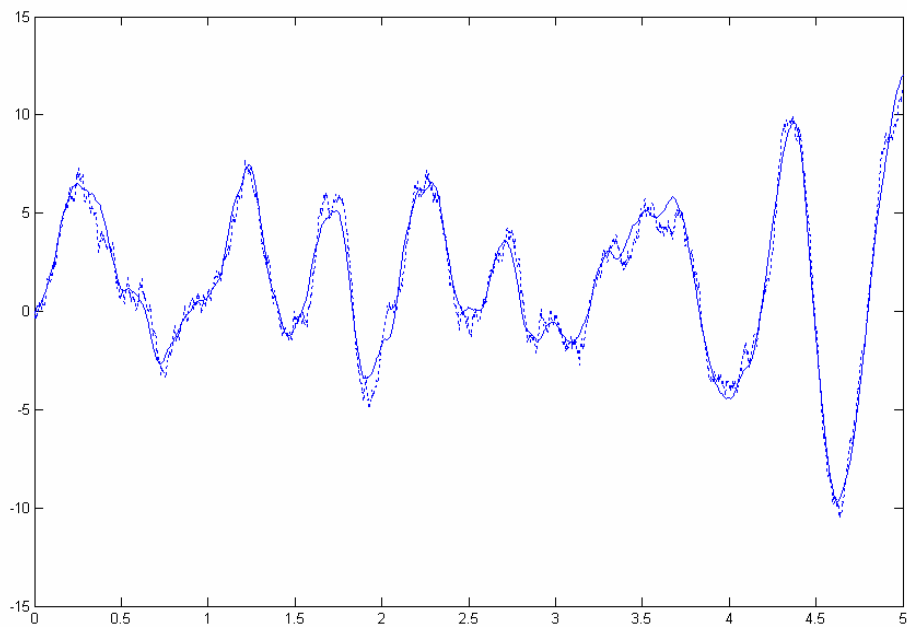
3. Входом системы управления с наблюдателем является вектор  $u1=[u; w; v]$ , выходом –  $y1 = [y; \hat{y}]$ . Здесь  $y = 3.125y_2$ ,  $\hat{y} = 3.125y_4$ . Ниже приведен фрагмент программы моделирования и результаты (рис. 6.1 – 6.2).

```

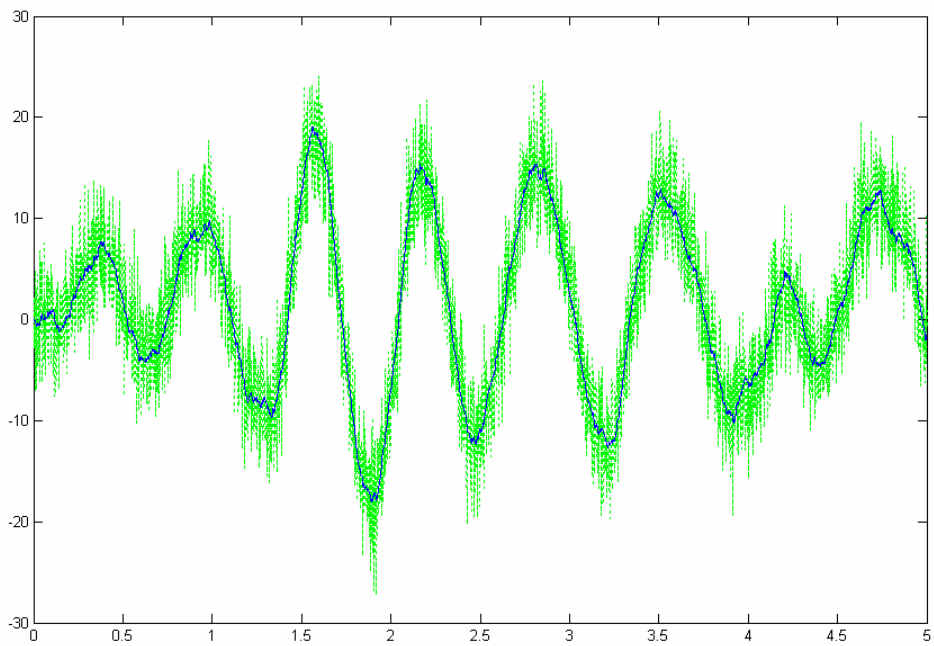
t=0:0.001:5;
u=ones(size(t));
w=randn(size(t))*1000^0.5;
v=randn(size(t))*10^0.5;
S=ss(A1, B1, C1, 0);
u1=[u; w; v];

```

```
[y1 y4]= lsim(S, u1', t);  
plot(t, y1(:,1),'-b',t,y1(:,2),'-b')  
plot(t, v'+y1(:,1), ':g', t,y1(:,2),'-b')
```



*Рис. 6.1. Сравнение измеренного и точного выходных сигналов.*



*Рис. 6.2. Сравнение зашумленного и точного значения выхода системы.*

Рисунок 6.1 иллюстрирует измеренный и точные сигналы, рисунок 6.2 – график измеренного (зашумленного) и точного значения выхода системы.

## **Отчет о работе**

Отчет оформляется в соответствии с требованиями, предъявляемыми к оформлению работ в вузе, и должен содержать:

1. Титульный лист.
2. Наименование и цель работы.
3. Постановка задачи в соответствии с вариантом.
4. Порядок и результаты выполнения работы.
5. Результаты моделирования динамики системы в числовом и графическом виде.
6. Анализ результатов и выводы.

## **Контрольные вопросы**

1. Сформулировать задачи фильтрации по Калману.
2. Привести схему системы управления с наблюдателем и пояснить ее смысл.
3. Показать, что для применения метода необходимо, чтобы система была обнаруживаема.
4. Дать определение гауссовского «белого шума».
5. Разработать в среде MATLAB интерфейс для интерактивного синтеза фильтра Калмана.

## Варианты заданий

№	Вид передаточной функции	№	Варианты параметров
	$W_p(s), Q, R$		Значения $T_i$ [с]
1.	$\frac{K(T_1s + 1)}{s(T_2s + 1)}$ $Q = 1, R = 0.01$	1.	$T_1 = 0.5, T_2 = 0.1$
		2.	$T_1 = 0.1, T_2 = 0.01$
		3.	$T_1 = 0.1, T_2 = 0.9$
		4.	$T_1 = 0.01, T_2 = 0.1$
		5.	$T_1 = 0.15, T_2 = 0.2$
2.	$\frac{K}{s(T^2s^2 + 2T\zeta s + 1)}$ $Q = 1, R = 0.01$	1.	$T = 0.1, \zeta = 1$
		2.	$T = 0.05, \zeta = 0.707$
		3.	$T = 0.03, \zeta = 0.1$
		4.	$T = 0.08, \zeta = 0.5$
		5.	$T = 0.01, \zeta = 0.15$
3.	$\frac{K(T_1s + 1)}{s(T_2s + 1)(T_3s + 1)(T_4s + 1)}$ $Q = 1, R = 0.01$	1.	$T_1 = 0.03, T_2 = 0.5,$ $T_3 = 0.1, T_4 = 0.05$
		2.	$T_1 = 0.05, T_2 = 0.4,$ $T_3 = 0.08, T_4 = 0.033$
		3.	$T_1 = 0.2, T_2 = 0.45,$ $T_3 = 0.1, T_4 = 0.05$
		4.	$T_1 = 0.5, T_2 = 0.25,$ $T_3 = 0.1, T_4 = 0.02$
		5.	$T_1 = 0.1, T_2 = 0.25,$ $T_3 = 0.1, T_4 = 0.05$
4.	$\frac{K(T_1s + 1)}{s(T_2s + 1)(T_3s + 1)(T_4^2s^2 + 2T_4\zeta s + 1)}$ $Q = 1, R = 0.01$	1.	$T_1 = 0.2, T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.05, T_4 = 0.07, \zeta = 0.5$
		2.	$T_1 = 0.07, T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.05, T_4 = 0.07, \zeta = 0.5$
		3.	$T_1 = 0.3, T_2 = 0.1,$ $T_3 = 0.05, T_4 = 0.07, \zeta = 0.5$

## Литература

### *Основная*

1. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами в системе MATLAB. – СПб.: Наука, 1999
2. Медведев В.С., Потемкин В.Г. Control System Toolbox. MATLAB 5 для студентов /Под общ. ред. Потемкина В.Г. – М.: Диалог-МИФИ, 1999
3. Семенов В.В., Пантелеев А.В., Бортакровский А.С. Математическая теория управления в примерах и задачах. – М.: МАИ, 1997
4. Сю Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления и ее применение. - М.: Машиностроение, 1972

### *Дополнительная*

1. Дьяконов В., Круглов В. MATLAB. Анализ, идентификация и моделирование систем. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2002
2. Лазарев Ю.Ф. MATLAB 5.x. Библиотека студента. – К.: Издательская группа BHV, 2000
3. Малышев С.А. Метод корневого годографа: Методического указания по выполнению лабораторных работ по теории управления. – М.: МИП, 1992
4. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 3-х т. /Под общ. ред. Н.Д. Егупова – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2000
5. Мороз А.И. Методического указания по выполнению лабораторных работ по теории управления. – М.: МИП, 1989
6. Using the Control System Toolbox with MATLAB 6: Computation. Visualization. Programming - The MathWorks, Inc., 2000

*Учебное пособие*

**Никульчев Евгений Витальевич**

**ПРАКТИКУМ ПО ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ В  
СРЕДЕ MATLAB**

Подписано в печать 22.10.02. Формат 60x84. 1/16.  
Объем 5,5 п.л. Заказ 135. Тираж 300.

Типография МГАПИ  
Москва, ул. Стромынка, 20