

ТОЛКОВЫЙ СЛОВАРЬ ПОНЯТИЙ ГОЛОНОМНОЙ МЕХАНИКИ¹

Абсолютная скорость

Скорость в *абсолютном движении* — относительно системы отсчёта.

Абсолютное движение

Движение относительно системы отсчёта.

Абсолютное ускорение

Ускорение в *абсолютном движении* — относительно системы отсчёта.

Алгебра кватернионов

Четырёхмерное векторное пространство с элементами Λ и базисом $\mathbf{i}_0, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$. Базисный элемент \mathbf{i}_0 играет роль единицы ($\Lambda \circ \mathbf{i}_0 = \mathbf{i}_0 \circ \Lambda = \Lambda$), он отождествляется с единицей 1 и при умножении опускается: $\Lambda = \lambda_0 + \sum_{k=1}^3 \lambda_k \mathbf{i}_k$.

Для прочих базисных элементов ($k, l = \overline{1,3}$) в таблице умножения принимается $\mathbf{i}_k \circ \mathbf{i}_l = \begin{cases} -1, & \text{если } k = l, \\ [\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l], & \text{если } k \neq l. \end{cases}$

Активные силы

Силы $F(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, для которых известна зависимость от времени t и *состояния*, и на эту зависимость наложение или снятие *механических связей* влияние не оказывают.

Амплитудная характеристика

Зависимость модуля $R_{jk}(\Omega) = |W_{jk}(i\Omega)|$ амплитудно-фазовой характеристики $W_{jk}(i\Omega) = R_{jk}(\Omega)e^{i\psi_{jk}(\Omega)}$ от частоты Ω .

Амплитудно-фазовая характеристика

У линейной однородной системы $A\dot{q} + Bq + Cq = 0$ ($A, B, C = \text{const}$) уравнений Лагранжа отыскивается решение в виде $q = ue^{i\Omega t}$. После сокращения на экспоненту, остаётся линейная однородная алгебраическая система уравнений относительно амплитуд u . А.-ф. х. $W_{jk}(i\Omega)$ — это дробь, в знаменателе которой находится определитель матрицы коэффициентов системы, а в числителе — алгебраическое дополнение элемента с номером jk .

Асимптотическая устойчивость по Ляпунову

Решение $x = 0$ системы в нормальном виде $\dot{x} = \varphi(t, x)$, $x \in R^n$, асимптотически устойчиво, если оно: 1) устойчиво по Ляпунову; 2) существует такая Δ -окрестность точки $x = 0$ (область притяжения), что для общего решения $x(t, t_0, x_0)$ выполняется: $\{|x_0| < \Delta\} \Rightarrow \{\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, x_0) = 0\}$.

¹ При отсутствии ссылок понятие рассмотрено в [16, 17]. Терминология по возможности уточнялась по сборникам терминов [13, 15].

Бине уравнение (уравнение Бине, вторая формула Бине)

Уравнение для траекторий в центральном поле: $u'' + u = -r^2 f / mc^2$, где r, φ — полярные координаты, $u = 1/r$, $u'' = d^2u/d\varphi^2$, f — величина центральной силы, c — приведённый момент импульса.

Бинормали орт

См. *орт бинормали*.

Валентность

Число $s \neq 0$ в основном критерии каноничности преобразования гамильтоновых переменных.

Вариационная симметрия

Неособенное преобразование переменных $t, q \leftrightarrow \hat{t}, \hat{q}$, связанное с функцией

Лагранжа $L(t, q, \dot{q})$ следующим образом $L\left(\hat{t}, \hat{q}, \frac{d\hat{q}}{d\hat{t}}\right) = L(t, q, \dot{q}) \frac{dt}{d\hat{t}}$ (или в

симметричном виде $L\left(\hat{t}, \hat{q}, \frac{d\hat{q}}{d\hat{t}}\right) d\hat{t} = L\left(t, q, \frac{dq}{dt}\right) dt$).

Вариационный принцип Гамильтона [1, 11] (начало Гамильтона [1], принцип Гамильтона [13, 18], принцип Гамильтона-Остроградского [12, 13], принцип стационарного действия Гамильтона [4, 5, 8])

Путь $\tilde{q}(t)$ в расширенном координатном пространстве является прямым в том и только в том случае, если при любом варьировании $q(t, \alpha)$ при неизменных граничных точках для вариации действия по Гамильтону выполняется $\delta W|_{\alpha=0} = 0$.

Варьирование функции (проварьировать функцию)

Включение функции $\tilde{q}(t)$ в гладкое семейство функций $q(t, \alpha)$ ($q(t, 0) = \tilde{q}(t)$).

Вариация функции

Дифференциал проварьированной функции по параметру α .

Вековое уравнение (уравнение частот)

Многочленное уравнение для разрешённых частот гармонических колебаний при решении задачи малых (линейных) колебаний.

Вектор кривизны

Вычисляется по формуле $\mathbf{K} = d\boldsymbol{\tau} / ds = K\mathbf{n} = \mathbf{n} / \rho$, где $\boldsymbol{\tau}$ — орт касательной, \mathbf{n} — орт нормали, ρ — радиус кривизны.

Векторная часть кватерниона

Часть $\boldsymbol{\lambda} = \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3$ кватерниона $\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3 = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$.

Векторные инварианты

Главный вектор \mathbf{R} и главный момент \mathbf{M}_0 множества скользящих векторов.

Векторный нуль

Пара с нулевым плечом.

Винт

Совокупность: прямая линия — ось винта; расположенный на оси винта скользящий вектор \mathbf{R} ; расположенный на оси винта момент \mathbf{M}_O относительно точки O оси винта.

Виртуальное перемещение точки

Дифференциал *радиус-вектора*, не противоречащий уравнениям *механических связей* при фиксированном в уравнениях времени t .

Внешнее воздействие (входное воздействие)

Обобщённая сила, зависящая только от времени t .

Внешние силы

Силы, действующие на точки *системы материальных точек*, и вызванные взаимодействием с точками, не принадлежащими системе.

Внутренние силы

Силы взаимодействия между двумя точками, принадлежащими *системе материальных точек*.

Возможные скорости

Скорости точек системы при движении, не нарушающем наложенные на систему *механические связи*.

Возможные перемещения

Дифференциал *радиус-вектора*, не противоречащий уравнениям *механических связей*. Дифференциал *радиус-вектора*, согласованный с *возможной скоростью*.

Второй закон Кеплера

При движении под воздействием *центральной силы* площадь заметаема *радиусом-вектором*, пропорциональна времени движения.

Второй закон Ньютона (уравнение Ньютона)

Уравнение $m\mathbf{W} = \mathbf{F}$, где m — *масса материальной точки*, \mathbf{W} — *ускорение точки*, \mathbf{F} — *сила*, действующая на точку.

Входное воздействие

То же, что *внешнее воздействие*.

Вынужденная регулярная прецессия твёрдого тела с неподвижной точкой

Регулярная прецессия под воздействием приложенных к *твёрдому телу сил*. Для движения с заданными *параметрами регулярной прецессии* (*угловая скорость собственного вращения* ω_1 , *угловая скорость прецессии* ω_2 , *угол нутации* θ) момент приложенных сил относительно неподвижной точки O

равен
$$\mathbf{M}_O = [\omega_2, \omega_1] \left\{ C + \frac{\omega_2}{\omega_1} (C - A) \cos \theta \right\},$$
 C — *момент инерции*

относительно *оси динамической симметрии*, A — *момент инерции* относительно оси, расположенной в *экваториальной плоскости*.

Вынужденное движение (выход системы, отклик системы, реакция системы, установившийся процесс)

Движение, вызванное *внешним (входным) воздействием*, после затухания влияния начального состояния.

Выход системы

То же, что *вынужденное движение*.

Гамильтониан (функция Гамильтона)

Функция $H(t, q, p)$ *гамильтоновых переменных*, которая определяет правую часть *гамильтоновой системы*. Гамильтониан связан с лагранжианом

следующим образом:
$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L.$$

Гамильтонова система (уравнения Гамильтона, канонические уравнения Гамильтона)

Система обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальном виде

$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$, правая часть которой определена функцией Гамильтона

$H(t, q, p)$.

Гамильтоновы переменные (переменные Гамильтона)

Совокупность переменных: время t , *обобщенные координаты* q_i , *обобщенные импульсы* p_i .

Гармоническое воздействие

Внешнее (входное) синусоидальное воздействие с некоторыми амплитудой, частотой и фазой.

Геометрическая связь (голономная связь, конечная связь)

Механическая удерживающая связь $f(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = 0$, уравнение которой представимо в виде функции от времени t и от положения $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N$ точек системы.

Геометрия масс

Изучение *моментов инерции твёрдого тела* относительно произвольных осей.

Гироскоп

Двухстепенной силовой гироскоп, предназначенный для управления вращательным движением несущего тела.

Гироскоп

«Твёрдое тело, движущееся вокруг фиксированной в нём точки, для которого эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения [13, п. 106]». «В широком смысле слова — твёрдое тело, имеющее преимущественное вращение вокруг какой-либо оси. В более узком значении — быстро вращающийся ротор [10, с. 87]».

Гироскопическая механическая система

Механическая система называется гироскопической при выполнении следующих условий: система *стационарно задана*; потенциальная энергия зависит только от *обобщённых координат*; мощность непотенциальных сил равна нулю.

Гиростат

Совокупность *твёрдых тел*: тело с неподвижной точкой; роторы с *динамической симметрией*, вращающиеся с постоянной *угловой скоростью* вокруг связанных с телом осей *динамической симметрии* [20, с. 227].

Главная ось инерции в точке O

Ось симметрии *эллипсоида инерции* в точке O . *Центробежные моменты инерции* с упоминанием этой оси равны нулю.

Главная функция Гамильтона $W(t, q, q^0)$

Действие по Гамильтону W вычисляется на общем решении $q(t, q^0, p^0)$ уравнений Гамильтона. В результате вычисления подставляется найденная из общего решения вектор-функция $p^0 = p^0(t, q, q^0)$.

Главная центральная ось инерции

Ось симметрии *эллипсоида инерции* в *центре масс (центре инерции) C* *твёрдого тела*.

Главное колебание

Все координаты изменяются синусоидально с одинаковыми частотой и фазой, но, возможно, с разными амплитудами.

Главные координаты (нормальные координаты)

Координаты θ_i , в которых кинетическая энергия имеет вид $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i^2$, а

потенциальная — $\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i \theta_i^2$, $r_i = \text{const}$.

Главный вектор \mathbf{R}

Характеристика $\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}_i$ множества векторов $\{\mathbf{a}_i\}$ — результат такого параллельного переноса векторов, что у них совпадают начальные точки, и последующего их сложения.

Главный момент \mathbf{M}_O относительно точки O

Характеристика $\mathbf{M}_O = \sum_{i=1}^N \mathbf{m}_O(\mathbf{a}_i)$ множества векторов $\{\mathbf{a}_i\}$ — *моменты $\mathbf{m}_O(\mathbf{a}_i)$* отдельных векторов откладываются от точки O , затем складываются.

Годограф Михайлова

В многочлен $f(\lambda)$ подставляется вместо переменной λ мнимая переменная $i\omega$, затем выделяются действительная и мнимая части $f(i\omega) = u(\omega) + iv(\omega)$, и при изменении $0 \leq \omega < \infty$ на комплексной плоскости (u, v) изображается кривая.

Голономная связь

То же, что *геометрическая связь*.

Голономная система

Механическая система, на которую наложены *геометрические (голономные, конечные) связи*.

Группа вариационных симметрий

Группа преобразований, все преобразования которой *вариационные симметрии*.

Гюйгенса Х., Штейнера Я. теорема

Моменты инерции I , I_C твёрдого тела относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс C тела, связаны формулой $I = I_C + md^2$, где m — масса тела, d — расстояние между осями.

Действие по Гамильтону

Функционал $W = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q})|_{q=q(t)} dt$, который ставит в соответствие функции

$q(t)$, определённой на интервале $[t_0, t_1]$, число $(L(t, q, \dot{q}))$ — *функция Лагранжа*).

Действие по Лагранжу

Функционал $W^* = \int_{q_1^0}^{q_1^1} P(t, q, q')|_{q=q(q_1)} dq_1$, который ставит в соответствие

функции $q(q_1)$, определённой на интервале $[q_1^0, q_1^1]$, число $(P(t, q, q'))$ — *функция Якоби*).

Действительная характеристика

Зависимость действительной части $P_{jk}(\Omega) = \text{Re} W_{jk}(i\Omega)$ *амплитудно-фазовой характеристики* $W_{jk}(i\Omega) = P_{jk}(\Omega) + iS_{jk}(\Omega)$ от частоты Ω .

Декартовы координаты материальной точки

Коэффициенты x_k разложения *радиуса-вектора* по ортам, связанного с системой отсчёта базиса: $\mathbf{r} = \sum_{k=1}^3 x_k \mathbf{i}_k$.

Дивергентная симметрия

Неособенное преобразование переменных $t, q \leftrightarrow \bar{t}, \bar{q}$, связанное с *функцией*

Лагранжа $L(t, q, \dot{q})$ следующим образом $L\left(\bar{t}, \bar{q}, \frac{d\bar{q}}{d\bar{t}}\right) + \frac{df(\bar{t}, \bar{q})}{d\bar{t}} = L(t, q, \dot{q}) \frac{dt}{d\bar{t}}$

или в симметричном виде $L\left(\bar{t}, \bar{q}, \frac{d\bar{q}}{d\bar{t}}\right)d\bar{t} + df(\bar{t}, \bar{q}) = L\left(t, q, \frac{dq}{dt}\right)dt$.

Динамическая симметрия в точке O

У твёрдого тела в данной точке есть *ось динамической симметрии*.

Динамические уравнения Эйлера

Уравнения движения *твёрдого тела* с неподвижной точкой O :

$$A\dot{p} + (C - B)qr = M_1,$$

$$B\dot{q} + (A - C)pr = M_2,$$

$$C\dot{r} + (B - C)pq = M_3,$$

где A, B, C — моменты инерции относительно главных осей в точке O , p, q, r — проекции угловой скорости на главные оси, M_1, M_2, M_3 — проекции главного момента сил относительно точки O .

Диссипативная система

Система называется диссипативной при выполнении следующих условий: система *стационарно задана*; потенциальная энергия зависит только от *обобщённых координат*; мощность непотенциальных сил неположительна. При выполнении более строгого условия: мощность непотенциальных сил отрицательна, если для *обобщённых скоростей* справедливо $\dot{q}_1^2 + \dots + \dot{q}_n^2 \neq 0$, — система называется *определённо-диссипативной*.

Диссипативная функция Релея $\Phi(t, q, \dot{q})$

Квадратичная форма $\Phi(t, q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i,l=1}^n b_{il}(t, q) \dot{q}_i \dot{q}_l$, при помощи которой часть

обобщённых сил выражается следующим образом $Q_i^* = -\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i}$.

Дифференциальные связи

Механические связи, условия $f_l(t, \mathbf{r}_i, \mathbf{V}_i) \leq 0$ которых содержат скорости \mathbf{V}_i материальных точек.

Закон Кеплера, второй

См. *второй закон Кеплера*.

Закон Кеплера, первый

См. *первый закон Кеплера*.

Закон Кеплера, третий

См. *третий закон Кеплера*.

Закон Ньютона, второй

См. *второй закон Ньютона*.

Закон Ньютона, первый

См. *первый закон Ньютона*.

Закон Ньютона, третий

См. *третий закон Ньютона*.

Закон движения центра инерции

Уравнение $m\mathbf{W}_C = \mathbf{R}^{\text{внешн}}$, где $m = \sum_{i=1}^N m_i$ — суммарная масса механической системы, \mathbf{W}_C — ускорение центра инерции системы, $\mathbf{R}^{\text{внешн}}$ — главный вектор внешних сил.

Закон изменения импульса (количества движения)

Уравнение $\dot{\mathbf{Q}} = \mathbf{R}^{\text{внешн}}$, где \mathbf{Q} — импульс (количество движения) системы, $\mathbf{R}^{\text{внешн}}$ — главный вектор внешних сил.

Закон изменения кинетического момента (момента импульса, момента количества движения)

Уравнение $\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{M}_O^{\text{внешн}} - m[\mathbf{V}_O, \mathbf{V}_C]$, где \mathbf{K}_O — момент импульса системы (момент количества движения, кинетический момент) относительно

точки O , $\mathbf{M}_O^{\text{внешн}}$ — главный момент внешних сил, действующих на систему,
 $m = \sum_{i=1}^N m_i$ — суммарная масса механической системы, \mathbf{V}_O — скорость
точки O , \mathbf{V}_C — скорость центра инерции C системы.

Закон изменения кинетической энергии в дифференциальной форме

Уравнение $dT = \delta A$, где dT — дифференциал от кинетической энергии системы, δA — элементарная работа сил (внешних и внутренних), действующих на систему.

Закон изменения кинетической энергии в дифференциальной форме

Уравнение $dT = \delta A$, где dT — дифференциал от кинетической энергии системы, δA — элементарная работа сил (внешних и внутренних), действующих на систему.

Закон изменения кинетической энергии в интегральной форме

Уравнение $T_2 - T_1 = A_{12}$, где T_1, T_2 — кинетические энергии системы в начале и в конце пути $\mathbf{r}_i(t)$ системы, A_{12} — работа сил (внешних и внутренних), действующих на систему, совершённая на пути $\mathbf{r}_i(t)$.

Закон изменения количества движения

См. закон изменения импульса.

Закон изменения момента импульса

См. закон изменения кинетического момента.

Закон сохранения импульса (количества движения)

Если проекция $R_z^{\text{внешн}}$ на ось z главного вектора $\mathbf{R}^{\text{внешн}}$ внешних сил равна нулю, то имеют место закон сохранения проекции импульса (количества движения) на ось z и равномерность движения в направлении z центра инерции системы.

Закон сохранения кинетического момента (момента импульса, момента количества движения)

Если проекция $M_z^{\text{внешн}}$ на ось z главного момента $\mathbf{M}_O^{\text{внешн}}$ внешних сил равна нулю, то в предположении $\mathbf{V}_O = 0$ (или $\mathbf{V}_O \parallel \mathbf{V}_C$) имеет место закон сохранения проекции кинетического момента (момента импульса, момента количества движения) на ось z .

Закон сохранения количества движения

См. закон сохранения импульса.

Закон сохранения момента импульса

См. закон сохранения кинетического момента.

Закон сохранения момента количества движения

См. закон сохранения кинетического момента.

Закон сохранения полной механической энергии

Полная механическая энергия консервативной системы сохраняется во время движения.

Замкнутая система

Механическая система, материальные точки которой взаимодействуют только с точками, принадлежащими системе.

Знакоопределённые функции

Положительно определённые, отрицательно определённые функции.

Знакопостоянные функции

Положительно постоянные, отрицательно постоянные функции.

Знакопеременные функции

Функции, принимающие в любой окрестности нуля как положительные, так и отрицательные значения.

Идеальная связь

Такая *геометрическая связь*, что *обобщённые силы*, соответствующие *реакциям связи*, равны нулю. Эквивалентное определение: на любом *виртуальном перемещении* системы элементарная работа сил *реакции связи* равна нулю.

Изолированная материальная точка

Точка, не взаимодействующая с другими точками.

Изохронный дифференциал $\delta F(t, q)$

Дифференциал при фиксированном времени t :
$$\delta F(t, q) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial q_i} dq_i .$$

Импульс (количество движения) системы материальных точек

Вычисляется как *главный вектор* по формуле
$$\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{V}_i = \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i ,$$
 где m_i , \mathbf{V}_i , \mathbf{r}_i — *масса, скорость и радиус-вектор* отдельной точки.

Импульс (количество движения) точки

Вычисляется по формуле $\mathbf{Q} = m\mathbf{V} = m\dot{\mathbf{r}}$, где m , \mathbf{V} , \mathbf{r} — *масса, скорость и радиус-вектор* точки.

Инволютивная система (система в инволюции)

Система функций $\varphi_i(t, q, p)$, $i = \overline{1, m}$, *гамильтоновых переменных*, для *скобок Пуассона* которых выполняется $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$, $i, j = \overline{1, m}$.

Инерциальная система отсчёта

Система, в которой *изолированная материальная точка* движется с *постоянной скоростью*: $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{r}} = \text{const}$.

Интеграл площадей

Сохранение *момента импульса* при движении под воздействием *центральной силы* (см. *второй закон Кеплера*).

Интегральный инвариант

Определённый интеграл от функции *гамильтоновых переменных*, не меняющий своего значения при переносе области интегрирования определённым образом согласованно с *фазовым потоком гамильтоновой системы*.

Интегральный инвариант Пуанкаре

Контурный интеграл
$$\oint_C \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i ,$$
 не меняющий своего значения при переносе контура C *фазовым потоком гамильтоновой системы*.

Интегральный инвариант Пуанкаре-Картана

Контурный интеграл $\oint \sum_{C_i=1}^n p_i \delta q_i - H \delta t$: по любым двум согласованным

контурам C_0 и C_1 , охватывающим трубку прямых путей, интеграл принимает одно и то же значение. Трубка порождается функцией Гамильтона H , входящей в подынтегральное выражение,

Интегрируемая дифференциальная связь

Уравнение дифференциальной связи $f_1(t, \mathbf{r}_i, \mathbf{V}_i) = 0$ допускает эквивалентную замену уравнением геометрической связи. Например, уравнение $\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = 0$ заменяется уравнением $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 - \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

Интерпретация Пуансо

Интерпретирует движение твёрдого тела с неподвижной точкой в случае Эйлера. В начале движения образуется плоскость, касательная к эллипсоиду инерции в точке пересечения эллипсоида начальной угловой скоростью. В дальнейшем плоскость занимает неизменное положение, а эллипсоид инерции с неподвижным центром катается по ней без проскальзывания.

Канонические уравнения Гамильтона

То же, что гамильтонова система.

Каноническое преобразование

Такое неособенное преобразование $\tilde{q} = \tilde{q}(t, q, p)$, $\tilde{p} = \tilde{p}(t, q, p)$ гамильтоновых переменных, что указанная замена переменных в любой гамильтоновой системе приводит к гамильтоновой системе.

Касательное (тангенциальное) ускорение

Проекция ускорения точки на касательную к траектории точки. По величине равно $W_\tau = dV/dt$, где V — величина скорости точки.

Касательный орт

См. орт касательной.

Касательный вектор к координатной линии

В выражении радиуса-вектора $\mathbf{r}(q_1^0, q_2^0, q_3^0)$ через криволинейные (обобщённые) координаты изменяется только одна координата, например, q_2 . К построенной кривой (координатной линии) в точке q_1^0, q_2^0, q_3^0 строится касательный вектор $\mathbf{H}_i(q) = \partial \mathbf{r}(q) / \partial q_i$.

Кватернион

См. алгебра кватернионов.

Кёнига система

См. система Кёнига.

Кёнига теорема для системы материальных точек

Кинетическая энергия системы материальных точек равна $T = \frac{1}{2}mV_C^2 + T^{\text{отн}}$,

где $m = \sum_{i=1}^N m_i$ — суммарная масса механической системы, V_C — скорость центра инерции C системы, $T^{\text{отн}}$ — кинетическая энергия в системе Кёнига.

Кёнига теорема для твёрдого тела

Кинетическая энергия твёрдого тела равна $T = \frac{1}{2}mV_C^2 + \frac{1}{2}I_\omega\omega^2$, где $m = \sum_{i=1}^N m_i$ — суммарная масса механической системы, V_C — скорость центра масс C системы, ω — величина угловой скорости тела, I_ω — момент инерции тела относительно параллельной вектору ω оси, проходящей через центр масс тела.

Кеплера второй закон

См. второй закон Кеплера.

Кеплера первый закон

См. первый закон Кеплера.

Кеплера третий закон

См. третий закон Кеплера.

Кинематические уравнения Эйлера

Уравнения

$$p = \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi,$$

$$q = \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi,$$

$$r = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi},$$

или в нормальном виде

$$\dot{\psi} = (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \frac{1}{\sin \theta},$$

$$\dot{\theta} = p \cos \varphi - q \sin \varphi,$$

$$\dot{\varphi} = (p \sin \varphi + q \cos \varphi) \operatorname{ctg} \theta,$$

где обозначено ψ , θ , φ — углы Эйлера, p , q , r — проекции угловой скорости на главные оси инерции.

Кинематические уравнения в параметрах Родрига-Гамильтона

Уравнения

$$\begin{pmatrix} \dot{\lambda}_0 \\ \dot{\lambda}_1 \\ \dot{\lambda}_2 \\ \dot{\lambda}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -p & -q & -r \\ p & 0 & r & -q \\ q & -r & 0 & p \\ r & q & -p & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix},$$

где λ_0 , λ_1 , λ_2 , λ_3 — параметры Родрига-Гамильтона (координаты кватерниона), p , q , r — проекции угловой скорости на главные оси инерции.

Кинематический винт

Винт, построенный для множества угловых скоростей.

Кинетическая энергия системы материальных точек

Вычисляется по формуле $T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i V_i^2$, где m_i , V_i — масса и скорость отдельной точки.

Кинетическая энергия твёрдого тела с неподвижной точкой

Вычисляется по формуле $T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 I_k \omega_k^2 - \sum_{k<l} I_{kl} \omega_k \omega_l$, где I_k , I_{kl} — элементы тензора инерции для конкретного ортонормированного базиса, ω_k — коэффициенты разложения угловой скорости по этому базису. Если базис определяет главные оси инерции, формула упрощается: $T = \frac{1}{2} (Ap^2 + Bq^2 + Cr^2)$, где A , B , C — моменты инерции тела относительно главных осей, p , q , r — проекции угловой скорости на главные оси инерции.

Кинетический момент (момент импульса, момент количества движения) системы материальных точек

Вычисляется по формуле $\mathbf{K}_O = \sum_{i=1}^N [\mathbf{r}_i, m_i \mathbf{V}_i]$, где m_i , \mathbf{V}_i — масса и скорость материальной точки номер i , \mathbf{r}_i — вектор, проведённый из точки O в точку номер i . Кинетический момент откладывается из точки O .

Кинетический фокус (сопряжённые кинетические фокусы)

Две точки (t_0, q^0) , (t_f, q^f) расширенного координатного пространства R^{n+1} , расположенные на решении $q(t) = q(t, t_0, q^0, \dot{q}^0)$ уравнений Лагранжа, называются сопряжёнными кинетическими фокусами, если справедливо

$$\text{равенство } \det \left\| \frac{\partial q_i(t_f, t_0, q^0, \dot{q}^0)}{\partial \dot{q}_k^0} \right\| = 0.$$

Ковалевской случай

Тело с неподвижной точкой совершает движение в однородном поле тяжести Земли. Тело обладает динамической симметрией, для моментов инерции относительно главных осей инерции выполняется $A = B = 2C$. Центр масс расположен в экваториальной плоскости.

Количество движения системы материальных точек

То же, что импульс системы материальных точек.

Количество движения материальной точки

То же, что импульс материальной точки.

Конечная связь

То же, что геометрическая связь.

Конечномерная механическая система

Система, состоящая из конечного числа материальных точек и конечного числа твёрдых тел. Эквивалентное определение: механическая система с конечным числом степеней свободы.

Консервативная система

Система называется консервативной при выполнении следующих условий: система *стационарно задана*; потенциальная энергия зависит только от *обобщённых координат*; непотенциальные силы отсутствуют.

Конфигурационное многообразие

Разрешённые связями положения механической системы, заданные в некотором пространстве, например, в прямом произведении декартовых координат отдельных точек системы.

Конформная симметрия

Неособенное преобразование переменных $t, q \leftrightarrow \hat{t}, \hat{q}$, связанное с функцией

$$\text{Лагранжа } L(t, q, \dot{q}) \text{ следующим образом } L\left(\hat{t}, \hat{q}, \frac{d\hat{q}}{d\hat{t}}\right) = cL(t, q, \dot{q}) \frac{dt}{d\hat{t}} \quad c = \text{const}$$

$$(\text{или в симметричном виде } L\left(\hat{t}, \hat{q}, \frac{d\hat{q}}{d\hat{t}}\right) d\hat{t} = cL\left(t, q, \frac{dq}{dt}\right) dt).$$

Координатная линия

Задаётся параметрически: в выражении *радиус-вектора* $\mathbf{r}(q_1^0, q_2^0, q_3^0)$ через *криволинейные (обобщённые) координаты* изменяется только одна координата, например, q_2 .

Координатное пространство

n -мерное пространство с координатами q_1, \dots, q_n (*обобщённые координаты*).

Кориолиса теорема (теорема Кориолиса, теорема о сложении ускорений в сложном движении)

Абсолютное ускорение $\mathbf{W}_{\text{абс}}$ точки в сложном движении определяется формулой $\mathbf{W}_{\text{абс}} = \mathbf{W}_{\text{пер}} + \mathbf{W}_{\text{отн}} + \mathbf{W}_{\text{кор}}$, где $\mathbf{W}_{\text{пер}}$ — *переносное ускорение*, $\mathbf{W}_{\text{отн}}$ — *относительное ускорение*, $\mathbf{W}_{\text{кор}} = 2[\boldsymbol{\omega}_{\text{пер}}, \mathbf{V}_{\text{отн}}]$ ($\boldsymbol{\omega}_{\text{пер}}$ — *угловая скорость подвижной системы координат*, $\mathbf{V}_{\text{отн}}$ — *относительная скорость точки*) — *кориолисово ускорение*.

Кориолисова сила инерции

Вычисляется по формуле $\mathbf{J}_{\text{кор}} = -2m[\boldsymbol{\omega}_{\text{пер}}, \mathbf{V}_{\text{отн}}]$, где m — *масса точки*, $\boldsymbol{\omega}_{\text{пер}}$ — *угловая скорость подвижной системы координат*, $\mathbf{V}_{\text{отн}}$ — *относительная скорость точки*.

Кориолисово ускорение

Вычисляется по формуле $\mathbf{W}_{\text{кор}} = 2[\boldsymbol{\omega}_{\text{пер}}, \mathbf{V}_{\text{отн}}]$, где $\boldsymbol{\omega}_{\text{пер}}$ — *угловая скорость подвижной системы координат*, $\mathbf{V}_{\text{отн}}$ — *относительная скорость точки*.

Коэффициент Ламе

Величина *касательного вектора к координатной кривой*:

$$H_i(q) = |\mathbf{H}_i(q)| = \left| \frac{\partial \mathbf{r}(q)}{\partial q_i} \right|.$$

Кривизна

См. *вектор кривизны*.

Криволинейные (обобщённые координаты) материальной точки

Координаты q_1, q_2, q_3 , задающие *радиус-вектор* $\mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$ точки и удовлетворяющие условиям: 1. числа q_1, q_2, q_3 находятся во взаимно однозначном соответствии с любым положением точки в *системе отсчёта*; 2. *касательные векторы к координатным линиям* в каждой точке *системы отсчёта* линейно независимы.

Критерий Михайлова

Многочлен степени n устойчив тогда и только тогда, когда для приращения аргумента θ у *годографа Михайлова* выполняется $\Delta_{\omega=0}^{\infty} \theta = n \frac{\pi}{2}$.

Критерий равновесия стационарно заданной системы (принцип возможных перемещений)

Положение $\mathbf{r}_i^0, i = \overline{1, N}, (q_k^0, k = \overline{1, n})$ *стационарно заданной системы с идеальными связями* является *положением равновесия* тогда и только тогда, когда на любом *возможном перемещении* $d\mathbf{r}_i$ из этого положения для элементарной работы *активных сил* \mathbf{F}_i выполняется

$$\delta A = \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i, d\mathbf{r}_i) = \sum_{k=1}^n Q_k(t, q^0, 0) dq_k = 0. \quad \text{Эквивалентная формулировка:}$$

положение $\mathbf{r}_i^0, i = \overline{1, N}, (q_k^0, k = \overline{1, n})$ *стационарно заданной системы с идеальными связями* является *положением равновесия* тогда и только тогда, когда для *обобщённых сил* тождественно по времени t выполняется $Q_k(t, q^0, 0) = 0$.

Критерий Рауса-Гурвица

Многочлен устойчив тогда и только тогда, когда все *главные центральные миноры определителя Гурвица* положительны.

Лагранжа случай

Тело с неподвижной точкой совершает движение в однородном поле тяжести Земли. Тело обладает *динамической симметрией*. *Центр масс* расположен на *оси динамической симметрии*.

Лагранжева система (уравнения Лагранжа)

Система обыкновенных дифференциальных уравнений вычисляется или, исходя из кинетической энергии $T(t, q, \dot{q})$ и *обобщённых сил* $Q_i(t, q, \dot{q})$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k, \text{ или, исходя из лагранжиана } L(t, q, \dot{q}): \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0.$$

Лагранжевы переменные (переменные Лагранжа)

Совокупность переменных: время t , *обобщенные координаты* q_i , *обобщенные скорости* \dot{q}_i .

Лагранжиан (функция Лагранжа)

Функция $L(t, q, \dot{q})$ лагранжевых переменных, при помощи которой вычисляются уравнения Лагранжа. Лагранжиан связан с гамильтонианом следующим образом: $L = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H$.

Локальный базис

Касательные векторы $\mathbf{H}_1(q), \mathbf{H}_2(q), \mathbf{H}_3(q)$ к координатным кривым, которые по определению криволинейных координат в каждой точке системы отсчёта линейно независимы.

Малые колебания (линейные колебания)

Движение консервативной системы в окрестности устойчивого положения равновесия. Движение определяется линейными уравнениями Лагранжа и является — линейной комбинацией главных колебаний.

Масса

Положительное число m , приписываемое материальной точке.

Материальная точка

Точка, которой поставлено в соответствие положительное число — масса m .

Матрица направляющих косинусов (матрица поворота)

Матрица $A = \|a_{kl}\|$ задаёт разложение каждого вектора ортонормированного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, связанного с твёрдым телом, по базису $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, связанному с системой отсчёта: $\mathbf{e}_k = \sum_{l=1}^3 a_{kl} \mathbf{i}_l$.

Матрица поворота

См. матрица направляющих косинусов.

Механическая система

Система, состоящая из материальных точек.

Механические связи

Ограничения $f_l(t, \mathbf{r}_i, \mathbf{V}_i) \leq 0$, наложенные на состояния механической системы, справедливые для начальных состояний и во время движения.

Мещерского уравнение

Уравнение поступательного движения тела переменного состава:

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{R}^{\text{внешн}} - \sum_{i=1}^n \frac{dm_i^{\text{yx}}}{dt} \mathbf{u}_i^{\text{yx}} + \sum_{k=1}^r \frac{dm_k^{\text{пп}}}{dt} \mathbf{u}_k^{\text{пп}}, \text{ где } m, m_i^{\text{yx}}, m_k^{\text{пп}} \text{ — масса тела,}$$

уходящие и приходящие массы, \mathbf{V} — скорость тела, $\mathbf{R}^{\text{внешн}}$ — главный вектор действующих на тело внешних сил, \mathbf{u}_i^{yx} , $\mathbf{u}_k^{\text{пп}}$ — скорости уходящих и приходящих масс в подвижной системе, связанной с телом.

Мнимая характеристика

Зависимость мнимой части $S_{jk}(\Omega) = \text{Im} W_{jk}(i\Omega)$ амплитудно-фазовой характеристики $W_{jk}(i\Omega) = P_{jk}(\Omega) + iS_{jk}(\Omega)$ от частоты Ω .

Момент вектора

Вычисляется по формуле $\mathbf{M}_O(\mathbf{a}) = [\mathbf{r}, \mathbf{a}]$, где \mathbf{r} проводится из точки O к начальной точке вектора \mathbf{a} .

Момент импульса системы материальных точек

См. *кинетический момент*.

Момент инерции твёрдого тела относительно оси

Вычисляется по формуле $I_e = \sum_i m_i h_i^2$, где m_i — масса частицы тела, h_i — расстояние частицы до оси e .

Момент инерции твёрдого тела центробежный

Для фиксированной ортонормированной системы координат вычисляются через координаты x_{i1} , x_{i2} , x_{i3} частицы тела по формулам $I_{12} = I_{21} = \sum_i m_i x_{i1} x_{i2}$,

$I_{13} = I_{31} = \sum_i m_i x_{i1} x_{i3}$, $I_{23} = I_{32} = \sum_i m_i x_{i2} x_{i3}$, где m_i — масса частицы тела.

Момент количества движения системы материальных точек

См. *кинетический момент*.

Момент силы

См. *момент вектора*.

Мощность силы

Вычисляется по формуле $N = (\mathbf{F}, \mathbf{V})$, где \mathbf{V} — скорость точки приложения силы \mathbf{F} .

Натуральная система

Система, динамика которой описывается *уравнениями Лагранжа с функцией Лагранжа* $L = T - V$ (T — кинетическая энергия, V — *обобщённый потенциал*).

Начало Гамильтона [1]

То же, что *вариационный принцип Гамильтона*.

Неизолированная материальная точка

Точка, взаимодействующая с другими точками.

Неинерциальная система отсчёта

Система, в которой *изолированная материальная точка* движется с *переменной скоростью*: $\mathbf{V}(t) \neq \text{const}$.

Ненатуральная система

Лагранжева система вычисляется, исходя из *лагранжиана* $L(t, q, \dot{q})$:

$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$, но в отличие от *натуральной системы лагранжиан*

$L(t, q, \dot{q})$ не есть кинетическая минус потенциальная энергии.

Необходимое условие устойчивости многочлена

Если *многочлен* $a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1} \lambda + a_m$, $a_0 > 0$, *устойчив*, то для его коэффициентов выполняется: $a_1 > 0, \dots, a_m > 0$.

Нестационарно заданная система

Положения $\mathbf{r}_i(t, q)$ точек *механической системы* есть вектор-функции не только *обобщённых координат*, но и явно времени t .

Нестационарные связи (реономные связи)

Механические связи, условия $f_i(t, \mathbf{r}_i, \mathbf{V}_i) \leq 0$ которых содержат явно время t .

Неудерживающая связь

Ограничение $f(t, \mathbf{r}_i, \mathbf{V}_i) \leq 0$ типа неравенства, наложенное на состояния механической системы.

Неустойчивость по Ляпунову

Решение $x = 0$ системы в нормальном виде $\dot{x} = \varphi(x)$, $x \in R^n$, неустойчиво по Ляпунову, если для общего решения $x(t - t_0, x_0)$ выполняется:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists |x_0| < \delta, \exists t_1 \geq t_0, |x(t_1 - t_0, x_0)| \geq \varepsilon.$$

Норма кватерниона [9, § 6]

Вычисляется по формуле $\Lambda \circ \tilde{\Lambda} = \tilde{\Lambda} \circ \Lambda = \lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$, где $\tilde{\Lambda}$ — кватернион, сопряжённый кватерниону Λ , λ_k — параметры Родрига-Гамильтона.

Нормали орт

См. орт нормали.

Нормальное ускорение W_n

Проекция ускорения на направление вектора кривизны \mathbf{K} (направление орта нормали \mathbf{n}).

Нормальные координаты

То же, что главные координаты.

Нормированный кватернион

Кватернион, норма которого равна единице.

Ньютона второй закон

См. второй закон Ньютона.

Ньютона первый закон

См. первый закон Ньютона.

Ньютона третий закон

См. третий закон Ньютона.

Область притяжения

Такая Δ -окрестность решения $x \equiv 0$ системы в нормальном виде $\dot{x} = \varphi(x)$, $x \in R^n$, что для общего решения $x(t - t_0, x_0)$ выполняется: $\{|x_0| < \Delta\} \Rightarrow \{\lim_{t \rightarrow \infty} x(t - t_0, x_0) = 0\}$.

Обобщённая сила

Положение любой точки механической системы выражено как функция $\mathbf{r}_i(t, q)$ времени и обобщённых координат. Обобщённая сила, соответствующая координате q_k , определяется выражением

$$Q_k = \sum_i \left(\mathbf{F}_i, \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_k} \right), \text{ где } \mathbf{F}_i \text{ — сила, приложенная к точке } \mathbf{r}_i. \text{ Эквивалентное}$$

определение: коэффициент при δq_k в элементарной работе $\delta A = \sum_i (\mathbf{F}_i, \delta \mathbf{r}_i) = \sum_k Q_k \delta q_k$ на виртуальных перемещениях системы.

Обобщённо консервативная система

Гамильтонова система, у которой функция Гамильтона $H(q, p)$ явно не зависит от времени t . Обобщённо консервативная система порождает *первый интеграл* $H(q, p) = c$ соответствующей гамильтоновой системы.

Обобщённые импульсы p_i

Определяются через функцию Лагранжа: $p_i = \frac{\partial L(t, q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_i}$.

Обобщённые координаты q_i

Координаты q_1, \dots, q_n , определяющие допустимые наложенными на систему связями положения механической системы и удовлетворяющие следующим требованиям:

- 1) числа q_1, \dots, q_n в момент времени t находятся во взаимно однозначном соответствии с положениями, допустимыми связями;
- 2) координаты q_1, \dots, q_n независимы — можно изменять одну из них при фиксированных других;
- 3) при изменении одной координаты q_j в пространстве, в котором задаётся произвольное положение системы, вычерчивается координатная линия и касательный вектор \mathbf{H}_j к ней в точке q^0 , векторы $\mathbf{H}_1, \dots, \mathbf{H}_n$ должны быть линейно независимы.

Обобщённые скорости \dot{q}_i

Производные по времени t от обобщённых координат q_i .

Обобщённый потенциал

Функция $V(t, q, \dot{q})$, связанная с обобщёнными силами Q_k следующим

выражением: $Q_k = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial V}{\partial q_k}$.

Обратная задача лагранжева формализма

Возможно ли конкретную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка эквивалентно (не меняя множества решений) заменить уравнениями Лагранжа? При положительном ответе проделать эту замену.

Обратные теоремы теории интегральных инвариантов

Теоремы утверждают: если для системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальном виде имеет место инвариантность интеграла Пуанкаре (или Пуанкаре-Картана), то система уравнений — гамильтонова.

Общее уравнение динамики

Для механических систем с идеальными связями справедливо динамическое

уравнение $\sum_{i=1}^N (m_i \mathbf{W}_i - \mathbf{F}_i, \delta \mathbf{r}_i) = 0$, где m_i — масса отдельной точки, \mathbf{W}_i —

ускорение точки, \mathbf{F}_i — активная сила, приложенная к точке, $\delta \mathbf{r}_i$ — произвольное виртуальное перемещение из этой точки.

Общее уравнение статики (принцип виртуальных перемещений)

Механическая система с идеальными связями находится в положении равновесия \mathbf{r}_i^0 тогда и только тогда, когда в положении \mathbf{r}_i^0 справедливо уравнение $\sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i, \delta \mathbf{r}_i) = 0$, где \mathbf{F}_i — активные силы, приложенные к точкам

\mathbf{r}_i^0 , $\delta \mathbf{r}_i$ — произвольное виртуальное перемещение из \mathbf{r}_i^0 [13].

Одномерное тело

Твёрдое тело, которому соответствует одномерная выпуклая оболочка.

Однопараметрическая группа преобразований

Общее решение $\bar{x} = \bar{x}(x, t)$ системы обыкновенных дифференциальных автономных (стационарных) уравнений в нормальном виде $\dot{\bar{x}} = \varphi(\bar{x})$, $\bar{x} \in R^n$, при начальных условиях $\bar{x}(0) = x$.

Окольный путь

График движения в одном из пространств (координатном, расширенном координатном и т. д.) не являющийся решением уравнений динамики (уравнений Лагранжа, уравнений Гамильтона и т. д.). Или: график движения $q(q_1)$ в координатном пространстве, не являющийся решением уравнений Якоби.

Определённо-диссипативная система

См. диссипативная система.

Определитель Гурвица

Строится по коэффициентам многочлена $a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1} \lambda + a_m$:

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & \cdot \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & \cdot \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & \ddots & \cdot \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_m \end{vmatrix}.$$

Размер определителя совпадает со степенью m многочлена (см. главную диагональ).

Орт бинормали \mathbf{b}

Вводится так, чтобы вместе с ортом касательной $\boldsymbol{\tau}$ и ортом нормали \mathbf{n} три вектора $\{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}, \mathbf{b}\}$ представляли собой правый ортонормированный базис: $\mathbf{b} = [\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}]$.

Орт касательной $\boldsymbol{\tau}$

Орт, расположенный на касательной к траектории точки. Определяется формулой $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{r}(s)/ds$, где $\mathbf{r}(s)$ — радиус-вектор как функция длины дуги s .

Орт нормали \mathbf{n}

Направлен к *центру кривизны траектории точки* — центру окружности, аппроксимирующей траекторию в данной точке. Определяется формулой $\mathbf{K} = d\boldsymbol{\tau} / ds = K\mathbf{n} = \mathbf{n} / \rho$, где \mathbf{K} — *вектор кривизны*, K — его величина, ρ — *радиус кривизны*.

Ортогональная система криволинейных координат

Система, у которой векторы *локального базиса* попарно перпендикулярны.

Ортонормированный базис

В пространстве фиксируются такие четыре точки O, A_1, A_2, A_3 , что для

базисных векторов $\mathbf{i}_k = \overline{O, A_k}$ выполняется $(\mathbf{i}_k, \mathbf{i}_l) = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, k = l, \\ 0, k \neq l. \end{cases}$

Основной критерий каноничности преобразования [6]

Преобразование $\tilde{q} = \tilde{q}(t, q, p)$, $\tilde{p} = \tilde{p}(t, q, p)$ является *каноническим* тогда и только тогда, когда существуют такая *валентность* $c = \text{const}$ и такая *производящая функция* F , что в силу преобразования $q, p \leftrightarrow \tilde{q}, \tilde{p}$ справедливо

$$\text{тождество } \sum_{i=1}^n \tilde{p}_i d\tilde{q}_i - \tilde{H}dt = c \left(\sum_{i=1}^n p_i dq_i - Hdt \right) - dF.$$

Ось винта (ось минимальных моментов)

Главный момент относительно точек этой оси расположен на этой оси.

Ось динамической симметрии

Эллипсоид инерции — эллипсоид вращения вокруг этой оси.

Ось минимальных моментов

То же, что ось винта.

Отделимая координата

Обобщённая координата q_k называется *отделимой*, если от неё и от соответствующего ей *обобщённого импульса* p_k функция Гамильтона зависит следующим образом:

$$H(t, z, q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n, p_1, \dots, p_{k-1}, p_{k+1}, \dots, p_n), \quad z = f(q_k, p_k).$$

Отделимая координата порождает *первый интеграл* $f(q_k, p_k) = c$ соответствующей *гамильтоновой системы*.

Отклик системы

То же, что *вынужденное движение*.

Относительная скорость $V_{\text{отн}}$ (V_r)

Скорость относительно *подвижного пространства*.

Относительное движение

Движение относительно *подвижного пространства*.

Относительное ускорение $W_{\text{отн}}$ (W_r)

Ускорение относительно *подвижного пространства*.

Отрицательно определённая функция

Для функции в некоторой области выполняется $V(x) \begin{cases} = 0, & x = 0, \\ < 0, & x \neq 0. \end{cases}$

Отрицательно постоянная функция

Для функции в некоторой области выполняется $V(x) \leq 0$.

Пара

Два вектора \mathbf{a} и $-\mathbf{a}$, расположенные на параллельных прямых.

Пара чистых вращений

Пара угловых скоростей $\boldsymbol{\omega}$ и $-\boldsymbol{\omega}$, задающих чистые вращения. Эквивалентна поступательному движению.

Параметры Родрига-Гамильтона

Коэффициенты $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ разложения $\Lambda = \lambda_0 + \sum_{k=1}^3 \lambda_k \mathbf{i}_k$ кватерниона по базису $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, связанному с системой отсчёта. По формуле $\mathbf{e}_k = \Lambda \circ \mathbf{i}_k \circ \tilde{\Lambda}$ задают положение ортов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, связанных с телом.

Параметры регулярной прецессии

Угловая скорость собственного вращения, угловая скорость прецессии, угол нутации.

Первый закон Кеплера

Планеты движутся по эллипсам, в фокусах которых находится Солнце.

Первый закон Ньютона

Изолированная материальная точка в инерциальной системе отсчёта движется с постоянной скоростью.

Первый интеграл

Функция $f(t, x)$, которая при подстановке в неё любого решения $x(t)$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальном виде $\dot{x} = \varphi(t, x), x \in R^n$, сохраняет как функция t своё значение: $f(t, x(t)) = f(t_0, x_0) = \text{const}$.

Переменные Гамильтона

То же, что гамильтоновы переменные.

Переменные Лагранжа

То же, что лагранжевы переменные.

Переменные состояния

Переменные, определяющие в совокупности положения и скорости точек механической системы: обобщённые координаты q_i , обобщённые скорости \dot{q}_i или обобщённые координаты q_i , обобщённые импульсы p_i .

Переносная сила инерции

Вычисляется по формуле $\mathbf{J}_{\text{пер}} = -m\mathbf{W}_{\text{пер}}$, где m — масса материальной точки, $\mathbf{W}_{\text{пер}}$ — переносное ускорение.

Переносная скорость $\mathbf{V}_{\text{пер}}$ (\mathbf{V}_e)

Скорость при движении совместно с подвижным пространством (в качестве точки твёрдого тела).

Переносное движение

Движение *подвижного пространства*.

Переносное ускорение $W_{пер}$ (W_e)

Ускорение при движении совместно с *подвижным пространством* (в качестве точки *твёрдого тела*).

Переходной процесс

На систему в положении равновесия подаётся *входное воздействие* — единичная ступенька: $Q(t) \begin{cases} = 0, & t < 0, \\ = 1, & t \geq 0. \end{cases}$ Переходной процесс — движение

системы для значений $t \geq 0$, близких к $t = 0$ (до выхода на *установившийся процесс*).

Плечо пары

Расстояние между параллельными прямыми, на которых расположены элементы \mathbf{a} и $-\mathbf{a}$ *пары*.

Плоское движение

Движение двумерного *твёрдого тела* в плоскости.

Плотность статистического ансамбля

$\rho = \frac{\mu}{v}$, где v — величина малого объёма в *фазовом пространстве*, μ —

количество находящихся в объёме экземпляров *статистического ансамбля*.

Подвижное пространство

В *сложном движении* подвижное пространство перемещается относительно *системы отсчёта* (*переносное движение*), в подвижном пространстве перемещаются *материальные точки* (*относительное движение*).

Поле всемирного тяготения

Поле с *потенциальной энергией* $\Pi = -\gamma \frac{Mt}{r}$, где $\gamma = 6.67 \cdot 10^{-8} \frac{см^3}{г \cdot сек^2}$ —

всемирная постоянная, M — масса расположенного в неподвижной точке «Солнца», t — масса совершающей движение *материальной точки*, r — расстояние точки до «Солнца».

Полная механическая энергия

Вычисляется по формуле $E = T + \Pi$, где T , Π — *кинетическая* и *потенциальная энергии*.

Полный интеграл уравнения Гамильтона-Якоби

Решение $S(t, q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ *уравнения Гамильтона-Якоби* (q_1, \dots, q_n — *обобщённые координаты*, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ — произвольные постоянные),

удовлетворяющее условию $\det \left\| \frac{\partial^2 S(t, q, \alpha)}{\partial q_i \partial \alpha_k} \right\| \neq 0$.

Положение равновесия

Положение механической системы называется *положением равновесия*, если точки системы, помещённые в это положение с нулевыми скоростями, продолжат оставаться в этом положении.

Положительно определённая функция

Для функции в некоторой области, содержащей точку $x = 0$, выполняется

$$V(x) \begin{cases} = 0, & x = 0, \\ > 0, & x \neq 0. \end{cases}$$

Положительно постоянная функция

Для функции в некоторой области выполняется $V(x) \geq 0$.

Полуглавная функция Гамильтона $V(t, q, p^0)$

Действие по Гамильтону W вычисляется на общем решении $q(t, q^0, p^0)$ уравнений Гамильтона. В результат вычисления подставляется найденная из общего решения вектор-функция $q^0 = q^0(t, q, p^0)$.

Полусвободное каноническое преобразование

Каноническое преобразование, удовлетворяющее условию $\det \left\| \frac{\partial \tilde{p}_i(t, q, p)}{\partial p_k} \right\| \neq 0$.

Постулат Максвелла

Поведение электромеханической системы определяется уравнениями Лагранжа, в которые кроме обобщённых сил подставлены функции: кинетическая энергия, потенциальная энергия, диссипативная функция Релея. Все указанные функции есть суммы соответствующих функций для электрической части системы и для механической.

Поступательное движение твёрдого тела

Движение, при котором любая прямая, связанная с телом, перемещается параллельно самой себе.

Потенциальная сила

Сила $\mathbf{F}_i(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$, действующая на материальную точку, определённую радиус-вектором \mathbf{r}_i , называется потенциальной, если существует такая скалярная функция $\Pi(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ — потенциальная энергия, что справедливы равенства $\mathbf{F}_i(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = -grad_i \Pi(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = -\nabla_i \Pi(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$, где $-grad_i \Pi(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = -\nabla_i \Pi(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ — градиент потенциальной энергии по переменным, соответствующим радиус-вектору \mathbf{r}_i .

Потенциальная энергия

Функция $\Pi(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$, которая определяет потенциальные силы $\mathbf{F}_i(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$, действующие на материальные точки, определённые радиус-векторами \mathbf{r}_i .

Потенциальное силовое поле

Силовое поле, в котором определяющая поле сила является потенциальной.

Приложенный вектор

Вектор с фиксированной начальной точкой.

Принцип виртуальных перемещений

То же, что общее уравнение статики.

Принцип возможных перемещений

То же, что критерий равновесия стационарно заданной системы.

Принцип Гамильтона [14, 18]

То же, что *вариационный принцип Гамильтона*.

Принцип Гамильтона-Остроградского [12, 13]

То же, что *вариационный принцип Гамильтона*.

Принцип Мопертюи-Лагранжа

Путь $\tilde{q}(q_1)$ в *координатном пространстве* является *прямым* в том и только в том случае, если при любом *варьировании* $q(q_1, \alpha)$ при неизменных граничных точках для *вариации действия по Лагранжу* выполняется $\delta W^*|_{\alpha=0} = 0$.

Принцип стационарного действия Гамильтона [4, 5, 8]

То же, что *вариационный принцип Гамильтона*.

Принцип суперпозиции

Если *внешним воздействиям* $Q^\alpha(t)$ на линейную систему соответствуют *отклики* $q^\alpha(t)$, то *внешнему воздействию* $\sum_\alpha Q^\alpha(t)$ соответствует *отклик*

$$\sum_\alpha q^\alpha(t).$$

Проварьировать функцию

То же, что *варьирование функции*.

Производящая функция канонического преобразования

Функция F в *основном критерии каноничности* преобразования *гамильтоновых переменных*.

Пространство состояний (фазовое пространство)

2n-мерное пространство с координатами $q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ (*обобщённые координаты, обобщённые скорости*) или с координатами $q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ (*обобщённые координаты, обобщённые импульсы*). Для *системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальном виде* — пространство с координатами x_1, \dots, x_n .

Прямой путь

График движения в одном из пространств (координатном, расширенном координатном и т. д.) являющийся решением уравнений динамики (уравнений Лагранжа, уравнений Гамильтона и т. д.).

Пуансо интерпретация

См. *Интерпретация Пуансо*.

Работа сил

Работа A_{12} сил $\mathbf{F}_i(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ на пути $\mathbf{r}_i(t)$ *системы материальных точек* за время $t \in [t_1, t_2]$ вычисляется по формуле

$$A_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i, d\mathbf{r}_i) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^N (\mathbf{F}_i(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t)), \mathbf{V}_i(t)) dt.$$

Радиальное ускорение W_r

Проекция *ускорения* на *радиус-вектор*. Величина в полярных координатах равна $W_r = \ddot{r} - \dot{\phi}^2 r$.

Радиус кривизны

Радиус окружности, аппроксимирующей кривую в данной точке.

Радиус-вектор \mathbf{r}

Начальная точка неподвижна в *системе отсчёта*, конечная точка определяет положение *материальной точки*.

Разделение переменных в уравнении Гамильтона-Якоби

В качестве полного интеграла — функции $S(t, q_1, \dots, q_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ многих переменных — отыскивается комбинация функций, каждая из которых является функцией одной переменных. Например, аддитивная комбинация $S = S_0(t, \alpha) + S_1(q_1, \alpha) + \dots + S_n(q_n, \alpha)$, мультипликативная комбинация $S = S_0(t, \alpha) \times S_1(q_1, \alpha) \times \dots \times S_n(q_n, \alpha)$.

Расширенное координатное пространство

$(n+1)$ -мерное пространство с координатами t, q_1, \dots, q_n (время, *обобщённые координаты*).

Расширенное пространство состояний (расширенное фазовое пространство)

$(2n+1)$ -мерное пространство с координатами $t, q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$ (время, *обобщённые координаты, обобщённые скорости*) или с координатами $t, q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ (время, *обобщённые координаты, обобщённые импульсы*).

Расширенное фазовое пространство

То же, что *расширенное пространство состояний*.

Реакция связей

Силы, благодаря которым выполняются наложенные на систему *механические связи*.

Реакция системы на внешнее воздействие

То же, что *вынужденное движение*.

Регулярная прецессия твёрдого тела

Сложное движение, при котором подвижная система вращается вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью $\omega_{пер}$ (*угловая скорость прецессии*), а относительным движением является также вращение вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью $\omega_{отн}$ (*угловая скорость собственного вращения*). Оси, вокруг которых происходят вращения, пересекаются.

Резаля теорема

Для вектора $\mathbf{a}(t) = \overline{AB}$ справедлива формула $\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \dot{\mathbf{a}} = \mathbf{V}_B - \mathbf{V}_A$, где $\mathbf{V}_A, \mathbf{V}_B$ — скорости граничных точек.

Реономные связи

То же, что *нестационарные связи*.

Свободное движение твёрдого тела

Единственные *механические связи*, наложенные на положения точек тела: расстояние между любыми двумя точками неизменно.

Свободное каноническое преобразование

Каноническое преобразование, удовлетворяющее условию $\det \left\| \frac{\partial \tilde{q}_i(t, q, p)}{\partial p_k} \right\| \neq 0$.

Свободный вектор

Направленный отрезок с произвольной точкой приложения.

Секториальная скорость

Скорость заметания площади *радиус-вектором*.

Сила

Силой, действующей на *материальную точку*, (мерой взаимодействия с другими точками) называется производная по времени от импульса точки.

Сила инерции

Сила, которую дополнительно нужно приложить к *материальной точке*, чтобы *второй закон* был справедлив в *неинерциальной системе отсчёта*

Сила инерции кориолисова

См. *кориолисова сила инерции*.

Сила инерции переносная

См. *переносная сила инерции*.

Сила центральная

См. *центральная сила*.

Силы внешние

См. *внешние силы*.

Силы внутренние

См. *внутренние силы*.

Силовая функция

Функция, обратная по знаку *потенциальной энергии*.

Силовые поля

Силы $F_i(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$, действующие на отдельные *материальные точки*, не зависят от *скоростей* точек.

Синхронный дифференциал [13]

То же, что *изохронный дифференциал*.

Система в инволюции

То же, что *инволютивная система*.

Система Кёнига

Система (трёхмерное пространство) движется *поступательно*, одна из её точек совпадает с *центром инерции системы материальных точек*.

Система консервативная

См. *консервативная система*.

Система линейного приближения

Правые части *системы в нормальном виде* $\dot{x} = \varphi(x)$, $x \in R^n$, раскладывают в ряды в окрестности решения $x = 0$ и оставляют только линейные слагаемые.

Система материальных точек

Система состоит из $N > 1$ *материальных точек*.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальном виде

Система $\dot{x} = \varphi(t, x)$, $x \in R^n$, у которой в левой части находятся производные, в правой части — функции от независимой и зависимых переменных.

Система отсчёта

Трёхмерное евклидово пространство, относительно которого совершает движение *механическая система*.

Система отсчёта инерциальная

См. *инерциальная система отсчёта*.

Система отсчёта неинерциальная

См. *неинерциальная система отсчёта*.

Система переменного состава

Система, у которой во время движения происходит приход и уход *материальных точек*.

Скалярная часть кватерниона

Часть λ_0 кватерниона $\Lambda = \lambda_0 + \lambda_1 \mathbf{i}_1 + \lambda_2 \mathbf{i}_2 + \lambda_3 \mathbf{i}_3 = \lambda_0 + \boldsymbol{\lambda}$.

Скалярный инвариант

Скалярное произведение $(\mathbf{R}, \mathbf{M}_O)$ *главного вектора* \mathbf{R} на *главный момент* \mathbf{M}_O множества *скользящих векторов*.

Склерономные связи (стационарные связи)

Механические связи, условия $f_l(\mathbf{r}_i, \mathbf{V}_i) \leq 0$ которых не содержат явно времени t .

Скобка Лагранжа

Сопоставление функциям *гамильтоновых переменных* $\varphi_i(t, q, p)$, $\psi_i(t, q, p)$,

$$i = \overline{1, n}, \text{ функции } [q_j, p_k] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial q_j} \frac{\partial \psi_i}{\partial p_k} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_k} \frac{\partial \psi_i}{\partial q_j} \right).$$

Скобка Пуассона

Сопоставление двум функциям *гамильтоновых переменных* $\varphi(t, q, p)$,

$$\psi(t, q, p) \text{ функции } (\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right).$$

Скользящий вектор

Направленный отрезок, который можно перемещать вдоль линии действия.

Скорость материальной точки

Определяется по формуле $\mathbf{V} = d\mathbf{r} / dt = \dot{\mathbf{r}}$, где \mathbf{r} — *радиус-вектор* точки.

Сложное движение

Подвижное пространство перемещается относительно *системы отсчёта* (*переносное движение*), в подвижном пространстве перемещаются *материальные точки* (*относительное движение*).

Случай Ковалевской

См. *Ковалевской случай*.

Случай Лагранжа

См. *Лагранжа случай*.

Случай Эйлера

Твёрдое тело совершает движение с неподвижной точкой O . *Главный момент* \mathbf{M}_O *внешних сил* относительно неподвижной точки равен нулю.

Собственный кватернион

Базис \mathbf{i}_k *нормированным кватернионом* $\Lambda = \lambda_0 + \sum_{k=1}^3 \lambda_k \mathbf{i}_k$ переводится в базис \mathbf{e}_k , который *нормированным кватернионом* $M = \mu_0 + \sum_{k=1}^3 \mu_k \mathbf{e}_k$ переводится в базис \mathbf{n}_k . В собственном кватернионе $M^* = \mu_0 + \sum_{k=1}^3 \mu_k \mathbf{i}_k$ по отношению к кватерниону M коэффициенты разложения по базису \mathbf{e}_k приписываются исходному базису \mathbf{i}_k .

Собственный амплитудный вектор (форма главного колебания)

Амплитудный вектор в главном колебании.

Собственная частота

Частота в главном колебании.

Согласованные контуры

Контур C_0 и C_1 охватывают *трубку прямых путей* и параметризованы каждый параметром α так, что при каждом значении параметра α соответствующие точки контуров C_0, C_1 расположены на одном и том же *прямом пути*.

Сопровождающий трёхгранник

Базис в каждой точке *траектории*, состоящий из *ортов касательной, нормали и бинормали*.

Сопряжённые кинетические фокусы

То же, что кинетические фокусы.

Сопряжённый кватернион

Кватерниону $\Lambda = \lambda_0 + \sum_{k=1}^3 \lambda_k \mathbf{i}_k$ соответствует сопряжённый кватернион

$$\tilde{\Lambda} = \lambda_0 - \sum_{k=1}^3 \lambda_k \mathbf{i}_k.$$

Состояние материальной точки

Положение и скорость точки относительно *системы отсчёта*.

Статистический ансамбль

Множество *гамильтоновых систем*, у которых совпадают *функции Гамильтона*, но различаются начальные данные q^0, p^0 .

Статический винт

Винт, соответствующий множеству *сил*.

Стационарно заданная система

Положение $\mathbf{r}_i(q)$ любой точки *механической системы* есть функция только *обобщённых координат* (нет явной зависимости от времени t).

Стационарно потенциальное силовое поле

Потенциальное силовое поле, для которого определяющая поле потенциальная энергия $\Pi(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ не зависит явно от времени.

Стационарные связи

То же, что склерономные связи.

Структурная формула для уравнений Лагранжа

Промежуточная формула для уравнений Лагранжа в произвольных параметрах (не обязательно в обобщённых координатах).

Тангенциальное (касательное) ускорение

См. касательное ускорение.

Твёрдое тело

Такая совокупность материальных точек, что расстояние между любыми двумя неизменно.

Тензор инерции

Матрица $\check{I} = \begin{pmatrix} I_1 & -I_{12} & -I_{13} \\ -I_{21} & I_2 & -I_{23} \\ -I_{31} & -I_{32} & I_3 \end{pmatrix}$ квадратичной формы $I_e = \sum_{k=1}^3 I_k \alpha_k^2 - \sum_{k<l} I_{kl} \alpha_k \alpha_l$,

где I_e — момент инерции твёрдого тела относительно оси, ориентированной ортом \mathbf{e} , α_k — проекции орта \mathbf{e} на координатные оси, I_k — моменты инерции относительно координатных осей, I_{kl} — центробежные моменты инерции.

Теорема Барбашина-Красовского

Пусть существует такая функция $V(x)$, что для неё в некоторой области, содержащей точку $x = 0$, и системы $\dot{x} = \varphi(x)$, $x \in R^n$, выполняется:

1. $V(x)$ — положительно определённая функция;
2. $W(x) = \dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \varphi_i(x) \begin{cases} = 0, & x \in M, \\ < 0, & x \notin M, \end{cases}$ где M — некоторое множество;
3. единственным решением, принадлежащим M при $t \in [0, \infty)$ является $x(t) \equiv 0$.

Тогда $x(t) \equiv 0$ — асимптотически устойчивое по Ляпунову решение.

Если условие 1. заменить условием

1*. $V(0) = 0$; $\forall \delta > 0, \exists |x_0| < \delta, V(x_0) < 0$, то решение $x(t) \equiv 0$ неустойчиво по Ляпунову.

Теорема Гюйгенса Х., Штейнера Я.

См. Гюйгенса Х., Штейнера Я. теорема.

Теорема: закон сохранения полной механической энергии

Полная механическая энергия консервативной системы сохраняется во время движения.

Теорема Кёнига для системы материальных точек

См. Кёнига теорема для системы материальных точек.

Теорема Кёнига для твёрдого тела

См. Кёнига теорема для твёрдого тела.

Теорема Кориолиса

См. Кориолиса теорема.

Теорема Лагранжа-Дирихле

Пусть в некоторой Δ -окрестности точки $q^0 = 0$ координатного пространства потенциальная энергия $\Pi(q)$ консервативной системы имеет в положении $q^0 = 0$ строгий минимум. Тогда $q^0 = 0$ — устойчивое по Ляпунову положение равновесия.

Теорема Лиувилля о первых интегралах в инволюции

Пусть для первых интегралов $w_i(t, q, p) = \alpha_i$, $i = \overline{1, n}$, $2n$ -мерной гамильтоновой системы выполняется:

а) $(w_i, w_k) = 0$, $i, k = \overline{1, n}$, — первые интегралы находятся в инволюции;

б) уравнения $w_i(t, q, p) = \alpha_i$, $i = \overline{1, n}$, разрешимы относительно p :
 $p_i = \psi_i(t, q, \alpha)$.

Тогда, не выходя за рамки алгебраических операций и квадратур, по функциям $w_i(t, q, p)$, $i = \overline{1, n}$, вычисляются: полный интеграл $S(t, q, \alpha)$ уравнения Гамильтона-Якоби; дополнительные первые интегралы $w_{n+i}(t, q, p) = \alpha_{n+i}$, $i = \overline{1, n}$; общее решение $q_i(t, \alpha)$, $p_i(t, \alpha)$, $i = \overline{1, n}$, уравнений Гамильтона.

Теорема Лиувилля о сохранении фазового объёма

Пусть правые части системы обыкновенных дифференциальных уравнений в нормальном виде $\dot{x} = \varphi(t, x)$, $x \in R^n$, удовлетворяют условию

$$\operatorname{div} \varphi(t, x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_i(t, x)}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{условие выполнено для гамильтоновых систем}).$$

Тогда при переносе фазового объёма решениями системы сохраняется его величина.

Теорема Ли Хуачжуна

Следующие два утверждения эквивалентны:

а) интеграл $J = \oint_{C_i=1}^n \{A_i(t, q, p) \delta q_i + B_i(t, q, p) \delta p_i\}$ аналогично интегральному

инварианту Пуанкаре $\oint_{C_i=1}^n p_i \delta q_i$ — интегральный инвариант;

б) существует такое число c и такая функция $F(t, q, p)$, что подынтегральные выражения связаны соотношением

$$\sum_{i=1}^n \{A_i(t, q, p) \delta q_i + B_i(t, q, p) \delta p_i\} = c \sum_{i=1}^n p_i \delta q_i - \delta F(t, q, p), \quad \text{где } \delta F(t, q, p) \text{ —}$$

изохронный (t — фиксированный параметр) дифференциал.

Теорема Ляпунова об устойчивости нулевого решения системы в нормальном виде

Пусть в Δ -окрестности нулевого решения системы в нормальном виде $\dot{x} = \varphi(x)$, $x \in R^n$, существует положительно определённая функция $V(x)$ такая, что её производная $\dot{V}(x)$ в силу системы $\dot{x} = \varphi(x)$, $x \in R^n$, отрицательно постоянная. Тогда нулевое решение устойчиво по Ляпунову.

Теорема Ляпунова о неустойчивости положения равновесия консервативной системы (первая)

Пусть для потенциальной энергии $\Pi(q)$ ($\Pi(0) = 0$) консервативной системы в некотором положении q^* выполняется $\Pi_2(q^*) < 0$, где Π_2 — совокупность слагаемых в $\Pi(q)$ второго порядка (отсутствие при $q^0 = 0$ минимума, включая нестрогий). Тогда положение равновесия $q^0 = 0$ неустойчиво по Ляпунову.

Теорема Ляпунова о неустойчивости положения равновесия консервативной системы (вторая)

Пусть Π_m — совокупность слагаемых в потенциальной энергии $\Pi(q)$ ($\Pi(0) = 0$) консервативной системы наименьшей степени $m \geq 2$, и функция $\Pi_m(q)$ отрицательно определена. Тогда положение равновесия $q^0 = 0$ неустойчиво по Ляпунову.

Теорема Нётер

Пусть однопараметрическая группа $\hat{t} = \hat{t}(t, q, \tau)$, $\hat{q}_i = \hat{q}_i(t, q, \tau)$, $i = \overline{1, n}$, — группа вариационных симметрий для лагранжевой системы, определённой функцией Лагранжа $L(t, q, \dot{q})$. Тогда у системы есть первый интеграл

$w = \sum_{i=1}^n p_i \eta_i - \xi H$, где p_i и H , связанные с функцией Лагранжа $L(t, q, \dot{q})$

обобщённый импульс и гамильтониан, функции ξ и η_i вычисляются по

$$\text{уравнениям группы } \xi(t, q) = \left. \frac{\partial \hat{t}(t, q, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}, \quad \eta_i(t, q) = \left. \frac{\partial \hat{q}_i(t, q, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0}.$$

Теорема об асимптотической устойчивости положения равновесия диссипативной системы

Пусть $q^0 = 0$ — изолированное положение равновесия стационарно заданной определённо-диссипативной системы. Пусть потенциальная энергия имеет при $q^0 = 0$ строгий минимум. Тогда $q^0 = 0$ — асимптотически устойчивое положение равновесия.

Теорема об угловой скорости

В каждый момент времени t существует такой единственный вектор ω (угловая скорость), что скорости любых двух точек твёрдого тела B и C связаны соотношением $V_B = V_C + [\omega, \rho]$, где $\rho = \overline{CB}$.

Теорема об устойчивости нулевого решения линейной автономной системы

$\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$ — корни характеристического уравнения линейной автономной системы $\dot{x} = Dx$, $x \in R^n$, $D = \text{const}$.

1. $\{\forall \mu_k = \text{Re} \lambda_k < 0\} \Leftrightarrow \{x \equiv 0$ — асимптотически устойчивое решение системы $\dot{x} = Dx\}$;
2. $\{\exists \mu_k = \text{Re} \lambda_k > 0\} \Rightarrow \{x \equiv 0$ — неустойчивое решение системы $\dot{x} = Dx\}$;
3. $\{\mu_k = \text{Re} \lambda_k < 0, k = \overline{1, r} < n, \mu_k = \text{Re} \lambda_k = 0, k = \overline{r+1, n}\} \Rightarrow \{x \equiv 0$ — устойчивое по Ляпунову или неустойчивое решение системы $\dot{x} = Dx\}$.

Теорема об устойчивости по линейному приближению

1. Пусть для корней $\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$ характеристического уравнения системы линейного приближения $\dot{x} = Dx$, $x \in R^n$, $D = \text{const}$, выполняется $\forall \mu_k = \text{Re} \lambda_k < 0$. Тогда решение $x \equiv 0$ нелинейной системы $\dot{x} = \varphi(x) = Dx + R(x)$ ($R(x)$ — нелинейные слагаемые) асимптотически устойчиво.
2. Пусть для корней $\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$ характеристического уравнения системы линейного приближения $\dot{x} = Dx$, $x \in R^n$, $D = \text{const}$, выполняется $\exists \mu_k = \text{Re} \lambda_k > 0$. Тогда решение $x \equiv 0$ нелинейной системы $\dot{x} = \varphi(x) = Dx + R(x)$ ($R(x)$ — нелинейные слагаемые) неустойчиво.

Теорема о сложении скоростей в сложном движении

Абсолютная скорость V_{abc} точки в сложном движении есть сумма переносной и относительной скоростей: $V_{abc} = V_{abc} + V_{отн}$.

Теорема о сложении ускорений в сложном движении (теорема Кориолиса)

См. Кориолиса теорема.

Теорема Рауса-Гурвица

То же, что критерий Рауса-Гурвица.

Теорема Резаля

См. Резаля теорема.

Теорема Четаева о неустойчивости нулевого решения системы в нормальном виде

Пусть в ε -окрестности решения $x(t) = 0$ системы в нормальном виде $\dot{x} = \varphi(x)$, $x \in R^n$, существует область M (∂M — граница области M), в которой при некотором числе k для функции $V(x)$ выполняется:

1. $0 < V(x) \leq k$;

2. $W(x) = \dot{V}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} \varphi_i(x) > 0$;
3. $\{V(x) \geq V_0\} \Rightarrow \{\exists l > 0, W(x) \geq l\}$;
4. $\{x = 0\} \in \partial M$;
5. $\{x \in \partial M, |x| < \varepsilon\} \Rightarrow \{V(x) = 0\}$.

Тогда решение $x(t) = 0$ системы $\dot{x} = \varphi(x)$, $x \in R^n$ неустойчиво по Ляпунову.

Теорема Четаева о неустойчивости положения равновесия консервативной системы

Пусть потенциальная энергия $\Pi(q)$ ($\Pi(0) = 0$) консервативной системы — однородная функция, и в положении q^* системы выполняется $\Pi(q^*) < 0$ (отсутствие при $q^0 = 0$ минимума, включая нестрогий). Тогда положение равновесия $q^0 = 0$ неустойчиво по Ляпунову.

Теорема Эмми Нётер

То же, что теорема Нётер.

Теорема Якоби-Пуассона

Скобка Пуассона (φ, ψ) первых интегралов $\varphi(t, q, p) = c_1$, $\psi(t, q, p) = c_2$ гамильтоновой системы — первый интеграл той же гамильтоновой системы.

Траектория материальной точки

Годограф радиус-вектора.

Трансверсальное ускорение

В плоском движении проекция ускорения материальной точки на направление, перпендикулярное радиус-вектору. Величина в полярных координатах равна $W_\varphi = \dot{\varphi}r + 2\dot{\varphi}\dot{r}$.

Третий закон Кеплера

Отношение квадрата времени обращения планеты вокруг Солнца к кубу большой полуоси траектории одинаково для всех планет одной и той же Солнечной системы.

Третий закон Ньютона

Силы взаимодействия между двумя материальными точками представляют собой векторный нуль.

Трубка прямых путей

В расширенном фазовом пространстве рассматривается замкнутый контур, и через каждую его точку t^0 , q^0 , p^0 — как начальную — проводится прямой путь — решение гамильтоновой системы.

Угловая скорость твёрдого тела

Вектор, существование и единственность которого устанавливается теоремой об угловой скорости.

Угловая скорость прецессии

При регулярной прецессии твёрдого тела — угловая скорость подвижной системы координат.

Угловая скорость собственного вращения

При *регулярной прецессии твёрдого тела* — угловая скорость относительно подвижной системы координат.

Угловое ускорение твёрдого тела

Вычисляется через угловую скорость ω следующим образом: $\varepsilon = d\omega / dt = \dot{\omega}$.

Углы Эйлера

Задают ориентацию базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, связанного *твёрдым телом*, относительно базиса $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$, связанного с *системой отсчёта*: угол нутации $\theta = \angle \mathbf{i}_3, \mathbf{e}_3$; угол прецессии $\psi = \angle \mathbf{i}_1, \mathbf{n}$; угол собственного вращения $\varphi = \angle \mathbf{n}, \mathbf{e}_1$, где \mathbf{n} — орт, расположенный на линии узлов: $\mathbf{n} \perp \mathbf{i}_3, \mathbf{n} \perp \mathbf{e}_3$.

Угол нутации

См. углы Эйлера.

Угол прецессии

См. углы Эйлера.

Угол собственного вращения

См. углы Эйлера.

Унивалентное каноническое преобразование

Для валентности c выполняется $c = 1$.

Удерживающая связь

Ограничение $f(t, \mathbf{r}_i, \mathbf{V}_i) = 0$ типа равенства, наложенное на состояния механической системы.

Уравнение Бине

См. Бине уравнение.

Уравнение Гамильтона-Якоби

Строится по функции Гамильтона $H(t, q, p)$ следующим образом:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0.$$

Уравнение Ляпунова

Уравнение $D^T X + XD = C$ относительно квадратной числовой матрицы X , C и D — квадратные числовые матрицы.

Уравнение Мещерского

Определяет поступательное движение твёрдого тела переменного состава:

$$m \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{R}^{\text{внешн}} - \sum_{i=1}^n \frac{dm_i^{yx}}{dt} \mathbf{u}_i^{yx} + \sum_{k=1}^r \frac{dm_k^{np}}{dt} \mathbf{u}_k^{np},$$
 где m — переменная масса тела, \mathbf{V} — скорость тела, $\mathbf{R}^{\text{внешн}}$ — главный вектор внешних сил, m_i^{yx}, m_k^{np} — ушедшие и

пришедшие к моменту времени t массы, $\mathbf{u}_i^{yx}, \mathbf{u}_k^{np}$ — скорости уходящих и приходящих масс в подвижной поступательной системе, связанной с телом.

Уравнение Ньютона

То же, что второй закон Ньютона.

Уравнение частот

То же, что вековое уравнение.

Уравнения Гамильтона

То же, что *гамильтонова система*.

Уравнения Лагранжа

То же, что *лагранжева система*.

Уравнения Уиттекера

Уравнение $H(q, p) = h$, где $H(q, p)$ — функция Гамильтона обобщённо консервативной системы, разрешается относительно одного из обобщённых импульсов, например, p_1 : $p_1 = -K(q_1, q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, h)$. Принимая обобщённую координату q_1 за независимую, по функции Уиттекера $K(q_1, q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, h)$ вычисляются уравнения Уиттекера

(гамильтонова система): $\frac{dq_i}{dq_1} = \frac{\partial K}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dq_1} = -\frac{\partial K}{\partial q_i}, \quad i = \overline{2, n}$.

Уравнения Эйлера

В вариационном исчислении уравнения Лагранжа называются уравнениями Эйлера.

Уравнения Якоби

Лагранжева системы $\frac{d}{dq_1} \frac{\partial P}{\partial q'_i} - \frac{\partial P}{\partial q_i} = 0$, в основе которой лежит функция

Якоби $P(q_1, q, q')$, q_1 — независимая переменная, штрих производная по ней.

Ускорение материальной точки

Определяется по формуле $\mathbf{W} = d\mathbf{V} / dt = \dot{\mathbf{V}} = \ddot{\mathbf{r}}$, где \mathbf{V} — скорость точки, \mathbf{r} — радиус-вектор точки.

Ускорение Кориолиса

См. кориолисово ускорение.

Ускорение радиальное

См. радиальное ускорение.

Ускорение трансверсальное

См. трансверсальное ускорение.

Условия равновесия твёрдого тела

Некоторое положение твёрдого тела является его положением равновесия в том и только в том случае, если выполняются равенства: $\mathbf{R} = 0, \mathbf{M}_O = 0$, где \mathbf{R} — главный вектор, \mathbf{M}_O — главный момент действующих на тело сил, O — произвольная точка тела.

Установившийся процесс

То же, что *вынужденное движение*.

Устойчивость по Ляпунову

Решение $x = 0$ системы в нормальном виде $\dot{x} = \varphi(t, x)$, $x \in R^n$, устойчиво по Ляпунову, если для общего решения $x(t, t_0, x_0)$ выполняется:

$$\forall \varepsilon > 0, \forall t_0 > 0, \exists \delta > 0, \forall |x_0| < \delta, \forall t \geq t_0, |x(t, t_0, x_0)| < \varepsilon.$$

Устойчивый многочлен

Многочлен в левой части характеристического уравнения

$a_0\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1}\lambda + a_m = 0$ называется устойчивым, если все корни $\lambda_k = \mu_k + i\nu_k$ характеристического уравнения располагаются в комплексной плоскости слева от мнимой оси: $\forall \mu_k = \operatorname{Re}\lambda_k < 0$.

Фазовая характеристика

Зависимость аргумента $\psi_{jk}(\Omega) = \arg W_{jk}(i\Omega)$ амплитудно-фазовой характеристики $W_{jk}(i\Omega) = R_{jk}(\Omega)e^{i\psi_{jk}(\Omega)}$ от частоты Ω .

Фазовый объём

Объём в фазовом пространстве (пространстве состояний).

Фазовый поток гамильтоновой системы

Совокупность преобразований $q^0, p^0 \leftrightarrow q, p$ фазового пространства, которые определяются при разных фиксированных значениях времени t общим решением $q = q(t, q^0, p^0)$, $p = p(t, q^0, p^0)$ гамильтоновой системы.

Фокальный параметр

Постоянная p в формуле $r = \frac{p}{1 + e\cos(\varphi + \beta)}$ для орбит в поле всемирного тяготения — конических сечений в полярных координатах.

Форма главного колебания

То же, что собственный амплитудный вектор.

Формула Циолковского

Скорость ракеты при отсутствии внешних сил $V(t) = V_0 + u \ln \frac{m_0}{m(t)}$, где

V_0 , m_0 — скорость и масса в начале движения, u — скорость истечения рабочего тела, $m(t)$ — текущая масса.

Функции Ляпунова $V(x)$

Определены в некоторой Δ -окрестности нуля: $|x| < \Delta$. Для $V(x)$ предполагается $V(0) = 0$. Используются функции Ляпунова: знакоопределённые (положительно, отрицательно), знакостоянные (положительно, отрицательно), знакопеременные.

Функция Гамильтона

То же, что гамильтониан.

Функция Лагранжа

То же, что лагранжиан.

Функция силовая

См. силовая функция.

Функция Уиттекера $K(q_1, q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, h)$

Результат разрешения уравнения $H(q, p) = h$ относительно одного из обобщённых импульсов, например, p_1 : $p_1 = -K(q_1, q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, h)$. $H(q, p)$ — функция Гамильтона обобщённо консервативной системы.

Функция Якоби $P(q_1, q, q')$

Вычисляется по функции Уиттекера $K(q_1, q_2, \dots, q_n, p_2, \dots, p_n, h)$ как лагранжиан по гамильтониану: $P(q_1, q, q') = \sum_{k=2}^n p_k q'_k - K$, q_1 — независимая

переменная, штрих — производная по ней.

Характеристический многочлен

Многочлен, расположенный в левой части *характеристического уравнения* $a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1} \lambda + a_m = 0$.

Характеристическое уравнение

Решение линейной автономной системы $\dot{x} = Dx$, $x \in R^n$, $D = \text{const}$, отыскивается в виде $x = ue^{\lambda t}$, после сокращения на $e^{\lambda t}$ остаётся алгебраическое уравнение $(D - \lambda E)u = 0$ для чисел λ , u . Уравнение имеет нетривиальное решение $u \neq 0$ тогда и только тогда, когда λ удовлетворяет *характеристическому уравнению*

$$\det(D - \lambda E) = a_0 \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1} \lambda + a_m = 0.$$

Характер экстремума действия по Гамильтону

Необходимое условие минимума. Если *действие по Гамильтону* при любом *варьировании прямого пути* с закреплёнными граничными точками (t_0, q^0) , (t_1, q^1) в *расширенном координатном пространстве* достигает минимума на *прямом пути*, то при $t_0 < t < t_1$ отсутствуют *кинетические фокусы*, сопряжённые точке (t_0, q^0) .

Достаточное условие строгого минимума. Если на *прямом пути* при $t_0 < t \leq t_1$ отсутствуют *кинетические фокусы*, сопряжённые начальной точке (t_0, q^0) , то при любом нетривиальном *варьировании* $q(t, \alpha)$ ($\partial q(t, \alpha) / \partial \alpha \neq 0$) с закреплёнными граничными точками (t_0, q^0) , (t_1, q^1) в *расширенном координатном пространстве* *действие по Гамильтону* принимает на *прямом пути* строгий минимум.

Центральная сила

Действует на точку и коллинеарна её радиус-вектору.

Центр инерции системы материальных точек

Вычисляется по формуле $\mathbf{r}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i$, $m = \sum_{i=1}^N m_i$, где m_i , \mathbf{r}_i — масса и радиус-вектор отдельной точки.

Центр кривизны

Центр окружности, аппроксимирующей кривую в данной точке.

Центр масс

Центр инерции твёрдого тела.

Центробежный момент инерции твёрдого тела

Вычисляется по формуле $I_{12} = I_{21} = \sum_i m_i x_{i1} x_{i2}$, где m_i — масса точки номер i , x_{i1} , x_{i2} , x_{i3} — координаты точки в ортонормированной декартовой системе

координат. Аналогично вычисляются центробежные моменты инерции $I_{13} = I_{31}$, $I_{23} = I_{32}$.

Циклическая координата

Координата q_k называется циклической, если функция Гамильтона $H(t, q_1, \dots, q_{k-1}, q_{k+1}, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ от неё не зависит. Циклическая координата q_k порождает первый интеграл $p_k = c$ соответствующей гамильтоновой системы.

Циолковского формула

См. формула Циолковского.

Частотные характеристики

Совокупность характеристик: амплитудно-фазовая, амплитудная, фазовая, действительная, мнимая.

Число степеней свободы голономной системы

Количество обобщённых координат.

Чистое вращение твёрдого тела

При чистом вращении для некоторой точки O тела выполняется $V_O = 0$, а для других точек B : $V_B = [\omega, \rho]$, $\rho = \overline{OB}$.

Эйлера динамические уравнения

См. динамические уравнения Эйлера.

Эйлера динамические уравнения

См. кинематические уравнения Эйлера.

Эйлера случай

См. случай Эйлера.

Эйлера углы

См. углы Эйлера.

Экваториальная плоскость

Плоскость, перпендикулярная в неподвижной точке твёрдого тела оси динамической симметрии.

Эксцентриситет

Постоянная e в формуле $r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi + \beta)}$ для орбит в поле всемирного

тяготения — конических сечений в полярных координатах.

Электромеханическая система

Система, состоящая из взаимодействующих частей: механической и электрической.

Электромеханические аналогии

Введение для электрической цепи: кинетической и потенциальной энергий, диссипативной функции Релея, обобщённых сил, соответствующих непотенциальным и недиссипативным силам. На основе введённых функций вычисляются уравнения Лагранжа — уравнения состояния электрической цепи.

Элементарная теория гироскопа

Предполагается, что *угловая скорость собственного вращения* ω_1 значительно превосходит *угловую скорость прецессии* ω_2 : $\omega_1 \gg \omega_2$. Это обстоятельство даёт возможность пользоваться упрощенной формулой для момента, поддерживающего *вынужденную регулярную прецессию*: $\mathbf{M}_o = C[\omega_2, \omega_1]$.

Эллипсоид инерции

На оси, проходящей через точку O *твёрдого тела*, откладывается отрезок $OA = 1/\sqrt{I}$, где I — момент инерции относительно данной оси. Геометрическое место точек A — эллипсоид инерции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М.А. Классическая механика: Учебное пособие. — 3-е изд. — М.: Издательство Физико-математической литературы, 2005. — 380 с.
2. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 432 с.
3. Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И. Математические аспекты классической и небесной механики. Изд. 2-е, перераб. и доп. — М.: Едиториал УРСС, 2002. — 416 с.
4. Бутенин Н.В., Фуфаев Н.А. Введение в аналитическую механику. — 2-е изд., пер. и доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. — 256 с.
5. Бухгольц Н.В. Основной курс теоретической механики. В 2-х частях. — М.: наука, 1972.
6. Гантмахер Ф.Р. Лекции по аналитической механики: Учебное пособие для вузов / — 3-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 264 с.
7. Голдстейн Г. Классическая механика. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1975. 416 с.
8. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики. Учебник. — М.: Изд-во МГУ. 1992. — 525 с.
9. Журавлёв В.Ф. Основы теоретической механики. Изд. 2-е перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 320 с.
10. Космонавтика: Энциклопедия / Гл. ред. В.П. Глушко — М.: Сов. Энциклопедия, 1985. — 528 с.
11. Лидов М.Л. Курс лекций по теоретической механике. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 478 с.
12. Лурье А.И. Аналитическая механика. — М.: Физматгиз, 1961. 824 с.
13. Маркеев А.П. Теоретическая механика: Учебник для университетов. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 572 с.
14. Парс Л.А. Аналитическая динамика: Пер. с англ. — М.: Наука, 1971. 636 с.

15. Сборник терминов по классической механике на пяти языках: русский, немецкий, английский, французский, польский. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1965.
16. Суслов Г.К. Теоретическая механика. — 3-е изд. — М.: Л.: Гостехиздат, 1946.
17. Теоретическая механика. Терминология. Буквенные обозначения величин: Сборник рекомендуемых терминов. М.: Наука, 1984. Вып. 102.
18. Яковенко Г.Н. Краткий курс аналитической динамики — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2004. — 238 с.
19. Яковенко Г.Н. Краткий курс теоретической механики — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. — 116 с.
20. Hughes Peter C. Spacecraft attitude dynamics. Dover publications, inc. Mineola, New York, 2004. 574 p.