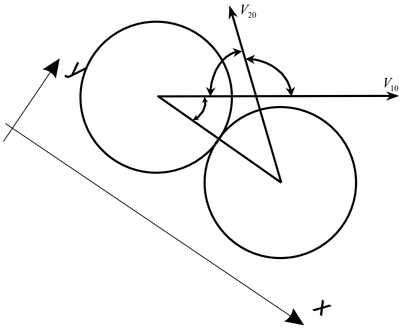
Ворожба Станислав, ИУ8-23, 9 вариант

Задача 1-1

Условие

Две гладкие частицы сферической формы с массами m_1 и m_2 движущиеся со скоростями $\vec{V}_{10}$ и $\vec{V}_{20}$, сталкиваются друг с другом, как указано на рис. 1



$$m_1 = 10^{-3}\text{кг}; \quad m_2 = 10^{-3}\text{кг}; \quad V_{10} = 10\text{м/с}; \quad V_{20} = V10\text{м/с}; \quad \alpha = \frac{\pi}{4}; \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Вид удара: **абсолютно упругий**
Требуется определить следующие величины:$V_1; V_2; \gamma$
Из закона сохранения импульса:

$$m_1\vec{V}_{10} + m_2\vec{V}_{20} = m_1\vec{V}_2 + m_2\vec{V}_1$$

Из закона сохранения энергии:

$$\frac{m_1V_{10}^2}{2} + \frac{m_2V_{20}^2}{2} = \frac{m_1V_1}{2} + \frac{m_2V_2}{2} + E_{\text{удар}}$$

Так как удар абсолютно упругий, то энергия при столкновении не выделяется, тогда $E_{\text{удар}} = 0$.
Рассмотрим данные соотношения в проекциях на оси x и y:
Направим ось x вдоль линии, соединяющей центры частиц. При соударении меняются проекции скоростей частиц на ось x, проекции на ось y остаются неизменными.
Обозначим: $\beta = \alpha - \varphi$; $\quad V_{1x}$иV_{2x} - проекции на ось x скоростей первой и второй частиц соответственно после удара.

$$\begin{cases} m_1V_{10}\cos\varphi - m_2V_{20}\cos\beta = m_1V_{1x} + m_2V_{2x} \\ m_1V_{10}^2 + m_2V_{20}^2 = m_1(V_{1x}^2 + (V_{10}\sin\varphi)^2) + m_2(V_{2x}^2 + (V_{20}\sin\beta)^2) \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, найдем проекции на ось x скоростей частиц после удара:

$$\begin{cases} V_{1x} = \frac{(m_1-m_2)V_{10}\cos\varphi - 2m_2V_{20}\cos\beta}{m_1+m_2} \\ V_{2x} = \frac{(m_1-m_2)V_{20}\cos\beta + 2m_1V_{10}\cos\varphi}{m_1+m_2} \end{cases}$$

В рассматриваемом случае $m_1 = m_2$ и $\beta = 0$. Тогда:

$$\begin{cases} V_{1x} = -\frac{2m_2V_{20}}{m_1+m_2} \\ V_{2x} = \frac{2m_1V_{10}\cos\varphi}{m_1+m_2} \end{cases}$$

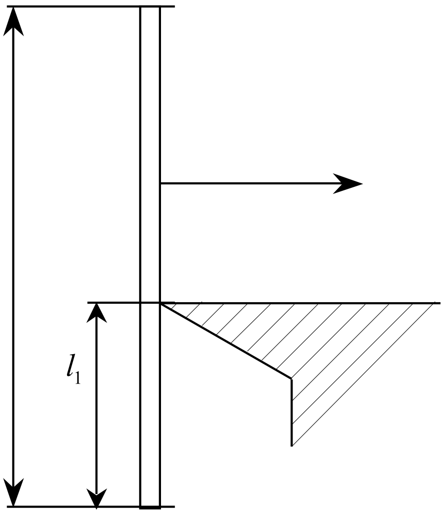
Найдем искомые величины:

$$\begin{cases} V_1 = \sqrt{V_{1x}^2 + (V_{10}\sin\varphi)^2} = \sqrt{\left(-\frac{2m_2V_{20}}{m_1+m_2}\right)^2 + (V_{10}\sin\varphi)^2} = 5\sqrt{6} \approx 12.247\text{м/с}, \\ V_2 = \sqrt{V_{2x}^2 + (V_{20}\sin\beta)^2} = \frac{2m_1V_{10}\cos\varphi}{m_1+m_2} = 5\sqrt{2} \approx 7.071\text{м/с}, \\ \gamma = \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{V_{10}\sin\varphi}{V_{1x}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{V_{20}\sin\beta}{V_{2x}}\right) = \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{(m_1+m_2)V_{10}\sin\varphi}{2m_2V_{20}}\right) = \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 2.526. \end{cases}$$

Ворожба Станислав, ИУ8-23, 9 вариант

Задача 2-2

Условие



Однородный тонкий вертикальный стержень длины l, движущийся поступательно в плоскости рисунка с горизонтальной скоростью V_0, налетает на край массивной переграды. После удара стержень вращается вокруг оси O, перпендикулярной плоскости рисунка. Ось вращения стержня совпадает с ребром преграды и проходит через точку удара стержня о преграду. Потерями механической энергии при вращении стержня после удара пренебречь.

$$l = 1\text{м}, \quad l_1 = 0.2l, \quad V_0 = 1\text{м/с}.$$

Сразу после столкновения центр масс стержня имеет ту же скорость, что и до столкновения. Определим расстояние от центра масс до оси вращения: $r = \frac{l}{2} - l_1$. Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его центр - $\frac{ml^2}{12}$.

Для оси O он будет равен $I = \frac{ml^2}{12} + mr^2$. Сразу после столкновения угловая скорость стержня равна $\omega_0 = \frac{V_0}{r}$. Кинетическая энергия стержня сразу после столкновения равна

$$E_\text{к} = \frac{I\omega_0^2}{2}.$$

Выберем за нулевой уровень потерциальной энергии уровень, на котором находится ось O. Тогда на этом уровне потенциальная энергия стержня будет равна нулю, а в исходном положении она равна

$$E_\text{п} = \frac{mgl}{2} - mgl_1.$$

По закону сохранения энергии:

$$\frac{I\omega_0^2}{2} + \frac{mgl}{2} - mgl_1 = \frac{I\omega_\text{к}^2}{2}.$$

Тогда:

$$\omega_\text{к} = \sqrt{\frac{I\omega_0^2 + mgl - 2mgl_1}{I}}.$$

Запишем полученные величины:

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{V_0}{\frac{l}{2} - l_1} = \frac{10}{3} \approx 3.33\text{с}^{-1}, \\ \omega_\text{к} = \sqrt{\frac{\left(\frac{l^2}{12} + r^2\right)\omega_0^2 + gl - 2gl_1}{\left(\frac{l^2}{12} + r^2\right)}} \approx 6.713\text{с}^{-1}. \end{cases} \text{, где} \quad r = \frac{l}{2} - l_1$$

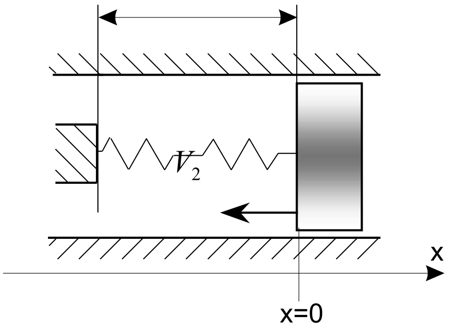
Ворожба Станислав, ИУ8-23, 9 вариант

Задача 3-1

Условие

Для данной колебательной системы необходимо:

1) Вывести дифференнциальное уравнение свободных затухающих колебаний, если сила сопротивления движению КС пропорциональна скорости, т.е. $\vec{F} = -r\vec{V}$, где r - коэффициент сопротивления.
2) Определить круговую частоту ω_0 и период T_0 свободных незатухающих колебаний.
3) Найти круговую частоту ω и период T свободных затухающих колебаний.
4) Вычислить логарифмический декремент затухания.
5) Определить, используя начальные условия задачи и исходные данные, начальные амплитуду A_0 и фазу φ_0 колебаний.
6) Написать с учетом найденных значений урванение колебаний.



Исходные данные:
$r = 0.3$кг/с,
$k_1 = 10$Н/м,
$k_2 = 12$Н/м,
$m = 0.14$кг,
$l_{10} = l_{20} = 0.11$м,
$L = 0.23$м,
$V_2 = 0.03$м/с.

Две последовательно соединенные пружины с коэффициентами k_1 и k_2 можно заменить одной пружиной с коэффициентом жесткости $k = \frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}$. Последовательно вычислим искомые величины:

1) По Второму Закону Ньютона:
$$\vec{F} = m\vec{a}.$$
Рассмотрим это соотношение в проекции на ось x:
$$-kx - rV_x = ma_x \Rightarrow \ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$
Получено дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний.

2) При отсутствии силы rV_x имело бы место соотношение:
$$-kx = ma \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$
Полученное уравнение является дифференциальным уравнением свободных незатухающих колебаний, причем $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \approx 6.242c^{-1}$, а $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 1.007$c.

3) $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \approx 6.242\text{c}^{-1}$, где $\quad \beta = \frac{r}{2m}, T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}} \approx 1.022$c

4) $\delta = \frac{1}{\beta} = \frac{2m}{r} \approx 0.933$c

5) $\frac{kx_0^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2} = \frac{kA_0^2}{2}$, где $\quad x_0 = L - (l_{10} + l_{20}) \Rightarrow A_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}V_2^2} \approx 0.011$м;
$\varphi = \arccos\left(\frac{x_0}{A_0}\right) \approx 0.448.$

6) Уравнение имеет вид: $x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi)$.

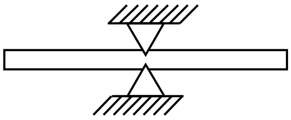
Ворожба Станислав, ИУ8-23, 9 вариант

Задача 4-1

Условие

Для стержня длиной L, закрепленного, как указано на рисунке, необходимо:

1) вывести формулу для возможных частот продольных волн, возбуждаемых в стержне, при которых в нём образуется стоячая волна,
2) указать какая частота колебаний является основной, а какие частоты относятся к обертонам (к высшим гармоникам),
3) определить частоту и длину волны i-ой гармоники,
4) для этой гармоники нарисовать вдоль стержня качественные картины стоячих волн амплитуд смещений и деформаций.



Материал: аллюминий,
$\rho = 2.7 \cdot 10^3$кг/м^3,
$E = 7 \cdot 10^{10}$Па,
$L = 1.2$м,
$i = 3$.

Стоячая волна будет образовываться при наложении двух противоположных волн $\xi_1 = A\cos(\omega t - kx + \varphi_1)$ и $\xi_1 = A\cos(\omega t + kx + \varphi_2)$. Она будет иметь вид:

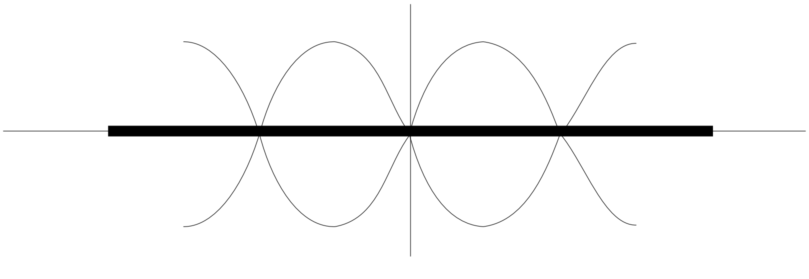
$$\xi = A\cos(\omega t + \widetilde{\varphi_1})\cos(kx + \widetilde{\varphi_2})$$

Для данного типа крепления на длину стоячей волны накладывается ограничение: $\lambda = \frac{2L}{i}, \quad i \in \mathbb{N}$ Скорость распространения волн в твердом веществе: $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Найдем последовательно искомые величины:

1) Найдем ограничение, накладываемое на частоту волн, способных образовывать стоячие волны:

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \Rightarrow \omega = \frac{\pi i}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad i \in \mathbb{N}$$

2) Частота $\omega_0 = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx 4.215 \cdot 10^5$Гц является основной, частоты при $i > 1$ относятся к обертонам.
3) Частота i-ой гармоники: $\omega_i = \frac{\pi i}{L}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx 1.265 \cdot 10^6$Гц, длина волны: $\lambda_i = \frac{2L}{i} \approx 0.8$м.
4) Качественная картина амплитуд смещений:



5) Качественная картина амплитуд деформаций: