ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ (ФНП)

§1. Множества точек в R^n.

Рассмотрим множество $D = \{x = x(x_1,\ldots,x_n)\} \subset R^n$. За расстояние между точками x и y примем величину $\rho(x,y) = |x-y| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$, что соответствует обычной евклидовой норме.

δ − *окрестностью* т. $x^o : U_\delta(x^o)$ называется множество точек x, удовлетворяющих условию: $\rho(x,x^o) < \delta$, где δ − заданное положительное число. При n = 2 или 3 это будет соответственно круг или шар (без границы), радиуса δ.

Кроме круговой (шаровой) окрестности будем использовать и прямоугольную окрестность: $V_\delta(x^o) = \{x \| x_i - x_i^o| < \delta \ \forall 1 \le i \le n\}$ – координатный прямоугольник со сторонами 2δ и центром в т.x^o.

Точка $x^o \in D$ называется *внутренней* т. множества D, если $\exists \delta > 0 \Rightarrow U_\delta(x^o) \subset D$.

Точка $x^o \in D$ называется *граничной* т. множества D, если $\forall \delta > 0 \exists x, y \in U_\delta(x^o) \Rightarrow$ $x \in D, y \overline{\in} D$. Множество всех граничных точек называется границей множества D.

Множество, не содержащее ни одной граничной точки, называется *открытым*.

Множество, содержащее все свои граничные точки, называется *замкнутым* .

Множество называется *связным*, если две его любые точки можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей этому множеству.

Областью называется связное открытое множество.

Множество называется *односвязным*, если любая непрерывная замкнутая кривая, принадлежащая множеству, может быть стянута в одну точку. В противном случае множество называется *многосвязным* (примеры).

Множество называется ограниченным, если оно целиком лежит внутри некоторой δ−окрестности и неограниченным в противном случае.

Любая ограниченная область, содержащая т. x^o называется окрестностью этой точки.

§2. Функции нескольких переменных. Основные определения и свойства.

Рассматривается множество $D \subset R^n$. Если определено правило, по которому каждой точке $x \in D$ ставится в соответствие некоторое число $u \in \Re$ (единственным образом), то говорят, что на множестве D определена (однозначная) функция $u = F(x) = F(x_1,\ldots,x_n)$. Как обычно, множество D называется областью определения функции, а множество всех соответствующих значений u: $Q = \{u\}$ – множеством значений. Часто функцию $u = F(x)$ называют *отображением области $D \subset R^n$ на множество $Q \subset \Re$.*

При $n = 2$ уравнение $F(x,y) = C$ задает *линии уровня* поверхности $z = F(x,y)$, а при $n = 3$ уравнение $F(x,y,z) = C$ – *поверхности* уровня.

Задание ФНП может быть неявным: $F(x,u) = 0$ или параметрическим $u = F(x),\ x_i = x_i(t_1,\ldots,t_m)$.

Примеры .Поверхности 2 – го порядка.

Как и в случае одной переменной, определяется предел ФНП:

$$a = \lim_{x\to x^0} F(x),\ \textit{если}\ \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x^o) \Rightarrow |F(x) - a| < \varepsilon.$$

Вместо условия $x \in \overset{o}{U}_\delta(x^o)$ можно писать $x \in \overset{o}{V}_\delta(x^o)$.

Справедливы все общие свойства пределов: арифметические свойства, переход к пределу в неравенствах и т.д.

Тем не менее, понятие предела ФНП оказывается более сложным за счет того, что стремление т. x к x^o может осуществляться большим числом способов, нежели в случае одной переменной.

Пример. $F(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}, (x,y)\to(0,0); y=kx, y=x^2: \ \dfrac{k}{1+k^2}; 0 \Rightarrow$ т.е. предела не сущ.

По аналогии с функциями одной переменной, вводятся бесконечно малые и большие величины и понятие непрерывности:

Функция $u=\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x\to x^o$, если $\lim\limits_{x\to x^o}\alpha(x)=0.$

Функция $u=f(x)$ называется бесконечно большой при $x\to x^o$, если $\lim\limits_{x\to x^o} f(x)=\infty.$

Функция $u=F(x)$ называется непрерывной в т. x^o, если $\lim\limits_{x\to x^o}F(x)=F(x^o).$ Функция непрерывна на множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Остаются верными все свойства непрерывных функций: арифметические свойства, теорема о сохранении знака. Теоремы об ограниченности непрерывной функции, о переходе через промежуточные значения и о достижении максимума и минимума формулируются для замкнутых областей. Верна также теорема о непрерывности сложной функции: пусть функция $F(x)=F(x_1,\ldots,x_n)$ непрерывна в т. x^o, а функции $x_i=\varphi_i(t)=\varphi_i(t_1,\ldots,t_m)$ в т. $t^o(t_1^o,\ldots,t_m^o)\in R^m, \textit{причем } \varphi_i(t^o)=x_i^o.$ В этом случае функция

$\Phi(t)=F(\varphi_1(t),\ldots,\varphi_n(t))$ *непрерывна в т.*t^o.

§3. Производные ФНП.

Рассмотрим функцию $u = F(x)$, определенную в некоторой области D. Пусть $x\in D$ − фиксированная точка. Дадим координате x_1 приращение Δx_1. Если существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x_1\to 0}\dfrac{F(x+\Delta x_1)-F(x)}{\Delta x_1}=\lim\limits_{\Delta x_1\to 0}\dfrac{\Delta_1 F}{\Delta x_1}$, то он называется *частной производной* функции $F(x)$ по переменной x_1 и обозначается $F'_{x_1}(x)=\dfrac{\partial F(x)}{\partial x_1}=u'_{x_1}=\dfrac{\partial u}{\partial x_1}.$

Аналогично определяются частные производные по всем остальным переменным.

Замечания.

1. Частная производная по какой либо переменной есть обычная производная, при условии, что все остальные переменные – константы.
2. Последнее обозначение, в отличие от функций одной переменной, не равно частному от деления двух дифференциалов, а является неразрывным символом.

Пример.

$$F(x,y)=x^2\sin(x+5y)+y^3;\ \frac{\partial F}{\partial x}=2x\sin(x+5y)+x^2\cos(x+5y);\ \frac{\partial F}{\partial y}=5x^2\cos(x+5y)+3y^2.$$

В частном случае двух переменных частная производная равна тангенсу наклона касательной к сечению поверхности плоскостью, перпендикулярной ко второй переменной.

§4. Частные производные высших порядков.

Вычисляя частные производные ФНП, мы снова получаем функцию тех же переменных, от которой можно взять частную производную, в том числе и по другой переменной (если она, конечно, существует): $\dfrac{\partial}{\partial x_3}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_2}\right)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3\partial x_2}=\left(u'_{x_2}\right)'_{x_3}=u''_{x_2x_3}.$ Частные производные по одной и той же переменной называются *повторными*, а по различным переменным – *смешанными*.

Например: $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x_2^3}-\textit{повторная};\ \dfrac{\partial^4 u}{\partial x_1\partial x_3^2\partial x_5}-\textit{смешанная.}$

Пример. $u=e^{2x}yz^3.\quad \dfrac{\partial^4 u}{\partial x\partial y\partial z^2}=12e^{2x}z.$

Теорема 1 (О равенстве смешанных производных). Пусть функция $z = f(x,y)$ имеет вторые частные производные в окрестности т. M_0, непрерывные в самой точке M_0.

В этом случае $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$.

{Рассмотрим функции $\varphi(x) = f(x, y_0 + h) - f(x, y_0)$ и $\psi(y) = f(x_0 + h, y) - f(x_0, y)$.

$$\Delta\varphi = \varphi(x_0 + h) - \varphi(x_0) \overset{Т.Л}{=} \varphi'(x_0 + \theta h)h = [\, f'_x(x_0 + \theta h, y_0 + h) - f'_x(x_0 + \theta h, y_0)]h =$$

$= f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \eta h)h^2$. Для $\psi(y)$ аналогично получаем: $\Delta\psi = f''_{yx}(x_0 + \mu h, y_0 + \nu h)h^2$.

Из равенства $\Delta\varphi = \Delta\psi = f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0 + h) + f(x_0, y_0)$ следует $f''_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \eta h) = f''_{yx}(x_0 + \mu h, y_0 + \nu h)$. Устремив h к нулю, в силу непрерывности производных, получаем: $f''_{xy}(x_0, y_0) = f''_{yx}(x_0, y_0)$.}

Если $u = u(x_1,\ldots,x_n)$, то все вторые частные производные можно записать с помощью

матрицы Гессе: $$\Gamma = \begin{pmatrix} u''_{x_1x_1} & u''_{x_1x_2} & \cdots & u''_{x_1x_n} \\ u''_{x_2x_1} & u''_{x_2x_2} & \cdots & u''_{x_2x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u''_{x_nx_1} & u''_{x_nx_2} & \cdots & u''_{x_nx_n} \end{pmatrix}.$$

Из **т.1** следует, что матрица Гессе – симметрична.

§5. <u>Дифференциал ФНП</u>.

Пусть функция $u = F(x)$ определена в области D и $x \in D$ − фиксированная точка. Дадим приращение каждому аргументу x_i : $\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n$. Величину $\Delta x = (\Delta x_1,\ldots,\Delta x_n)$ будем называть *вектором приращения.* В свою очередь функция u получит приращение равное $\Delta u = \Delta F = F(x_1 + \Delta x_1,\ldots,x_n + \Delta x_n) - F(x_1,\ldots,x_n)$.

Определение 1. Функция $u = F(x)$ называется дифференцируемой в т. x, если ее приращение может быть представлено в следующем виде:

$$\Delta u = A_1\Delta x_1 + \ldots + A_n\Delta x_n + \alpha_1\Delta x_1 + \ldots + \alpha_n\Delta x_n, \text{ где}$$

$A_i = A_i(x)$ и <u>не зависит</u> от Δx, а $\alpha_i = \alpha_i(x, \Delta x)$ − бесконечно малая при $\Delta x \to 0$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha_i = 0$.

Величина вектора Δx равна: $\sigma = \rho(x, x + \Delta x) = \|\Delta x\| = \sqrt{\Delta x_1^2 + \ldots + \Delta x_n^2}$.

Используя это обозначение, можно написать $\alpha_i \to 0$ *при* $\sigma \to 0$.

Легко показать, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i = o(\sigma)$: $\lim\limits_{\sigma \to 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i}{\sigma} = 0$.

$$\{\, 0 \le \sum_{i=1}^{n} \lim_{\sigma \to 0} \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta x_i}{\sigma} \le \lim_{\sigma \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \left|\frac{\Delta x_i}{\sigma}\right| \le \lim_{\sigma \to 0} \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = 0. \,\}$$

Определение 2. Главная и линейная часть приращения дифференцируемой функции называется дифференциалом: $du = A_1\Delta x_1 + \ldots + A_n\Delta x_n$, *т.е.* $\Delta u = du + o(\sigma)$.

Теорема 1. Функция, дифференцируемая в т. x^o − непрерывна в этой точке.

$\{\, \lim\limits_{\sigma \to 0} \Delta F(x^o) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to x^o} F(x) = F(x^o) \,\}$

Теорема 2. (Необходимое условие дифференцируемости) Если $F(x)$ дифференцируема в т. x, то она имеет все частные производные в этой точке, причем $\frac{\partial F(x)}{\partial x_k} = A_k$.

{Пусть $\Delta x_i = 0$ *при* $i \ne k$, *а* $\Delta x_k \ne 0 \Rightarrow \Delta u = \Delta_k u = A_k \Delta x_k + \alpha_k \Delta x_k$; $\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim\limits_{\Delta x_k \to 0} \frac{\Delta_k u}{\Delta x_k} = A_k$ }

Отсюда, $du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \Delta x_i$. Если x − независимая переменная, то $dx_i \overset{def}{=} \Delta x_i$ и окончательно

$$\boxed{du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx_i}$$

Теорема 3. (Достаточное условие дифференцируемости) Пусть $F(x)$ имеет все частные производные в окрестности т. x^{o} , непрерывные в самой этой точке. Тогда функция дифференцируема в т. x^{o} . {б/д}

Замечание. Для дифференцируемости функции одной переменной достаточно только существования производной.

Дифференциал функции u называют полным дифференциалом.

Определение 3. Выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ называется *дифференциальной формой*.

Теорема 4. Дифференциальная форма является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие $P'_y(x, y) = Q'_x(x, y)$.

{1.Необх.: $du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$ Тогда $P(x, y) = u'_x, Q(x, y) = u'_y \Rightarrow P'_y = u''_{xy} \overset{т.1(4)}{=} u''_{yx} = Q'_x$

2. Дост. – без доказательства}

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2 y + 4y^3)dy = 0.$$

{ $P'_y = Q'_x = 12xy;\ u'_x = P \Rightarrow u = \int (3x^2 + 6xy^2)dx = x^3 + 3x^2 y^2 + C(y);$

$u'_y = Q \Rightarrow 6x^2 y + C'(y) = 6x^2 y + 4y^3;\ \ C(y) = y^4 + D;\ x^3 + 3x^2 y^2 + y^4 = C$ − общий интеграл уравнения}

§6. Геометрический смысл дифференцируемости. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Рассмотрим поверхность S: $z = f(x,y)$, дифференцируемую в т. $M_0(x_0, y_0, z_0) \in S$.

Определение 1. Плоскость, проходящая через т. M_0 , называется касательной плоскостью к поверхности S в т.M_0 , если угол между ней и секущей $(M_0 M_1)$ ($M_1(x_1, y_1, z_1) \in S$) стремится к нулю при $M_1 \to M_0$.

Определение 2. Вектор, ортогональный к касательной плоскости в т.M_0 , называется нормальным вектором к поверхности в этой точке. Нормалью к поверхности называется прямая, проходящая через т.M_0 перпендикулярно касательной плоскости в этой точке.

Обозначим $A_0 = z'_x(x_0, y_0)$, $B_0 = z'_y(x_0, y_0)$. Вектор приращения: $\overline{M_0 M_1} = \overline{q} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$.

Из условия дифференцируемости функции z следует, что $\Delta z = A_0 \Delta x + B_0 \Delta y + o(\sigma)$.

Рассмотрим плоскость $\Pi: Z - z_0 = A_0(x - x_0) + B_0(y - y_0)$ и угол φ между секущей и этой плоскостью: $\sin\varphi = \cos(\angle \overline{q}, \overline{n}) = \dfrac{A_0 \Delta x + B_0 \Delta y - \Delta z}{\sqrt{A_0^2 + B_0^2 + 1}\sqrt{\sigma^2 + \Delta z^2}} = \dfrac{o(\sigma)}{R \cdot O(\sigma)} \to 0$ при $\sigma \to 0.$ Отсюда сразу следует, что плоскость Π – касательная к поверхности в т.M_0. В результате имеем:

Функция $z = f(x,y)$, дифференцируемая в некоторой точке (x_0, y_0) имеет в соответствующей т.M_0 касательную плоскость: $Z - z_0 = \dfrac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \dfrac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0)$ и нормальный вектор $\overline{n} = (\dfrac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}, \dfrac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}, -1)$.

Пример. $z = x^2 + xy + y^3;\ M_0(2,1).$ { $z|_{M_0} = 7;\ z'_x|_{M_0} = 5;\ z'_y|_{M_0} = 5;\ \ \overline{n} = (5, 5, -1);$

Касательная плоскость : $5(x - 2) + 5(y - 1) - z + 7 = 0$ или $5x + 5y - z - 8 = 0.$ }

§7. Дифференциалы высших порядков.

Определение 1. Дифференциал от первого дифференциала функции называется вторым дифференциалом: $d(du) = d^2u.$ Аналогично определяются дифференциалы более старших порядков.

Вычислим второй дифференциал функции двух переменных $z = f(x, y)$. При этом будем считать, что дифференциалы независимых переменных dx и dy – величины постоянные (т.е. не зависят от т.(x,y) и не меняются при вычислении каждого последующего дифференциала).

$d^2z = d(dz) = d(z'_x dx + z'_y dy) = (z'_x dx + z'_y dy)'_x + (z'_x dx + z'_y dy)'_y dy = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2$.

Не трудно видеть, что второй дифференциал представляет собой квадратичную форму от переменных dx и dy. Матрица этой квадратичной формы есть матрица Гессе, т.е. $d^2z = (dx,dy)\Gamma(dx,dy)^T$ (см. раздел «Линейная алгебра», квадратичные формы). Кроме того, второй дифференциал можно записать в символическом виде: $d^2z = (\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy)^2 z.$

Можно показать, что в общем случае дифференциал 2 – го порядка функции $u = F(x)$ равен

$$d^2u = (x_1,\ldots,x_n)\cdot\Gamma\cdot(x_1,\ldots,x_n)^T = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^2 u.$$

Дифференциал m – го порядка равен $d^m u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^m u.$

§8. Формула Тейлора для ФНП.

Для функции одной переменной формула Тейлора имеет вид:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(\Delta x^n).$$

Если обозначить $x - x_0 = \Delta x = dx$, то формулу Тейлора можно написать в дифференциальной форме: $\Delta f = df(x_0) + \frac{d^2 f(x_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(x_0)}{n!} + o(dx^n)$. Оказывается, в случае нескольких переменных для $(n+1)$ раз дифференцируемой в окрестности т. x^o функции формула Тейлора имеет такой же вид:

$$\Delta u = du(x^o) + \frac{d^2u(x^o)}{2!} + \ldots + \frac{d^n u(x^o)}{n!} + o(\sigma^n) \quad \text{\{без вывода\}}$$

§9. Производная сложной функции.

Рассматривается сложная функция аргумента t : $u = F(x_1,\ldots,x_n); x_i = x_i(t_1,\ldots,t_m), i = 1 \div n.$

Теорема 1. Пусть функции x_i дифференцируемы в т.t^o, а функция u в соответствующей т. x^o. Тогда сложная функция $u = u(t_1,\ldots,t_m)$ дифференцируема в т.t^o, а ее частные производные в этой точке равны $\frac{\partial u}{\partial t_k} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_k}, \; k = 1 \div m.$

{Доказательство проведем для частного случая $z = f(x, y),\; x = x(t), y = y(t).$ (Изменятся только технические подробности) Пусть Δt – приращение t. Функции x и y получат приращения $\Delta x = x'_t\Delta t + o(\Delta t)$ *и* $\Delta y = y'_t\Delta t + o(\Delta t).$ В свою очередь приращение u равно: $\Delta u = u'_x\Delta x + u'_y\Delta y + o(\sigma) = (u'_x x'_t + u'_y y'_t)\Delta t + o(\Delta t) + o(\sigma).$ Так как $o(\Delta t) = o(\Delta\sigma)$, окончательно получаем: $u'_t = u'_x x'_t + u'_y y'_t.$}

Пример. $z = \varphi(x) + xy^2; \begin{cases} x = \sin(uv) \\ y = \cos(u - v) \end{cases}; \; z'_v = (\varphi'(x) + y^2)u\cos(uv) + 2xy\sin(u - v).$

§10. Инвариантность первого дифференциала.

1. x – независимая переменная: $du=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx_i$ (§4).

2. $x_i=\varphi_i(t)$; $du=\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{\partial u}{\partial t_j}dt_j=\sum\limits_{j=1}^{m}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t_j}\right)dt_j=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\sum\limits_{j=1}^{m}\frac{\partial x_i}{\partial t_j}dt_j\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx_i.$

Таким образом, выражение для первого дифференциала не меняется, если переменная x является функцией другой переменной.
Замечание. Дифференциалы 2 – го и более высоких порядков, как и в случае одной переменной не инвариантны, так как $dx_i\neq\Delta x_i, dx_i\neq const$ и $d(dx_i)\neq 0$, если x_i − функции (не линейные) новых переменных.

§11. Неявные ФНП.

Рассмотрим уравнение $F(u, x_1,\dots, x_n) = 0$. Будем считать, что по смыслу задачи u есть функция от переменных x_i : $u = u(x_1,\dots,x_n)$. В этом случае говорят, что u задана неявно.

Пример. $\operatorname{arctg}(xy^2z^3)+\frac{z}{x+y+1}-8=0.$ Любую из переменных можно считать неявно заданной функцией двух других.

Теорема 1 (О существовании и дифференцируемости неявной функции). Пусть функция u задана уравнением $F(u, x) = 0$ и функция $F(u, x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $F(u, x)$ дифференцируема в окрестности т. $M_0(u_0, x^0)$.
2) $\frac{\partial F}{\partial u}$ дифференцируема в окрестности т. M_0.
3) $F(u_0, x^0) = 0$.
4) $\frac{\partial F(M_0)}{\partial u}\neq 0.$

Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, такое, что в $U_\delta(x^0)$ определена единственная дифференцируемая функция $u = f(x)$, удовлетворяющая условию $|u-u_0|<\varepsilon.$
{без доказательства}
Для вычисления частных производных рассмотрим уравнение $F(u, x, y) = 0$. Пусть $u = u(x, y)$ – решение этого уравнения. Продифференцируем тождество $F(u(x,y),x,y)\equiv 0$ по x: $F'_u u'_x+F'_x x'_x+F'_y y'_x=0\Rightarrow F'_u u'_x+F'_x=0.$ Отсюда получаем (для y аналогично) :

$$\boxed{u'_x=-\frac{F'_x}{F'_u}}\qquad \boxed{u'_y=-\frac{F'_y}{F'_u}}$$

Пример. $e^{u-x+y}+ux^3y-10=0;\ u'_x=-\frac{-e^{u-x+y}+3ux^2y}{e^{u-x+y}+x^3y}.$

Выведем уравнение касательной плоскости к неявно заданной поверхности S: $F(x, y, z) = 0$ в т. $M_0\in S$. Как известно, уравнение касательной плоскости имеет вид :

$Z-z_0=\frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial z(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)$. Подставим в это уравнение значения частных производных неявно заданной функции. После простых преобразований получим:

$$\frac{\partial F(M_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F(M_0)}{\partial y}(y-y_0)+\frac{\partial F(M_0)}{\partial z}(z-z_0)=0.$$

§12. Полная производная.

Пусть $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, а все $x_i=\varphi_i(t)-$ функции одной переменной. Тогда u есть функция одной переменной t и $\frac{\partial u}{\partial t}$ – производная по единственному аргументу, т.е. –

обычная производная: $\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{du}{dt}=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\dfrac{dx_i}{dt}$ – *полная производная.*

Рассмотрим частный случай $z = f(x, y)$, $y = y(x)$. Полная производная z по x равна:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}y'(x).$$

Пример. *Логарифмическая производная*: $z=[f(x)]^{\varphi(x)}=[f(x)]^{y}$.

$z'(x)=y[f(x)]^{y-1}f'(x)+[f(x)]^{y}\ln f(x)\,y' = \varphi(x)[f(x)]^{\varphi(x)-1}f'(x)+[f(x)]^{\varphi(x)}\ln f(x)\cdot\varphi'(x).$

§13. Производная по направлению. Градиент.

Рассматривается функция $u=f(x,y,z)=f(M);\ M\in U(M_0)$ и единичный вектор $\bar{e}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. Проводится прямая l через т.M_0 с направляющим вектором $\bar{e}$:

$$l:\begin{cases}x=t\cdot\cos\alpha+x_0\\ y=t\cdot\cos\beta+y_0\\ z=t\cdot\cos\gamma+z_0\end{cases}$$

Определение 1. Производная функции $u = u(x, y, z)$ по переменной t называется *производной по направлению* l

Так как на этой прямой u – сложная функция одной переменной, то производная по t равна полной производной по t (§ 12).

Она обозначается $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ и равна $\dfrac{\partial u}{\partial l}=\dfrac{du}{dt}=\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$

Определение 2. *Градиентом* функции $u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ называется вектор, координаты которого равны частным производным функции u : $\operatorname{grad}u=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1},\ldots,\dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right).$

В нашем случае $\operatorname{grad}u=\left(\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)$. Таким образом, производная по направлению равна:

$\dfrac{\partial u}{\partial l}=\bar{e}\cdot\operatorname{grad}u=|\bar{e}|\cdot|\operatorname{grad}u|\cdot\cos\varphi$, где φ – угол между направляющим вектором прямой и градиентом функции в данной точке. Отсюда следует геометрический и физический смысл градиента функции (необходимо помнить, что $\dfrac{\partial u}{\partial l}=\dfrac{du}{dt}$ – скорость изменения функции вдоль прямой l):

1. Градиент ортогонален касательной плоскости к поверхности уровня в данной точке.
2. Градиент направлен в сторону максимального роста (изменения) функции в т.M_0 .
   {Этот максимум достигается при $\varphi = 0$, т.е. при $\bar{e}\uparrow\uparrow\operatorname{grad}u$ }
3. Величина наибольшей скорости роста функции равна $|\operatorname{grad}u|$.

Пример. Найти направление максимального возрастания функции $u=xy^2\sqrt{z}$ в т.$M_0(2,1,4)$ и величину скорости этого роста.

{ $\bar{l}=\operatorname{grad}u(4,1,4)=\left(y^2\sqrt{z},2xy\sqrt{z},\dfrac{xy^2}{2\sqrt{z}}\right)\Big|_{(4,1,4)}=(2,16,1).\ v=\sqrt{261}.$ }

§14. Локальный экстремум ФНП.

Рассматривается функция $u=F(x)$ определенная на множестве $D\in R^n$.

Определение 1. Точка $x^o\in D$ называется точкой *локального экстремума*, если :
$\exists\delta>0\,\forall x\in U_\delta(x^o)\Rightarrow F(x)\le F(x^o)$ (max) *либо* $\forall x\in U_\delta(x^o)\Rightarrow F(x)\ge F(x^o)$ (min).

Из определения следует, что приращение функции $\Delta u=F(x)-F(x^o)$ не меняет знак в окрестности точки экстремума: если $\Delta u\le 0\Rightarrow$ в т.x^o максимум, если $\Delta u\ge 0-$ минимум.

Теорема 1 (Необходимое условие локального экстремума). Пусть функция $u = F(x)$ имеет в т. x^o локальный экстремум. Если у нее в этой точке существуют частные производные, то они равны нулю.

{ Зафиксируем все переменные кроме x_1 в т. x^o : $x_i = x_i^o, i = 2 \div n.$ Тогда $u = u(x_1)$.

По Т. Ферма $\dfrac{\partial u(x^o)}{\partial x_1} = u'(x_1^o) = 0.$ Для остальных переменных – аналогично **}**

Определение 2. Точка, в которой все частные производные равны нулю, называется *стационарной*.

Замечание 1. Функция, дифференцируемая в стационарной точке, имеет в ней дифференциал равный нулю: $du\Big|_{x=x^o} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u(x^o)}{\partial x_i} dx_i = 0$. Верно и обратное утверждение: из равенства нулю дифференциала в некоторой точке следует стационарность этой точки. Для доказательства достаточно взять все приращения аргументов кроме одного равными нулю. Тогда из формулы для дифференциала сразу следует равенство нулю соответствующей частной производной.

Замечание 2. Условия Т.1 не являются достаточными: $u = xy$, т. O(0,0).

Теорема 2 (Достаточное условие локального экстремума). Пусть функция $u(x)$ дважды дифференцируема в стационарной точке. Если 2 – ой дифференциал в этой точке есть знакопостоянная квадратичная форма от дифференциалов независимых переменных, то функция в ней имеет экстремум: максимум, если $d^2u\Big|_{x=x^o} \le 0$ и минимум, если $d^2u\Big|_{x=x^o} \ge 0$.

{Приращение функции в т. x^o по формуле Тейлора (§8) равно:

$\Delta u = du(x^o) + \dfrac{d^2u(x^o)}{2!} + o(\sigma^2) = \dfrac{d^2u(x^o)}{2!} + o(\sigma^2).$ В достаточно малой окрестности знак приращения совпадает со знаком второго дифференциала функции u. В свою очередь, знакопостоянство квадратичной формы определяется его матрицей, т.е. матрицей Гессе (§4) и не меняется внутри окрестности стационарной точки в силу теоремы об устойчивости знака , что и доказывает теорему}

Пример. $z = x^3 + y^2 - 4xy - 3x.$

$$\begin{cases} z'_x = 3x^2 - 4y - 3 = 0 \\ z'_y = 2y - 4x = 0 \end{cases} \Rightarrow P(3,6),\ Q(-1/3, -2/3); \begin{cases} z''_{xx} = 6x \\ z''_{xy} = -4; \ d^2z = 6xdx^2 - 8dxdy + 2dy^2 \\ z''_{yy} = 2 \end{cases};$$

Для определения знакопостоянства второго дифференциала применим критерий Сильвестра (Линейные пространства, §15).

$A = \begin{pmatrix} 6x & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$; $\mathrm{M}_1 = 6x, \mathrm{M}_2 = 12x - 16.$ $P: \mathrm{M}_1 > 0, \mathrm{M}_2 > 0 \Rightarrow \min$. $Q: \mathrm{M}_1 < 0, \mathrm{M}_2 < 0$ – экстремума нет. (В случае двух переменных знакопостоянство второго дифференциала можно определить, исследуя соответствующий квадратный трехчлен)

§15. Наибольшее и наименьшее значения функции в ограниченной замкнутой области.

Алгоритм поиска наибольшего и наименьшего значений функции в ограниченной замкнутой области сводится к решению трех задач:

1. Определение стационарных точек внутри области.
2. Определение стационарных точек на границе области.
3. Выбор наибольшего и наименьшего значений функции в этих точках.

Рассмотрим поставленную задачу на примере функции двух переменных. Требуется найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x,y)$, определенную замкнутой области $\bar{D}$ с границей $\gamma : \varphi(x, y) = 0,$ *либо* $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \ \alpha \le t \le \beta.$

1) Решаем систему $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}, (x, y) \in D;$

2)Решаем уравнение $z'(x, y(x)) = 0,\ или\ z'(x(t), y(t)) = 0;$

3) Выбираем наибольшее и наименьшее значений функции в полученных точках.

Пример. $z = x^2y$; γ: $x^2 + y^2 = 1$.

$\begin{cases} z'_x = 2xy \\ z'_y = x^2 \end{cases}, стационарные\ точки: (0, y): z(0, y) = 0.$ (нестрогий экстремум)

$$z\big|_\gamma = y(1-y^2); z' = 1-3y^2 = 0; y = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow z_{экстр} = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

$$z_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{9};\ z_{\min} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

§16. Условный экстремум ФНП.

Постановка задачи:

Найти экстремум функции $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ при наличии дополнительных условий:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_m(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \qquad m < n$$

(обычно эти условия называют *уравнениями связи*; в экономике функцию u называют *целевой,* а уравнения связи − *ограничениями*).

Замечание. Очевидно, задачи условного экстремума и нахождения наибольшего и наименьшего значений в ограниченной замкнутой области (§15) тесно связаны.

Определение 1. Точка x^o, удовлетворяющая уравнениям связи, называется точкой *локального условного* (*относительного*) *экстремума*, если $\exists\delta > 0$ такое, что для $\forall x \in U_\delta(x^o)$, являющегося решением уравнений связи, выполняется неравенство $u(x) \le u(x^o)$ $(либо\ u(x) \ge u(x^o))$.

Геометрическую интерпретацию легко видеть на примере функции двух переменных. Пусть $z = f(x, y);\ \varphi(x, y) = 0.$ Целевая функция задает поверхность в пространстве, а уравнение связи − цилиндр с направляющей $\varphi(x ,y) = 0$ и образующей параллельной оси OZ.

Их пересечение – линия в пространстве, на которой нужно найти точки с локально экстремальными аппликатами.

Как и в случае обычного экстремума, необходимым условием является равенство нулю первого дифференциала функции u. Точки, удовлетворяющие этому условию и уравнениям связи, также будем называть стационарными.

Вообще говоря, из написанных условий следует, что m переменных являются функциями остальных $n-m$ переменных. Если решить данную систему уравнений и подставить полученные решения в исходную функцию, то получится задача безусловного экстремума для функции от $n-m$ оставшихся переменных. При этом функцию u удобно записывать в виде $v(\tilde{x}) = f(x_1, \ldots, x_{n-m}, y_1, \ldots, y_m)$, где $\tilde{x}(x_1, \ldots, x_{n-m}) \in R^{n-m},\ a\ y_k = y_k(x_1, \ldots, x_{n-m}), k = 1 \div m$ − решения уравнений связи (будем предполагать, что выполнены все условия теоремы существования и дифференцируемости системы функций, заданных неявно).

Возможны различные подходы к решению исходной задачи. Самый непосредственный, т.е. решение системы ограничений относительно y_k в общем виде и подстановка этих решений в целевую функцию, удается только в очень простых частных случаях, например, при малых значениях m (m = 1,2) и линейных ограничениях.

Пример. $u = xyz^2$; $x + y + z - 2 = 0$. $x = 2 - y - z$; $u = 2yz^2 - y^2 z^2 - yz^3$.

$$\begin{cases} u'_y = 2z^2 - 2yz^2 - z^3 = 0 \\ u'_z = 4yz - 2y^2z - 3yz^2 = 0 \end{cases}$$

Стационарные точки функции $u = u(x,y,z)$: $P_1(2-y, y, 0)$, $P_2(0,0,2)$, $P_3(0.5, 0.5, 1)$

Проверим достаточные условия: $u''_{yy} = -2z^2;\ u''_{yz} = 4z - 4yz - 3z^2;\ u''_{zz} = 4y - 2y^2 - 6yz.$

P_1: $u''_{yy} = 0,\ u''_{yz} = 0,\ u''_{zz} = 2y(2-y) \Rightarrow d^2u = 2y(2-y)dz^2$ − локального экстремума нет (функция u имеет наибольшие или наименьшие значения на определенных участках прямой: $z = 0$, $x + y = 2$, т.е. нестрогий экстремум).

P_2 : $u''_{yy} = -8;\ u''_{yz} = -4;\ u''_{zz} = 0 \Rightarrow d^2u = -8dy^2 - 8dydz.$

Квадратичная форма знакопеременная − экстремума нет.

P_3 : $u''_{yy} = -2, u''_{yz} = -1, u''_{zz} = -1.5 \Rightarrow d^2u = -2dy^2 - 2dydz - 1.5dz^2$. Матрица квадратичной формы:

$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1.5 \end{pmatrix}$: $\mathrm{M}_1 = -2 < 0,\ \mathrm{M}_2 = 2 > 0 \Rightarrow$ форма знакоотрицательная $\Rightarrow$ в т. P_3 максимум.

Более конструктивным является метод, основанный на следующем алгоритме: подставим гипотетические решения y_j в уравнения связи и продифференцируем получившиеся тождества. В результате получим из m линейных уравнений относительно $dy_1, \ldots, dy_m$:

$d\varphi_i \equiv \sum_{j=1}^{n-m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j} dy_j = 0;\ i = 1 \div m.$ Теперь можно выразить из этой системы dy_j через dx_k и подставить в выражение для полного дифференциала целевой функции du . Приравняв нулю коэффициенты при dx_j , получим (вместе с условиями связи) систему уравнений для определения стационарных точек. Рассмотрим этот метод на последнем примере.

$$d\varphi = dx + dy + dz = 0 \Rightarrow dx = -dy - dz;\ du = yz^2dx + xz^2dy + 2xyzdz = (-yz^2 + xz^2)dy + (-xz^2 + 2xyz)dz$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -yz^2 + xz^2 = 0 \\ -yz^2 + 2xyz = 0 \\ x = -y - z + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2z^2 - 2yz^2 - z^3 = 0 \\ 4yz - 2y^2z - 3yz^2 = 0 \end{cases}$$; Т.е. получаем ту же систему уравнений, что и в первом методе.

Самым удобным методом решения поставленной задачи является метод Лагранжа.

§17. Метод неопределенных множителей Лагранжа поиска условного экстремума.

Метод Лагранжа сводится к исследованию функции $L(x, \lambda)$, называемой функцией Лагранжа и равной: $L(x_1, \ldots, x_n; \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ (где λ_i − неизвестные постоянные параметры) на обычный локальный экстремум при наличии уравнений связи. Это позволяет решать систему с ($n + m$) неизвестными любыми методами (в том числе и на компьютере) для определения стационарных точек $P_1, P_2, \ldots, P_k$. При проверке достаточных условий экстремума следует учитывать соотношения между дифференциалами переменных в этих точках, которые получаются из уравнений $d\varphi_i(P_j) = 0$.

Пример 1. $u = x - 2y + 2z$; $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$. $L = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$.

$$\begin{cases} L'_x = 1 + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = -2 + 2\lambda y = 0 \\ L'_z = 2 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \quad x = -\frac{1}{2\lambda}, y = \frac{1}{\lambda}, z = -\frac{1}{\lambda};\ \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 9 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2};$$

Стационарные точки : $\lambda_1 = 0.5, P_1(-1, 2, -1); \lambda_2 = -0.5,\ P_2(1, -2, 1)$.

Достаточные условия: $L''_{xx} = L''_{yy} = L''_{zz} = 2\lambda;\ L''_{xy} = L''_{xz} = L''_{yz} = 0\ \Rightarrow d^2L = 2\lambda(dx^2 + dy^2 + dz^2).$
Таким образом, в т. P_1 − минимум; в т. P_2 − максимум.
Замечание. В данной задаче второй дифференциал всегда является знакопостоянной квадратичной формой от $dx, dy, dz.$ Поэтому соотношение между дифференциалами:
$d(x^2 + y^2 + z^2 - 9) = 0 \Rightarrow 2xdx + 2ydy + 2zdz = 0 \Rightarrow dz = -\dfrac{xdx + ydy}{z}\Big|P_1, P_2$ не использовались при исследовании достаточного условия. Однако, в случае знакопеременного второго дифференциала указанные соотношения учитывать необходимо.

Пример 2. $u = 5xy + z^2;\ x^2 - y + z = 2;\ L = 5xy + z^2 + \lambda(x^2 - y + z - 2).$

$$\begin{cases} L'_x = 5y + 2\lambda x = 0 \\ L'_y = 5x - \lambda = 0 \\ L'_z = 2z + \lambda = 0 \\ x^2 - y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda/5 \\ y = -2\lambda^2/25 \Rightarrow 6\lambda^2 - 25\lambda - 100 = 0 \Rightarrow \\ z = -\lambda/2 \end{cases}$$

$$P_1: \begin{cases} \lambda_1 = 20/3; \\ x_1 = 4/3, y_1 = -32/9, z_1 = -10/3; \end{cases} \qquad P_2: \begin{cases} \lambda_2 = -5/2; \\ x_2 = -1/2, y_2 = -1/2, z_2 = 5/4. \end{cases}$$

Достаточные условия:
$L''_{xx} = 2\lambda, L''_{xy} = 5, L''_{zz} = 2, L''_{yy} = L''_{xz} = L''_{yz} = 0;\ dy = 2xdx + dz.$
$d^2L = 2\lambda dx^2 + 10dxdy + 2dz^2 = 2\lambda dx^2 + 10dx(2xdx + dz) + 2dz^2 = 6\lambda dx^2 + 10dxdz + 2dz^2.$
1) $d^2L(P_1) = 40dx^2 + 10dxdz + 2dz^2 \geq 0 - \min;$
2) $d^2L(P_2) = -15dx^2 + 10dxdz + 2dz^2 -$ знакопеременная форма $\Rightarrow$ экстремума нет.
Замечание. Без соотношения $dy = 2xdx + dz$ квадратичная форма и в первом случае будет знакопеременной.
Обоснование метода Лагранжа здесь не приводится.

§18. Векторные ФНП.

Рассмотрим вектор, каждая координата которого является функцией нескольких переменных: $\bar{r} = \bar{F}(x) = (y_1, \ldots, y_m),$ *где* $y_k = y_k(x_1, \ldots, x_n)$. Такие векторы будем называть вектор – функциями нескольких переменных или ВФНП. С примером такой функции мы встречались в §13 − это градиент функции u: $\bar{r} = \operatorname{grad} u(x) = (u'_{x_1}(x), \ldots, u'_{x_n}(x)).$ В общем случае ВФНП представляет собой отображение $\bar{F}: D \subset R^n \to Q \subset R^m$ $(\operatorname{grad} u: R^n \to R^n).$

Функции $y_k = y_k(x_1, \ldots, x_n),\ k = 1 \div m$ называются *координатными функциями*. Стандартным образом определяются линейные операции над векторами и скалярное произведение векторов, а для трехмерных ВФНП ($m = 3$) и векторное произведение (при этом точку x можно считать фиксированной, т.е. вектор – функции обычными геометрическими векторами). Произведение ВФНП на скалярную функцию определяется естественным образом: $f(x)\bar{F}(x) = (f(x)y_1(x), \ldots, f(x)y_m(x)).$

При рассмотрении геометрического смысла ВФНП удобно считать все векторы *радиус – векторами*, т.е. векторами, имеющими общее начало в начале координат.
Отображение $\bar{F}(x(t), y(t), z(t)): R^1 \to R^3,\ t \in (a, b)$ описывает кривую в пространстве, а $\bar{F}(x(u,v), y(u,v), z(u,v)): R^2 \to R^3, (u,v) \in W -$ поверхность в пространстве.

Предел ВФНП определяется через пределы координатных функций: $\lim\limits_{x \to x^o} \bar{F}(x) = \bar{a},$ если $\lim\limits_{x \to x^o} y_k(x_1, \ldots, x_n) = a_k,\ k = 1 \div m$ и $\bar{a} = (a_1, \ldots, a_m).$ Сохраняются все основные свойства пределов: пределы суммы, произведения вектор – функции на скалярную функцию, скалярного и векторного произведений равны сумме и соответствующим произведениям пределов этих функций (конечно, при существовании всех пределов).

Понятие предела естественным образом приводит к понятию непрерывности: ВФНП называется непрерывной в т. x^o, если $\lim\limits_{x \to x^o} \bar{F}(x) = \bar{F}(x^o)$. Остаются верными все основные свойства непрерывных функций.

§19. Частные производные ВФНП. Матрица и определитель Якоби.

Понятие предела позволяет определить и частные производные ВФНП:
$\dfrac{\partial \bar{F}(x)}{\partial x_i} = \lim\limits_{\Delta x_i \to 0} \dfrac{\bar{F}(x + \Delta x_i) - \bar{F}(x)}{\Delta x_i} = \bar{F}\left(\dfrac{\partial y_1}{\partial x_i}, \ldots, \dfrac{\partial y_m}{\partial x_i}\right)$ (последнее равенство вытекает из предыдущих определений и свойств). Все первые частные производные ВФНП можно записать в виде матрицы: $J_{mn} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$, называемой *матрицей Якоби.*

Если $m = n$, то матрица Якоби – квадратная и имеет определитель, называемый *якобианом*, который обозначают символом $D(y) = \dfrac{D(y_1, \ldots, y_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = \det(J_n) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$.

§20. Дифференциал ВФНП.

Если все независимые переменные $x_1, \ldots, x_n$ получат приращения $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$, то все координатные функции получат соответствующие приращения $\Delta y_1, \ldots, \Delta y_m$. При условии дифференцируемости координатных функций, главные части этих приращений будут равны их дифференциалам: $dy_j = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial y_j}{\partial x_i} dx_i$, $j = 1 \div m$ (§5). Рассматривая приращение самой ВФНП, получим: $\Delta \bar{F}(x) = \bar{F}(x + \Delta x) - \bar{F}(x) = (\Delta y_1, \ldots, \Delta y_m)$. Можно показать, что главная часть приращения ВФНП равна $(dy_1, \ldots, dy_m)$, т.е. $\Delta \bar{F}(x) = (dy_1, \ldots, dy_m) + o(\sigma)$. Таким образом, дифференциал ВФНП равен: $d\bar{F}(x) = (dy_1, \ldots, dy_m)$. С помощью матрицы Якоби данного отображения дифференциал ВФНП легко представляется в матричной форме:
$d\bar{F}^T(x) = (dy_1, \ldots, dy_m)^T = J \cdot (dx_1, \ldots, dx_n)^T$, что устанавливается непосредственной проверкой. Поэтому (в частности) матрицу Якоби данной системы функций иногда называют обобщенной производной этого преобразования (вспомним формулу $dy = y'(x)dx$ для функции одной переменной).

§21. Производные сложной ВФНП.

Рассмотрим сначала простой частный случай, когда все переменные $x_к$ есть функции одной переменной t: $\bar{r} = (y_1, \ldots, y_m)$; $y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n)$; $x_j = x_j(t)$. Таким образом, $\bar{r} = \bar{r}(t)$, а производная этого вектора равна $\bar{r}'(t) = (y_1'(t), \ldots, y_m'(t))$. В свою очередь, $y_i'(t) = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial y_i}{\partial x_j} x_j'(t)$.

Легко видеть, что $(y_1',\dots,y_m')^T = J\cdot(x_1',\dots,x_n')^T$. Такое же соотношение имеет место и в общем случае: $x_j = x_j(t_1,\dots,t_k) \Rightarrow \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial t_i}^T = \left(\dfrac{\partial y_1}{\partial t_i},\dots,\dfrac{\partial y_m}{\partial t_i}\right)^T = J\cdot\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial t_i},\dots,\dfrac{\partial x_n}{\partial t_i}\right)^T, i = 1 \div k$ (опять можно вспомнить формулу $y'(t) = y'(x)x'(t)$).

<u>Пример</u>. *Векторное поле* равно: $\bar{F} = (P,Q,R); P = x^2 + y^2 + z^2, Q = y^2 + z^2, R = x^2 + z^2;$

Делается переход к сферическим координатам: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ z = \rho\sin\theta \end{cases}$; Вычислить якобиан.

{ $D = \rho^2\cos\varphi$ }.