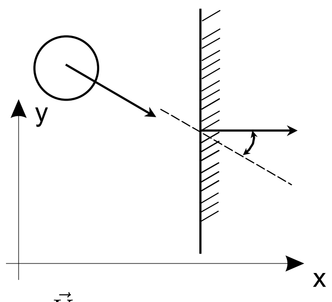
Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 12 вариант

Задача 1-2

Условие

Гладкая частица сферической формы массы m, летящая со скоростью $\vec{V}_0$, ударяется о гладкую массивную стенку, которая движется со скоростью $\vec{U}$. Угол, образованный векторами $\vec{V}_0$ и $\vec{U}$ равен β. Массу стенки считать бесконечной.



$$m = 2{\cdot}10^{-3}\text{кг}; \quad V_0 = 12\text{м/с}; \quad U = 2\text{м/}c; \quad \beta = \frac{\pi}{4}; \quad \Delta t = 2{\cdot}10^{-5}\text{с}.$$

Вид удара:**абсолютно упругий**.
Требуется определить следующие величины:

$$a_k; |\Delta\vec{V}|; \Delta E; F$$

Обозначим $\vec{V}_1$ - скорость частицы до удара, $\vec{V}_2$ - после удара в системе отсчета, связанной со стенкой. Масса стенки бесконечна, тогда стенка не меняет свою скорость в процессе удара, следовательно, система отсчета, связанная со стенкой - инерциальная. Тогда:

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_0 - \vec{U}, \quad \vec{V}_2 = \vec{V}_K - \vec{U}.$$

По закону сохранения энергии для абсолютно упругого удара:

$$\frac{mV_1^2}{2} = \frac{mV_2^2}{2} \quad \Rightarrow \quad |\vec{V}_1| = |\vec{V}_2|$$

Так как стенка параллельна оси y, то проекция скорости частицы на эту ось остается неизменной. Тогда $V_{1x} = -V_2x$. Найдем скорость частицы после удара:

$$\begin{cases} V_{Kx} = 2U - V_{0x} \\ V_{Ky} = V_{0y} \end{cases}$$

Тогда:

$$V_K = \sqrt{V_{Kx}^2 + V_{Ky}^2} = \sqrt{(2U - V_0\cos\beta)^2 + (V_0\sin\beta)^2}$$

Изменение кинетической энергии во время удара считается по формуле:

$$\Delta E = \frac{m(V_K^2 - V_0^2)}{2}.$$

Проекция скорости на ось y не изменилась, тогда:

$$|\Delta\vec{V}| = |V_{Kx} - V_{0x}| = |2(U - V_{0x})|.$$

По закону сохранения импульса:

$$m\vec{V}_K = m\vec{V}_0 + \Delta\vec{p}, \quad \text{где} \quad \Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t.$$

Тогда

$$|\Delta\vec{p}| = |\vec{F}\Delta t| = |m(V_{Kx} - V_{0x})| = |2m(U - V_0\sin\beta)| \Rightarrow F = \frac{|2m(U - V_0\sin\beta)|}{\Delta t}.$$

Угол между векторами новой скорости частицы и скорости стенки вычисляется по формуле:

$$a_K = \pi - \operatorname{arctg}\left(\left|\frac{V_{Ky}}{V_{Kx}}\right|\right) = \pi - \operatorname{arctg}\left(\left|\frac{V_0\sin\beta}{2U - V_0\cos\beta}\right|\right).$$

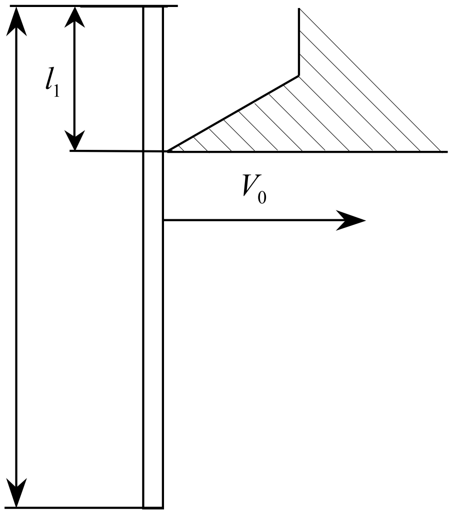
Ответ:

$$\begin{cases} a_K = \pi - \operatorname{arctg}\left(\left|\frac{V_0\sin\beta}{2U - V_0\cos\beta}\right|\right) \approx 2.057, \\ \Delta E = \frac{m((2U - V_0\cos\beta)^2 + (V_0\sin\beta)^2 - V_0^2)}{2} = \approx -0.052\text{Дж}, \\ |\Delta\vec{V}| = |2(U - V_0\cdot\cos\beta)| \approx 12.971\text{м/с}, \\ F = \frac{|2m(U - V_0\sin\beta)|}{\Delta t} \approx 2.594\text{кН}. \end{cases}$$

Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 12 вариант

Задача 2-2

Условие



Однородный тонкий вертикальный стержень длины l, движущийся поступательно в плоскости рисунка с горизонтальной скоростью V_0, налетает на край массивной переграды. После удара стержень вращается вокруг оси O, перпендикулярной плоскости рисунка. Ось вращения стержня совпадает с ребром преграды и проходит через точку удара стержня о преграду. Потерями механической энергии при вращении стержня после удара пренебречь.

$$l = 1\text{м}, \quad l_1 = 0.4l, \quad V_0 = 0.5V_{om}.$$

Сразу после столкновения центр масс стержня имеет ту же скорость, что и до столкновения. Определим расстояние от центра масс до оси вращения: $r = \frac{l}{2} - l_1$. Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его центр - $\frac{ml^2}{12}$. Для оси O он будет равен $I = \frac{ml^2}{12} + mr^2$. Сразу после столкновения угловая скорость стержня равна $\omega_0 = \frac{V_0}{r}$. Кинетическая энергия стержня сразу после столкновения равна

$$E_\text{к} = \frac{I\omega_0^2}{2}.$$

Выберем за нулевой уровень потерциальной энергии уровень, на котором находится ось O. Тогда на этом уровне потенциальная энергия стержня будет равна нулю, а в исходном положении она равна

$$E_\text{п} = \frac{mgl}{2} - mg(l - l_1).$$

Положим ω_{0m} - минимальная начальная угловая скорость, при которой возможно второе соударение. Тогда:

$$\frac{I\omega_{0m}^2}{2} + \frac{mgl}{2} - mg(l - l_1) = 0.$$

Из полученного соотношения выразим ω_{0m}:

$$\omega_{0m} = \sqrt{\frac{mgl - 2mgl_1}{I}}.$$

Так как $\omega_0 = \frac{V_0}{r}$, то$V_{0m} = r\omega_{0m}$.

Когда стержень повернут на угол φ, его потенциальная энергия равна

$$E_\text{п} = \left(\frac{mgl}{2} - mg(l - l_1)\right) \cdot \cos\varphi.$$

Найдем φ_m:

$$\left(\frac{mgl}{2} - mg(l - l_1)\right) \cdot (\cos\varphi_m - 1) = \frac{I\omega_0^2}{2} \Rightarrow \varphi_m = \arccos\left(1 + \frac{I\omega_0^2}{mgl - 2mg(l - l_1)}\right)$$

Запишем полученные величины:

$$\begin{cases} V_{0m} = r\sqrt{\frac{gl - 2gl_1}{\frac{l^2}{12} + r^2}} \approx 0.458\text{м/с}, \\ \omega_0 = \frac{0.4 \cdot V_0 m}{r} \approx 2.292\text{с}^{-1}, \\ \varphi_m = \arccos\left(1 + \frac{\omega_0^2\left(\frac{l^2}{12} + r^2\right)}{2gl_1 - gl}\right) \approx 0.723. \end{cases}, \text{где} \quad r = \frac{l}{2} - l_1$$

Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 12 вариант

Задача 3-1

Условие

Для данной колебательной системы необходимо:

1) Вывести дифференнциальное уравнение свободных затухающих колебаний, если сила сопротивления движению КС пропорциональна скорости, т.е. $\vec{F} = -r\vec{V}$, где r - коэффициент сопротивления.

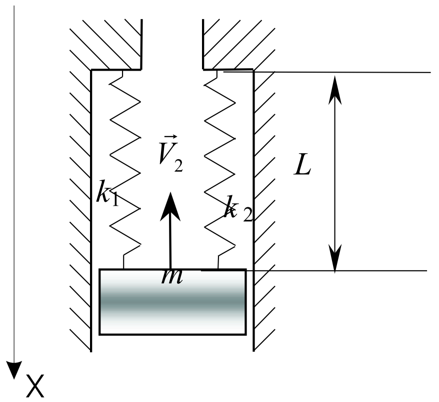
2) Определить круговую частоту ω_0 и период T_0 свободных незатухающих колебаний.

3) Найти круговую частоту ω и период T свободных затухающих колебаний.

4) Вычислить логарифмический декремент затухания.

5) Определить, используя начальные условия задачи и исходные данные, начальные амплитуду A_0 и фазу φ_0 колебаний.

6) Написать с учетом найденных значений уравнение колебаний.



Исходные данные:
$r = 0.1$кг/с,
$k_1 = 8$Н/м,
$k_2 = 10$Н/м,
$m = 0.16$кг,
$l_{10} = l_{20} = 0.2$м,
$L = 0.26$м,
$V_2 = 0.08$м/с.

Две параллельные пружины с коэффициентами жесткости k_1 и k_2 можно заменить одной пружиной с коэффициентом жесткости $k = k_1 + k_2$.
Примем за точку с $x = 0$ точку, в которой все силы, действующие на тело скомпенсированы. x_0 - точка, в которой пружина находится в нерастянутом положении. В точке $x = 0$ выполняется соотношение $mg = -kx_0$. Отсюда $x_0 = -\frac{mg}{k}$. В произвольной точке x сумма сил упругости и тяжести: $F = mg - k(x_1 - x_0) = mg - mg - kx = kx$. То есть можно заменить исходную пружину пружиной с такой же жесткостью и с недеформированным положением в точке $x_0 = -\frac{mg}{k}$. Последовательно вычислим искомые величины:

1) По Второму Закону Ньютона:
$$\vec{F} = m\vec{a}.$$
Рассмотрим это соотношение в проекции на ось x:
$$-kx - rV_x = ma_x \Rightarrow \ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$
Получено дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний.

2) При отсутствии силы rV_x имело бы место соотношение: $-kx = ma \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$. Полученное уравнение является дифференциальным уравнением свободных незатухающих колебаний, причем $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \approx 10.607c^{-1}$, а $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0.592$c.

3) $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \approx 10.602\text{с}^{-1}$, где $\quad \beta = \frac{r}{2m}, T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx 0.593$с

4) $\delta = \frac{1}{\beta} = \frac{2m}{r} \approx 3.2$с

5) $\frac{kx_0^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2} = \frac{kA_0^2}{2}$, где $\quad x_0 = L - (l_{10} + \frac{mg}{k}) \Rightarrow A_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}V_1^2} \approx 0.028$м;
$\varphi = \arccos\left(\frac{x_0}{A_0}\right) \approx 2.871.$

6) Уравнение имеет вид: $x(t) = A_0 e^{-\beta t}\sin(\omega t + \varphi)$.

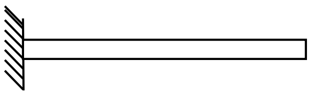
Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 12 вариант

Задача 4-1

Условие

Для стержня длиной L, закрепленного, как указано на рисунке, необходимо:

1) вывести формулу для возможных частот продольных волн, возбуждаемых в стержне, при которых в нём образуется стоячая волна,
2) указать какая частота колебаний является основной, а какие частоты относятся к обертонам (к высшим гармоникам),
3) определить частоту и длину волны i-ой гармоники,
4) для этой гармоники нарисовать вдоль стержня качественные картины стоячих волн амплитуд смещений и деформаций.



Материал: медь,
$\rho = 8.9 \cdot 10^3$кг/м^3,
$E = 12 \cdot 10^{10}$Па,
$L = 1.2$м,
$i = 1$.

Стоячая волна будет образовываться при наложении двух противоположных волн $\xi_1 = A\cos(\omega t - kx + \varphi_1)$ и $\xi_1 = A\cos(\omega t + kx + \varphi_2)$. Она будет иметь вид:

$$\xi = A\cos(\omega t + \widetilde{\varphi_1})\cos(kx + \widetilde{\varphi_2})$$

Для данного типа крепления на длину стоячей волны накладывается ограничение: $\lambda = \frac{4L}{i}, \quad i \in \mathbb{N}$ Скорость распространения волн в твердом веществе: $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Найдем последовательно искомые величины:

1) Найдем ограничение, накладываемое на частоту волн, способных образовывать стоячие волны:

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \Rightarrow \omega = \frac{\pi i}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad i \in \mathbb{N}$$

2) Частота $\omega_0 = \frac{\pi}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx 4.215 \cdot 10^5$Гц является основной, частоты при $i > 1$ относятся к обертонам.
3) Частота i-ой гармоники: $\omega_i = \frac{\pi i}{2L}\sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx 4.807 \cdot 10^3$Гц, длина волны: $\lambda_i = \frac{4L}{i} \approx 4.8$м.
4) Качественные картины амплитуд смещений (слева) и деформаций (справа):