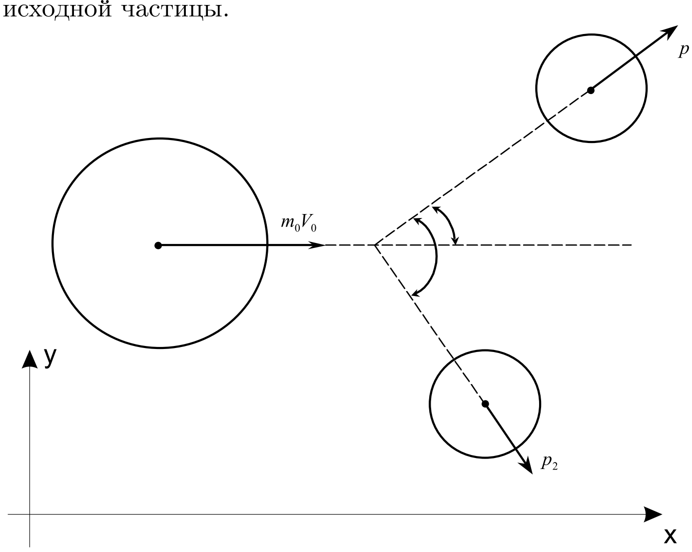
Щербаков Иван Сергеевич, ИУ8-21, 26 вариант

Задача 1-3

Условие

Нерелятивистская частица с внутренней энергией E_0 и массой m_0, летящая со скоростью $\vec{V_0}$ распадается на две нерелятивистские частицы, скорости которых $\vec{V_1}$ и $\vec{V_2}$, массы m_1 и m_2. Импульсы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, кинетические энергии E_1 и E_2. При этом часть внутренней энергии E_0 исходной частицы в количестве ηE_0 расходуется на увеличение кинетической энергии образовавшихся частиц. φ - Угол разлета частиц, θ - угол отклонения первой частицы от первоначального направления полета исходной частицы.



$m_0 = 10^{-2}$кг,
$V_0 = 20$м/с,
$\varphi = \frac{\pi}{2}$,
$m_1 = \frac{2}{3}m$,
$m_2 = \frac{1}{3}m$,
$p_2 = \frac{m_0V_0}{2}$

Необходимо определить следующие величины:

$$\theta, V_1, p_1, E_1, E_2, \eta E_0$$

Так как $p_2 = \frac{mV_0}{2}$, а $m_2 = \frac{m}{3}$, то $V_2 = \frac{p_2}{m_2} = \frac{3V_0}{2}$
По закону сохранения импульса:

$$m_0\vec{V_0} = m_1\vec{V_1} + m_2\vec{V_2}.$$

По закону сохранения энергии:

$$\frac{m_0V_0^2}{2} + \eta E_0 = \frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2}$$

Рассмотрим эти соотношения в проекциях на оси x и y. Обозначим $\beta = \varphi - \theta$. Тогда

$$V_{0x} = V_0, V_{0y} = 0, V_{1x} = V_1\cos\theta, V_{1y} = V_1\sin\theta, V_{2x} = V_2\cos\beta, V_{2y} = -V_2\sin\beta.$$

Так как $\varphi = \theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg}\theta = \operatorname{ctg}\beta$. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} V_2 = \frac{9V_0}{3}, \\ m_0V_0 = m_1V_{1x} + m_2V_{2x}, \\ m_1V_{1y} = -m_2V_{2y}, \\ m_0V_{0x}^2 + 2\eta E_0 = m_1(V_{1x}^2 + V_{1y}^2) + m_2(V_{2x}^2 + V_{2y}^2), \\ V_{2x}^2 + V_{2y}^2 = \frac{9V_0^2}{4}, \\ \frac{V_{1x}}{V_{1y}} = -\frac{V_{2y}}{V_{2x}}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_2 = \frac{9V_0}{4}, \\ V_{1x} = \frac{m_0^2V_0^2 - m_2^2V_2^2}{m_0V_0m_1}, \\ V_{1y} = \frac{m_2V_2(m_0^2V_0^2 - m_2^2V_2^2)}{(m_0m_1V_0)\sqrt{m_0^2V_0^2 - m_2^2V_2^2}}, \\ V_{2x} = \frac{m_2V_2^2}{m_0V_0}, \\ V_{2y} = -\frac{V_2\sqrt{m_0^2V_0^2 - m_2^2V_2^2}}{m_0V_0}, \\ \eta E_0 = \frac{m_1m_2V_2^2 + m_0^2V_0^2 - m_1m_0V_0^2 - m_2^2V_2^2}{2m_1}. \end{cases}$$

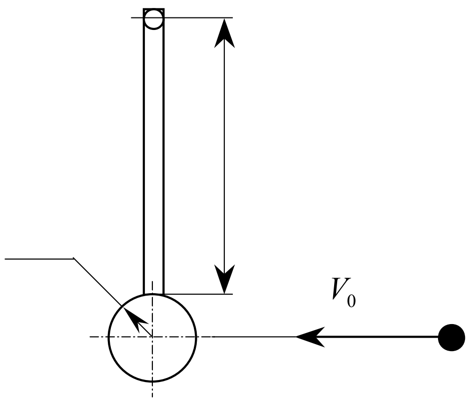
Найдем искомые величины:

$$\begin{cases} V_2 = \frac{9V_0}{4} = 30\text{м/с}, \\ \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{V_{1y}}{V_{1x}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{m_2v_2}{\sqrt{m_0^2V_0^2 - m_2^2V_2^2}}\right) = \frac{\pi}{6}, \\ V_1 = \sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2} = \sqrt{\left(\frac{m_0^2V_0^2 - m_2^2V_2^2}{m_0V_0m_1}\right)^2 + \left(\frac{m_2V_2(m_0^2V_0^2 - m_2^2V_2^2)}{(m_0m_1V_0)\sqrt{m_0^2V_0^2 - m_2^2V_2^2}}\right)^2} = 15\sqrt{3} \approx 25.981\text{м/с}, \\ p_1 = m_1V_1 = \frac{\sqrt{3}}{100} \approx 0.017\frac{\text{кг}\cdot\text{м}}{\text{с}}, \\ E_1 = \frac{m_1V_1^2}{2} = \frac{9}{40} \approx 0.225\text{Дж}, \\ E_2 = \frac{m_2(V_{2x}^2 + V_{2y}^2)}{2} = \frac{m_2\left(\left(\frac{m_2V_2^2}{m_0V_0}\right)^2 + \left(\frac{V_2\sqrt{m_0^2V_0^2 - m_2^2V_2^2}}{m_0V_0}\right)^2\right)}{2} = 0.3\text{Дж}, \\ \eta E_0 = \frac{m_1m_2V_2^2 + m_0^2V_0^2 - m_1m_0V_0^2 - m_2^2V_2^2}{2m_1} = \frac{7}{40} = 0.175\text{Дж}. \end{cases}$$

Шербаков Иван Сергеевич, ИУ8-21, 26 вариант

Задача 2-3

Условие



Физический маятник, состоящий из шара радиусом R и массой M, жестко прекрепленного к тонкому стержню длиной $4R$ и массой M, подвешен к горизонтальной оси О, проходящей через конец стержня перпендикулярно плоскости рисунка. Маятник может свободно без трения вращаться вокруг оси О. Шарик массы m движется горизонтально в плоскости рисунка со скоростью $\vec{V}_0$ вдоль прямо, проходящей через центр шара, и ударяет в шар. При этом взаимодействие шарика с маятником происходит в виде абсолютно неупругого удара.
$R = 3$см,
$M = 1$кг,
$m = 0.1$кг,
$V_0 = 0.5V_{0m}$.

Вычислить:

$$\varphi_m; \quad V_{0m}; \quad \Delta E.$$

Момент инерции системы с шариком (шарик считается материальной точкой):

$$I = I + 25mR^2 = \frac{401}{15}MR^2 + 25mR^2.$$

За нулевой уровень потенциальной энергии выберем уровень, на котором находится ось вращения. Найдем энергию системы в начальном состоянии, состоянии максимального подъема и состоянии отклонения на угол φ:

$$\begin{cases} E_{\text{п}0} = -2MgR - 5MgR - 5mgr = -(7M+5m)gR. \\ E_{\text{п}1} = 2MgR + 5MgR + 5mgr = (7M+5m)gR. \\ E_{\text{п}\varphi} = (-2MgR - 5MgR - 5mgr)\cos\varphi = -(7M+5m)gR\cos\varphi \end{cases}$$

Кинетическая энергия системы сразу после столкновения: $E_{\text{к}1} = \frac{I\omega_0^2}{2}$
Найдем ω_m. По закону сохранения энергии:

$$\frac{I\omega_m^2}{2} - (7M+5m)gR = (7M+5m)gR \Rightarrow \omega_m = \sqrt{\frac{4(7M+5m)gR}{I}}.$$

При соударении выполняется закон сохранения момента импульса:

$$I\omega_0 = 5mV_0R. \Rightarrow \omega_0 = \frac{5mV_0R}{I}; \quad V_{0m} = \frac{I\omega_m}{5mR} = \sqrt{\frac{4Ig(7M+5m)}{25m^2R}}; \omega_0 = \sqrt{\frac{(7M+5m)gR}{I}}.$$

Запишем закон сохранения энергии для рассматриваемого случая:

$$\frac{mV_0^2}{2} + \Delta E = \frac{I\omega_0^2}{2} \Rightarrow \Delta E = \frac{mV_0^2}{2} - \frac{I\omega_0^2}{2} = \frac{mV_0^2}{2} - \frac{25m^2V_0^2R^2}{2I}$$

Найдем φ_m:

$$\frac{I\omega_0^2}{2} - (7M+5m)gR = -(7M+5m)gR\cos\varphi_m \Rightarrow \varphi_m = \arccos\left(1 - \frac{I\omega_0^2}{2gR(7M+5m)}\right).$$

Запишем полученные результаты:

$$\begin{cases} I = \frac{401}{15}MR^2 + 25mR^2, \\ V_{0m} = \sqrt{\frac{4Ig(7M+5m)}{25m^2R}} \approx 32.131\text{м/с}, \\ \Delta E = \frac{mV_0^2}{2} - \frac{25m^2V_0^2R^2}{2I} \approx 11.801\text{Дж}, \\ \varphi_m = \arccos\left(1 - \frac{I\omega_0^2}{2gR(7M+5m)}\right) = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Щербаков Иван Сергеевич, ИУ8-21, 26 вариант

Задача 3-3

Условие

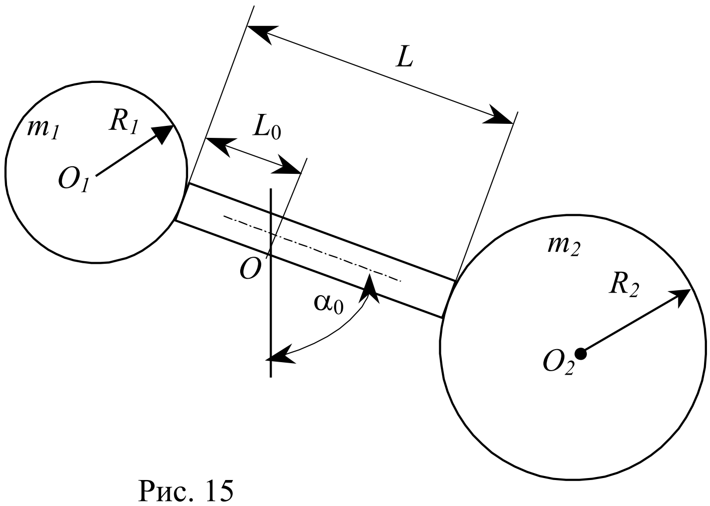
На рисунке представлен физический маятник, состоящий из двух шаров радиусами R_1 и R_2 и массами соответственно m_1 и m_2. Шары жестко скреплены с помощью стержня длиной L и массой m_1. Через точку O стержня проходит горизонтальная ось вращения, расположенная на расстоянии l_0 от верхнего конца стержня. Маятник отклоняют от положения равновесия на угол α_0, затем в начальный момент времени $t = 0$ отпускают. В результате маятник начинает совершать свободные незатухающие колебания. Коэффициент сопротивления считать равным нулю.
Для данной колебательной системы необходимо:

1) Вывести дифференнциальное уравнение свободных незатухающих колебаний.

2) Определить круговую частоту ω_0 и период T_0 свободных незатухающих колебаний.

3) Определить, используя начальные условия задачи и исходные данные, начальные амплитуду A_0 и фазу φ_0 колебаний.

4) Написать с учетом найденных значений урванение колебаний.



$r = 0$,
$m_1 = 2.1$кг,
$m_2 = 4.1$кг,
$R_1 = 0.04$м,
$R_2 = 0.05$м,
$L = 1,2$м,
$l_0 = 0.4$м,
$\alpha = \frac{\pi}{9}$.

Рис. 15

Вычислим момент инерции системы относительно оси O:

$$I = \frac{2}{5}m_1R_1^2 + m_1(R_1 + l_0)^2 + \frac{1}{3}m_1L^2 + m_1l_0^2 + \frac{2}{5}m_2R_2^2 + m_2(R_2 + L - l_0)^2$$

Вычислим расстояние x_0 от верхнего конца стержня до центра масс системы:

$$-m_1(R_1 + x_0) + m_2(R_2 + L - x_0) + m_1\left(\frac{L}{2} - x_0\right) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{2m_2r_2 + 2m_2L + m_1L - 2m_1r_1}{2(2m_1 + m_2)}$$

Последовательно вычислим искомые величины:

1) В процессе колебаний на систему действует сила тяжести. Ее момент равен $M = -g(2m_1 + m_2)(x_0 - l_0)\alpha$. Тогда:

$$M = I\epsilon \Rightarrow \ddot{\alpha} + \frac{g(2m_1 + m_2)(x_0 - l_0)}{I}\alpha = 0.$$

Получено дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний.

2) $\omega_0 = \sqrt{\frac{g(2m_1+m_2)(x_0-l_0)}{I}} \approx 2.249\text{с}^{-1}, T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 2.524$с, где
$x_0 = \frac{2m_2r_2+2m_2L+m_1L-2m_1r_1}{2(2m_1+m_2)}, I = \frac{2}{5}m_1R_1^2+m_1(R_1+l_0)^2+\frac{1}{3}m_1L^2+m_1l_0^2+\frac{2}{5}m_2R_2^2+m_2(R_2+L-l_0)^2$.

3) $A_0 = \alpha_0 = \frac{\pi}{9}, \varphi = 0$.

4) $\alpha = \alpha_0 cos(\omega_0 t)$.

Шербаков Иван Сергеевич, ИУ8-21, 26 вариант

Задача 4-4

Условие

Для струны длиной l, натянутой с силой $\vec{F}$ и закрепленной, как указано на рисунке, необходимо:

1) определить частоту колебаний и длину волны i-ой гармоники стоячей волны,
2) для этой гармоники нарисовать вдоль стержня качественные картины стоячих волн амплитуд смещений и давлений.

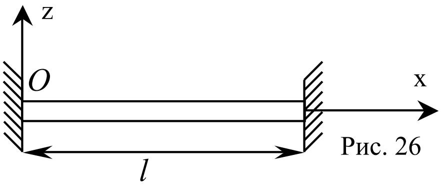


Рис. 26

Материал: сталь,
$L = 1.2$м,
$d = 0.3$мм,
$\rho = 7.8 \cdot 10^3$кг/м^3,
$F = 5$Н,
$i = 4$.

Стоячая волна будет образовываться при наложении двух противоположных волн $\xi_1 = A\cos(\omega t - kx + \varphi_1)$ и $\xi_1 = A\cos(\omega t + kx + \varphi_2)$. Она будет иметь вид:

$$\xi = A\cos(\omega t + \widetilde{\varphi_1})\cos(kx + \widetilde{\varphi_2})$$

На длину стоячей волны накладывается ограничение: $\lambda = \frac{2L}{i}, \quad i \in \mathbb{N}$ Скорость распространения волн в струне: $c = \sqrt{\frac{F}{\tau}}$, где $\tau = \rho S, S = \frac{\pi d^2}{4}$. Тогда,

$$c = \sqrt{\frac{4F}{\pi d^2 \rho}}.$$

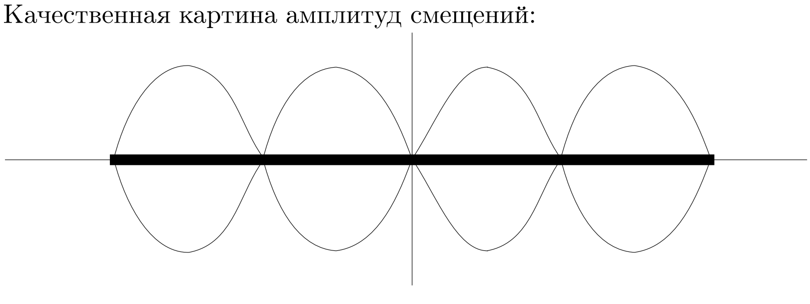
Найдем последовательно искомые величины:

1) Найдем ограничение, накладываемое на частоту волн, способных образовывать стоячие волны:

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \Rightarrow \omega = \frac{\pi c i}{L}, \quad i \in \mathbb{N}$$

Частота $\omega_0 = \frac{\pi c}{L}$ является основной, частоты при $i > 1$ относятся к обертонам. Частота i-ой гармоники: $\omega_i = \frac{\pi c i}{L} \approx 9.972 \cdot 10^3$Гц, длина волны: $\lambda_i = \frac{2L}{i} = 0.6$м.

2) Качественная картина амплитуд смещений:



3) Качественная картина амплитуд давлений: