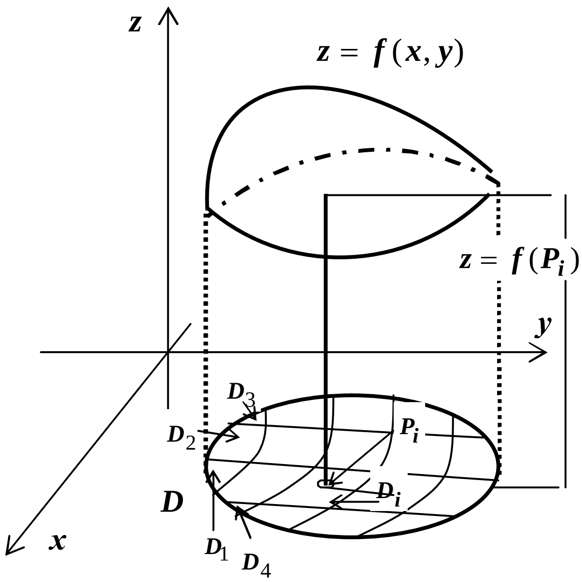
16. Кратные, криволинейные, поверхностные интегралы.

16.1. Двойной интеграл.

16.1.1. Определение двойного интеграла. Теорема существования двойного интеграла.

Пусть на плоскости Oxy задана ограниченная замкнутая область D с кусочно-гладкой границей, и пусть на области D определена функция $f(x, y)$.



Разобьём область D произвольным образом на n подобластей $D_1, D_2, D_3, \dots D_n$ (не имеющих общих внутренних точек). Символом $s(D_i)$ будем обозначать площадь области D_i; символом $\mathrm{diam}(D)$ здесь и дальше будет обозначаться наибольшее расстояние между двумя точками, принадлежащими области D:

$$\mathrm{diam}(D) = \max_{P_1, P_2 \in D} \rho(P_1, P_2);$$

символом d обозначим наибольший из диаметров областей D_i: $\mathrm{d} = \max\limits_{i=1,2,\dots,n} \mathrm{diam}(D_i)$.

В каждой из подобластей D_i $(i = 1,2,\dots,n)$ выберем произвольную точку $P_i = (x_i, y_i)$, вычислим в этой точке значение функции $f(P_i) = f(x_i, y_i)$, и составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot s(D_i)$.

Если существует предел последовательности интегральных сумм при $\mathrm{d} = \max\limits_{i=1,2,\dots,n} \mathrm{diam}(D_i) \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения области D на подобласти D_i, ни от выбора точек P_i, то функция $f(x, y)$ называется интегрируемой по области D, а значение этого предела называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области D и обозначается $\iint\limits_D f(P)ds$.

Если расписать значение $f(P)$ через координаты точки P, и представить ds как $ds = dx \cdot dy$, получим другое обозначение двойного интеграла: $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$. Итак, кратко,

$$\iint\limits_D f(x, y)dxdy = \iint\limits_D f(P)ds = \lim_{\substack{d \to 0 \\ (n \to \infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \cdot s(D_i).$$

Теорема существования двойного интеграла. Если подынтегральная функция $f(x, y)$ непрерывна на области D, то она интегрируема по этой области.

16.1.2. Геометрический смысл двойного интеграла.

Геометрический смысл каждого слагаемого интегральной суммы: если $f(x, y) \geq 0$, то $f(P_i) \cdot s(D_i)$ - объём прямого цилиндра с основанием D_i высоты $f(P_i)$; вся интегральная сумма $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot s(D_i)$ - сумма объёмов таких цилиндров, т.е. объём некоторого ступенчатого тела (высота ступеньки, расположенной над подобластью D_i, равна $f(P_i)$). Когда $\mathrm{d} = \max\limits_{i=1,2,\dots,n} \mathrm{diam}(D_i) \to 0$, это ступенчатое тело становится всё ближе к изображенному на рисунке телу, ограниченному снизу областью D, сверху - поверхностью $z = f(x, y)$, с цилиндрической боковой поверхностью, направляющей которой является граница области D, а образующие параллельны оси Oz. Двойной интеграл $\iint\limits_D f(P)ds$ равен объёму этого тела.

16.1.3. Свойства двойного интеграла.

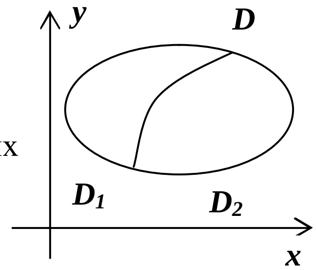
16.1.3.1. Линейность. Если функции $f(x, y)$, $g(x, y)$ интегрируемы по области D, то их линейная комбинация $\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)$ тоже интегрируема по области D, и $\iint\limits_D [\alpha f(P) + \beta g(P)]ds =$

$= \alpha\iint\limits_D f(P)ds + \beta\iint\limits_D g(P)ds$.

Док-во. Для интегральных сумм справедливо равенство $\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\alpha f(P_i)+\beta g(P_i)\right]s(D_i) =$

$= \alpha\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)s(D_i) + \beta\sum\limits_{i=1}^{n} g(P_i)s(D_i)$. Переходя к пределу при $\mathrm{d} = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \mathrm{diam}(D_i) \to 0$ и пользуясь свойствами пределов, рассмотренными в разделе **4.4.6. Арифметические действия с пределами** (конкретно, свойствами 4.4.10.1 и 4.4.10.2), получим требуемое равенство.

16.1.3.2. Аддитивность. Если область D является объединением двух областей D_1 и D_2, не имеющих общих внутренних точек, то $\iint\limits_D f(P)ds = \iint\limits_{D_1} f(P)ds + \iint\limits_{D_2} f(P)ds$.



Док-во. Пусть область D_1 разбита на подобласти $D_{1,1}, D_{1,2}, \ldots, D_{1,n_1}$, область D_2 разбита на подобласти $D_{2,1}, D_{2,2}, \ldots, D_{2,n_2}$. Тогда объединение этих разбиений даст разбиение области D: $D = \left(\bigcup\limits_{i_1=1}^{n_1} D_{1,i_1}\right) \cup \left(\bigcup\limits_{i_2=1}^{n_2} D_{2,i_2}\right)$ на $n_1 + n_2$ подобластей. Интегральная сумма по области D равна сумме сумм по областям D_1 и D_2: $\sum\limits_{i=1}^{n_1+n_2} f(P_i)\cdot s(D_i) = \sum\limits_{i_1=1}^{n_1} f(P_{i_1})\cdot s(D_{i_1}) + \sum\limits_{i_2=1}^{n_2} f(P_{i_2})\cdot s(D_{i_2})$. Как и в предыдущем случае, переходя к пределу при $\mathrm{d} = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2} \mathrm{diam}(D_{i_j}) \to 0$, получим требуемое равенство.

16.1.3.3. Интеграл от единичной функции по области D равен площади этой области: $\iint\limits_D ds = s(D)$.

Док-во: Для любого разбиения $\sum\limits_{i=1}^{n} s(D_i) = s(D)$, т.е. не зависит ни от разбиения, ни от выбора точек P_i. Предел постоянной равен этой постоянной, поэтому $\iint\limits_D ds = \lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} s(D_i) = s(D)$.

16.1.3.4. Интегрирование неравенств. Если в любой точке $P \in D$ выполняется неравенство $f(P) \le g(P)$, и функции $f(P), g(P)$ интегрируемы по области D, то $\iint\limits_D f(P)ds \le \iint\limits_D g(P)ds$.

Док-во. В любой точке $P_i \in D$ выполняется неравенство $f(P_i) \le g(P_i)$, поэтому $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)s(D_i) \le \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)s(D_i)$. По теореме о переходе к пределу в неравенствах отсюда следует требуемое утверждение.

16.1.3.5. Теоремы об оценке интеграла.

16.1.3.5.1. Если функция $f(P)$ интегрируема по области D, и для $\forall P \in D$ выполняется $m \le f(P) \le M$, то $m\cdot s(D) \le \iint\limits_D f(P)ds \le M\cdot s(D)$.

Док-во. $m \le f(P) \le M \overset{16.3.4}{\Rightarrow} \sum\limits_{i=1}^{n} m\cdot s(D_i) \le \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)s(D_i) \le \sum\limits_{i=1}^{n} M\cdot s(D_i) \overset{16.3.1}{\Rightarrow}$

$\overset{16.3.1}{\Rightarrow} m\sum\limits_{i=1}^{n} s(D_i) \le \sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)s(D_i) \le M\sum\limits_{i=1}^{n} s(D_i) \overset{16.3.3}{\Rightarrow} m\cdot s(D) \le \iint\limits_D f(P)ds \le M\cdot s(D)$ (цифрами над знаками импликации обозначены номера применяемых ранее доказанных свойств).

16.1.3.5.2. Если функция $f(P)$ интегрируема по области D, то $\left|\iint\limits_D f(P)ds\right| \le \iint\limits_D |f(P)|ds$.

Док-во. Эти неравенства непосредственно следуют из того, что $-|f(P)| \le f(P) \le |f(P)|$ и свойства **16.1.3.4. Интегрирование неравенств.**

16.1.3.6. Теорема о среднем. Если функция $f(P)$ непрерывна на области D, то существует точка $P_0 \in D$, такая что $\iint\limits_D f(P)ds = f(P_0)\cdot s(D)$.

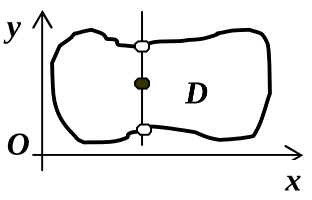
Док-во. Непрерывная на ограниченной замкнутой области D функция $f(P)$ принимает в некоторых точках этой области своё минимальное m и максимальное M значения. Так как $m \le f(P) \le M$, то $m\cdot s(D) \le \iint\limits_D f(P)ds \le M\cdot s(D)$, или $m \le \frac{1}{s(D)}\iint\limits_D f(P)ds \le M$. Непрерывная функция принимает, кроме того, любое значение, заключённое между m и M, в частности, значение $\frac{1}{s(D)}\iint\limits_D f(P)ds$. Следовательно, $\exists P_0 \in D \mid f(P_0) = \frac{1}{s(D)}\iint\limits_D f(P)ds$, откуда и следует доказываемое утверждение.

16.1.4. Вычисление двойного интеграла. Двукратный (повторный) интеграл.

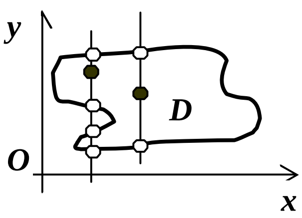
16.1.4.1. Определение простой (правильной) области. Область D на плоскости ***Oxy*** будем называть **простой (правильной) в направлении оси *Oy***, если любая прямая, проходящая через внутреннюю точку области D и параллельная оси ***Oy***, пересекает границу D в двух точках.

Аналогично определяется область, **простая (правильная) в направлении оси *Ox***: любая прямая, проходящая через внутреннюю точку области D и параллельная оси ***Ox***, пересекает границу D в двух точках.

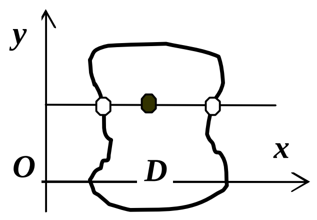
Область, правильную (простую) в направлении обеих осей, будем называть **правильной**.



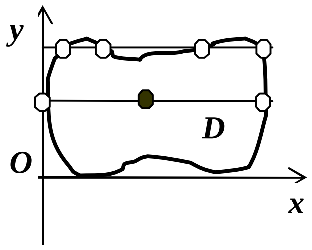
Область, простая в направлении оси ***Oy***.



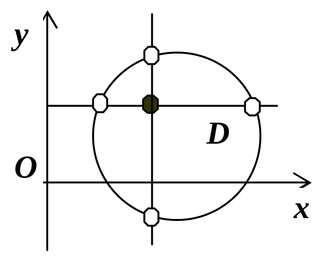
Область, не являющаяся простой в направлении оси ***Oy***.



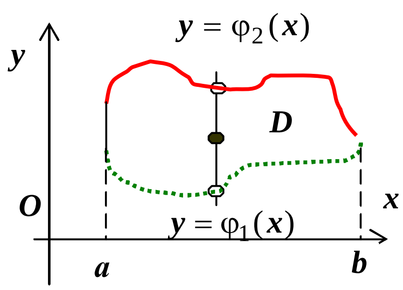
Область, простая в направлении оси ***Ox***.



Область, не являющаяся простой в направлении оси ***Ox***.

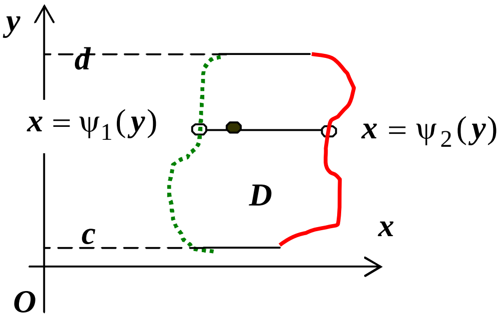


Простая область (в направлении обеих осей).



Ограниченную замкнутую область D, правильную в направлении оси ***Oy***, можно описать неравенствами $D:\begin{cases} a \le x \le b, \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\end{cases}$. Числа a и b существуют вследствие ограниченности области D, функция $\varphi_1(x)$ образована нижними точками пересечения прямой $x = x_0$ при $a < x_0 < b$ с границей области D, функция $\varphi_2(x)$ - верхними точками пересечения этой прямой с границей области D:

Аналогичным образом область D, ограниченную, замкнутую и правильную в направлении оси ***Ox***, можно описать неравенствами $D:\begin{cases} c \le y \le d, \\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\end{cases}$. Функция $\psi_1(y)$ образована левыми точками пересечения прямой $y = y_0$ при $c < y_0 < d$ с границей области D, функция $\psi_2(y)$ - правыми точками пересечения этой прямой с границей области D.



Для правильной области (т.е. области, правильной в направлении обеих осей) существуют оба способа представления: и $D:\begin{cases} a \le x \le b, \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x) \end{cases}$, и $D:\begin{cases} c \le y \le d, \\ \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y) \end{cases}$.

16.1.4.2. Двукратный (повторный) интеграл.

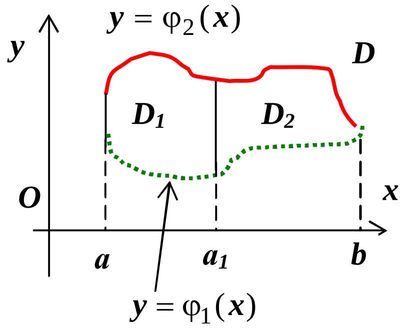
Пусть D - область, простая в направлении оси **Oy**. Рассмотрим выражение $J(D)=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$. Эта конструкция определяется через два обычных определённых интеграла. После интегрирования по ***y*** во внутреннем интеграле (переменная ***x*** при этом рассматривается как постоянная) и подстановки по ***y*** в пределах от $\varphi_1(x)$ до $\varphi_2(x)$ получается функция, зависящая только от ***x***, которая интегрируется в пределах от ***a*** до ***b***. В дальнейшем мы будем обычно записывать этот объект без внутренних скобок:

$$J(D)=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Можно показать, что двукратный интеграл обладает всеми свойствами двойного интеграла: Свойства линейности и интегрирования неравенств следуют из этих свойств определённого интеграла; интеграл от единичной функции даёт площадь области D:

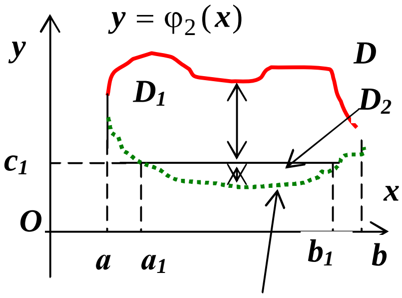
$$\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy=\int\limits_a^b dx\cdot y\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}=\int\limits_a^b[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)]dx=s(D);$$

теоремы об оценке и о среднем следуют из перечисленных свойств. Единственное свойство, с которым придётся повозиться - это свойство аддитивности. Мы докажем его в простой, но достаточной для нас форме: если область D разбита на две подобласти D_1 и D_2 прямой, параллельной одной из координатных осей, то двукратный интеграл по области D равен сумме интегралов по D_1 и D_2: $J(D)=J(D_1)+J(D_2)$.



Первый случай: прямая $x=a_1$ параллельна оси **Oy**. Тогда

$J(D)=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy=\int\limits_a^{a_1} dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy+\int\limits_{a_1}^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ (аддитивность внешнего интеграла) $=J(D_1)+J(D_2)$.



Второй случай: прямая $y=c_1$ параллельна оси **Ox**. Воспользуемся сначала аддитивностью внешнего интеграла: $J(D)=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy=$

$=\int\limits_a^{a_1} dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy+\int\limits_{a_1}^{b_1} dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy+\int\limits_{b_1}^{b} dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy=$ (теперь применим свойство аддитивности для внутреннего интеграла в среднем слагаемом) =

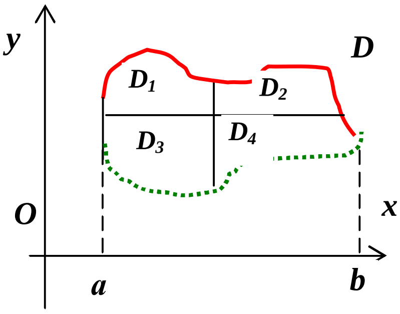
$=\int\limits_a^{a_1} dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy+\int\limits_{a_1}^{b_1} dx\left[\int\limits_{\varphi_1(x)}^{c_1} f(x,y)dy+\int\limits_{c_1}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]+\int\limits_{b_1}^{b} dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy=$ (применяем свойство линейности для внешнего интеграла в среднем слагаемом и перегруппировываем сумму)=

$$=\int\limits_a^{a_1} dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy+\int\limits_{a_1}^{b_1} dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{c_1} f(x,y)dy+\int\limits_{a_1}^{b_1} dx\int\limits_{c_1}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy+\int\limits_{b_1}^{b} dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy=$$

$$=\left\{\int\limits_a^{a_1} dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy+\int\limits_{a_1}^{b_1} dx\int\limits_{c_1}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy+\int\limits_{b_1}^{b} dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right\}+\left\{\int\limits_{a_1}^{b_1} dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{c_1} f(x,y)dy\right\}=$$

(первая фигурная скобка даёт повторный интеграл по D_1, второй - по D_2) $= J(D_1)+J(D_2)$.

Понятно, что возможны различные случаи взаимного расположения прямых $y=c_1$, $x=a_1$, $x=a_2$ и функций $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$, но логика доказательства во всех случаях такая же.



Обобщим доказанное свойство. Пусть прямая разбивает область D на две подобласти $D_{1,1}$ и $D_{1,2}$. Проведём ещё одну прямую, параллельную какой-либо координатной оси. Пусть эта прямая разбивает $D_{1,1}$ на D_1 и D_2; $D_{1,2}$ - на D_3 и D_4. По доказанному, $J(D_{1,1})=J(D_1)+J(D_2)$, $J(D_{1,2})=J(D_3)+J(D_4)$, поэтому $J(D)=J(D_{1,1})+J(D_{1,2})=J(D_1)+J(D_2)+J(D_4)+J(D_4)$. Продолжая рассуждать также, убеждаемся в справедливости следующего утверждения: если область D с помощью прямых, параллельных координатным осям, разбита на подобласти $D_1, D_2,\dots D_n$, то

$$J(D)=J(D_1)+J(D_2)+\dots+J(D_n)=\sum_{i=1}^{n} J(D_i).$$

16.1.4.3. Теорема о переходе от двойного интеграла к повторному. Пусть D - простая в направлении оси Oy область. Тогда двойной интеграл от непрерывной функции по области D равна повторному интегралу от той же функции по области D: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$.

Док-во. Разобьём область D с помощью прямых, параллельных координатным осям, на подобласти $D_1, D_2,\dots D_n$. По доказанному выше, $J(D)=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy=\sum\limits_{i=1}^{n} J(D_i)$. К каждому из интегралов $J(D_i)$ применим теорему о среднем: в любой области D_i найдётся точка P_i такая, что $J(D_i)=f(P_i)s(D_i)$. Следовательно, $J(D)=\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)s(D_i)$. В последнем равенстве справа стоит интегральная сумма для двойного интеграла $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$. Будем мельчить разбиение области так, чтобы $\mathrm{d}=\max\limits_{i=1,2,\dots,n}\mathrm{diam}(D_i)\to 0$. Вследствие непрерывности функции $f(x,y)$ по теореме существования интегральная сумма при этом стремится к двойному интегралу $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, т.е. в пределе получим $\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, что и требовалось доказать.

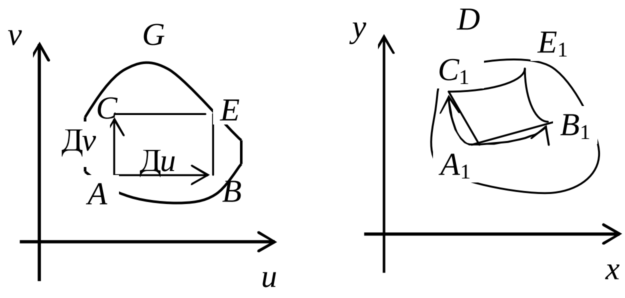
Если область D правильная в направлении оси Ox, то аналогично доказывается формула $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$. Если D правильна в направлении обеих осей, то для вычисления двойного интеграла можно применять любую из эти формул:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

Если область не является правильной, её разбивают на правильные подобласти.

16.1.5. Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах.

16.1.5.1.Теорема о замене переменных в двойном интеграле. Пусть на плоскости Ouv задана область G, и пусть отображение $F(M)=M^*$ преобразует эту область в область D на плоскости Oxy. Будем считать, что отображение F задаётся функциями $F:\begin{cases} x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\end{cases}$. Пусть: 1). F взаимно однозначно отображает G на D; 2). функции $x(u,v)$, $y(u,v)$ непрерывно дифференцируемы на G (имеют непрерывные частные производные); 3). якобиан $J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$ не обращается в нуль на G. Докажем, что в этих предположениях $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_G f(x(u,v),y(u,v))\cdot|J(u,v)|\cdot dudv$.



Док-во. 1. Рассмотрим, как связаны между собой площадь параллелограмма $ABCE$ со сторонами $\Delta u, \Delta v$ в области G и площадь его образа при преобразовании F - криволинейного параллелограмма $A_1B_1C_1E_1$ в области D. С точностью до бесконечно малых высших порядков по сравнению с $\Delta u, \Delta v$, площадь криволинейного параллелограмма $A_1B_1C_1E_1$ равна площади обычного параллелограмма, построенного на векторах $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{A_1C_1}$. Пусть точка A имеет координаты (u,v), тогда точка A_1 будет иметь координаты $(x(u,v),y(u,v))$, т.е. $A(u,v)\to A_1(x(u,v),y(u,v))$. Для других точек:

$B(u+\Delta u,v)\to B_1(x(u+\Delta u,v),y(u+\Delta u,v))=$

$B_1(x(u,v)+\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\Delta u+\alpha_1(\Delta u)\Delta u,\ y(u,v)+\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\Delta u+\alpha_2(\Delta u)\Delta u)$ (по формуле приращения дифференцируемой функции). Аналогично $C(u,v+\Delta v)\to C_1(x(u,v+\Delta v),y(u,v+\Delta v))=$

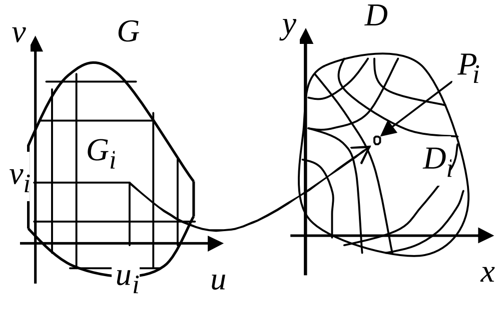
$C_1(x(u,v)+\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\Delta v+\alpha_3(\Delta v)\Delta v,\ y(u,v)+\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\Delta v+\alpha_4(\Delta v)\Delta v)$, где $\alpha_i\to 0$ $(i=1,2,3,4)$ при $\Delta u,\Delta v\to 0$. Пренебрежём членами порядка малости выше первого по сравнению с $\Delta u, \Delta v$. Тогда

$$\overline{AB}\{\Delta u,0\}\to\overline{A_1B_1}\left\{\frac{\partial x}{\partial u}(u,v),\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\right\};\overline{AC}\{0,\Delta v\}\to\overline{A_1C_1}\left\{\frac{\partial x}{\partial v}(u,v),\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\right\}.$$

Пусть теперь **i,j,k** - базисные орты пространства, в котором лежит плоскость *Oxy*. Как известно, площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{A_1C_1}$, равна модулю векторного произведения этих векторов (проекции на орт **k** равны нулю):

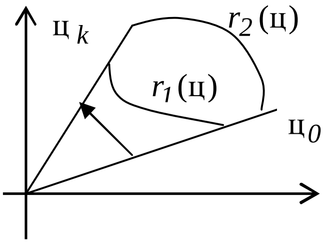
$$S_{A_1B_1C_1E_1}=\left|\left[\overline{A_1B_1}*\overline{A_1C_1}\right]\right|=\left\|\begin{matrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u & 0\\ \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v & \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v & 0\end{matrix}\right\|=|\mathbf{k}|\left\|\begin{matrix}\frac{\partial x}{\partial u}\Delta u & \frac{\partial y}{\partial u}\Delta u\\ \frac{\partial x}{\partial v}\Delta v & \frac{\partial y}{\partial v}\Delta v\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{matrix}\right\||\Delta u\Delta v|=|J(u,v)|S_{ABCE}.$$

Мы доказали замечательную вещь. Если вокруг точки $M\in G$ взять маленькую область, то после преобразования F площадь этой области меняется в $|J(M)|$ раз.



2. Перейдём к доказательству основной формулы. Разобьём G прямыми, параллельными осям координат, на области $G_1,G_2,\dots,G_n$. Образы этих линий дадут разбиение D на области $D_1,D_2,\dots,D_n$. Для этого разбиения составим интегральную сумму $\sum_{i=1}^{n}f(P_i)S(D_i)=\sum_{i=1}^{n}f(x(u_i,v_i),y(u_i,v_i))|J|S(G_i)$. Устремим $\max\limits_{i=1,2,\dots,n}diam(G_i)\to 0$; тогда и $\max\limits_{i=1,2,\dots,n}diam(D_i)\to 0$. И слева, и справа интегральные суммы записаны для непрерывных функций, следовательно,и слева, и справа существуют пределы - двойные интегралы, и они равны: $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_G f(u,v)\cdot|J(u,v)|\cdot dudv$, что и требовалось доказать.

16.1.5.2. Двойной интеграл в полярных координатах. Нам придётся применять эту формулу, в ос-



новном, для перехода к полярным координатам. Роль переменных $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ будут играть $\boldsymbol{r}$ и ц . Как известно, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}\cos\varphi, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{r}\sin\varphi$. Вычислим якобиан:

$\boldsymbol{J} = \left\| \begin{matrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\boldsymbol{r}\sin\varphi & \boldsymbol{r}\cos\varphi \end{matrix} \right\| = |\boldsymbol{r}| = \boldsymbol{r}$, следовательно,

$\iint\limits_{D(x,y)} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \boldsymbol{dxdy} = \iint\limits_{D(r,\phi)} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}\cos\varphi, \boldsymbol{r}\sin\varphi) \boldsymbol{rdrd}\varphi$. Двойной интеграл в координатах $\boldsymbol{r}$, ц вычисляется также как и в координатах $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$, переходом к двухкратному, при этом внешний обычно берут по φ . Если область $\boldsymbol{D}$ описывается как $\boldsymbol{D}: \begin{cases} \varphi_0 \le \varphi \le \varphi_k \\ \boldsymbol{r}_1(\varphi) \le \boldsymbol{r} \le \boldsymbol{r}_2(\varphi) \end{cases}$, то

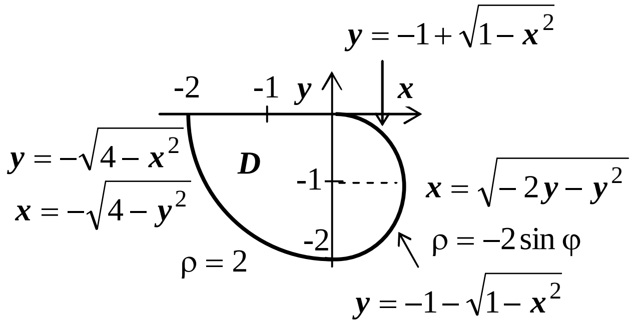
$\iint\limits_{D(r,\varphi)} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}\cos\varphi, \boldsymbol{r}\sin\varphi) \boldsymbol{rdrd}\varphi = \int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_k} \boldsymbol{d}\phi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}\cos\varphi, \boldsymbol{r}\sin\varphi) \boldsymbol{rdr}$. Естественно, если $\boldsymbol{r}_1(\varphi), \boldsymbol{r}_2(\varphi)$ - кусочные функции, то внешний интеграл разбивается на несколько слагаемых. Однозначно дать рецепт, когда имеет смысл переходить к полярным координатам, нельзя, это дело опыта. Можно пробовать перейти к $\boldsymbol{r}$, ц , если либо $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, либо кривые, ограничивающие область интегрирования, либо и то, и другое вместе, зависят от комбинации $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 = \boldsymbol{r}^2$.

Если $f(x,y) = f\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)$ и/или область D ограничивается эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, полезны обобщённые полярные координаты $x = ar\cos ц, y = br\sin ц$. Каков якобиан этого преобразования?

16.1.6. Задачи на двойной интеграл.

16.1.6.1. Переход от двойного интеграла к повторному. Изменение порядка интегрирования. Переход к полярным координатам. Смысл этих задач - научиться быстро определять параметры $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \varphi_1(\boldsymbol{x}), \varphi_2(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, \psi_1(\boldsymbol{y}), \psi_2(\boldsymbol{y})$ (в декартовых координатах) и $\varphi_0, \varphi_2, \boldsymbol{r}_1(\varphi), \boldsymbol{r}_2(\varphi)$ (в полярных координатах), необходимые для перехода от двойного интеграла к повторному. Примеры:

1. Пусть область $\boldsymbol{D} = \{\boldsymbol{x} \le 0, \boldsymbol{y} \le 0, \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 \le 4\} \cup \{\boldsymbol{x} \ge 0, \boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 \le -2\boldsymbol{y}\}$. Представить двойной интеграл по области $\boldsymbol{D}$ в виде повторных. Перейти к полярным координатам.



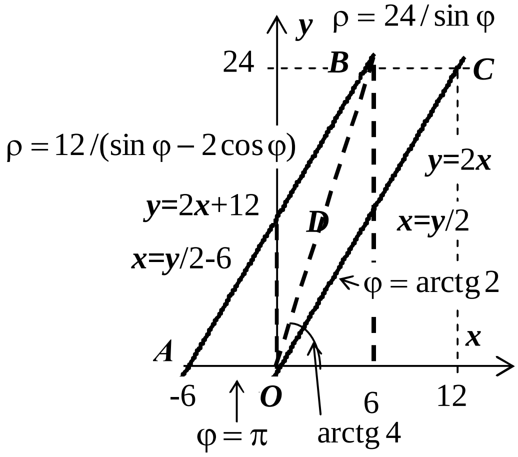
Решение: область изображена на рисунке справа. Для левой части $\boldsymbol{D}$ $-2 \le \boldsymbol{x} \le 0, -\sqrt{4 - \boldsymbol{x}^2} \le \boldsymbol{y} \le 0$; для правой - $0 \le \boldsymbol{x} \le 1, -1 - \sqrt{1 - \boldsymbol{x}^2} \le \boldsymbol{y} \le -1 + \sqrt{1 - \boldsymbol{x}^2}$ (уравнение правой полуокружности после выделения полных квадратов принимает вид $\boldsymbol{x}^2 + (\boldsymbol{y} + 1)^2 = 1$), поэтому

$\boldsymbol{I} = \iint\limits_{D} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \boldsymbol{dxdy} = \int\limits_{-2}^{0} \boldsymbol{dx} \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \boldsymbol{dy} + \int\limits_{0}^{1} \boldsymbol{dx} \int\limits_{-1-\sqrt{1-x^2}}^{-1+\sqrt{1-x^2}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \boldsymbol{dy}$. $\boldsymbol{D}$ можно также описать неравенствами $-2 \le \boldsymbol{y} \le 0, -\sqrt{4 - \boldsymbol{y}^2} \le \boldsymbol{x} \le \sqrt{-2\boldsymbol{y} - \boldsymbol{y}^2}$, поэтому $\boldsymbol{I} = \iint\limits_{D} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \boldsymbol{dxdy} = \int\limits_{-2}^{0} \boldsymbol{dy} \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{-2y-y^2}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \boldsymbol{dx}$. В полярных координатах уравнение левой четверти окружности имеет вид $\boldsymbol{r} = 2$ для $\pi \le \varphi \le 3\pi/2$ (можно взять и отрезок $-\pi \le \varphi \le -\pi/2$), правой полуокружности $\boldsymbol{r} = -2\sin\varphi$ для $3\pi/2 \le \varphi \le 2\pi$ (можно взять и отрезок $-\pi/2 \le \varphi \le 0$), поэтому

$$\boldsymbol{I} = \iint\limits_{D} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \boldsymbol{dxdy} = \iint\limits_{D_{r,\varphi}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}\cos\varphi, \boldsymbol{r}\sin\varphi) \boldsymbol{rdrd}\varphi = \int\limits_{\pi}^{3\pi/2} \boldsymbol{d}\varphi \int\limits_{0}^{2} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}\cos\varphi, \boldsymbol{r}\sin\varphi) \boldsymbol{rdr} +$$

$$+ \int\limits_{3\pi/2}^{2\pi} \boldsymbol{d}\varphi \int\limits_{0}^{-2\sin\varphi} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}\cos\varphi, \boldsymbol{r}\sin\varphi) \boldsymbol{rdr}.$$

2. $\boldsymbol{I}=\int\limits_{-6}^{0}\boldsymbol{dx}\int\limits_{0}^{2x+12}\boldsymbol{f}(x,y)\boldsymbol{dy}+\int\limits_{0}^{6}\boldsymbol{dx}\int\limits_{2x}^{2x+12}\boldsymbol{f}(x,y)\boldsymbol{dy}+\int\limits_{6}^{12}\boldsymbol{dx}\int\limits_{2x}^{24}\boldsymbol{f}(x,y)\boldsymbol{dy}$. Изменить порядок интегрирования, перейти к полярным координатам.



Решение. Область $\boldsymbol{D}$ - объединение трёх подобластей: $\boldsymbol{D}=\{-6\le x\le 0,\ 0\le y\le 2x+12\}\cup\{0\le x\le 6,\ 2x\le y\le 2x+12\}\cup$ $\cup\{6\le x\le 12,\ 2x\le y\le 24\}$. На рисунке изображена область и приведены уравнения прямых и обратных функций для линий, ограничивающих её. $\boldsymbol{D}$ можно представить в виде $\boldsymbol{D}=\{0\le y\le 24,\ y/2-6\le x\le y/2\}$, поэтому

$\boldsymbol{I}=\int\limits_{0}^{24}\boldsymbol{dy}\int\limits_{y/2-6}^{y/2}\boldsymbol{f}(x,y)\boldsymbol{dx}$. В полярных координатах $\boldsymbol{D}$ представляется как объединение двух треугольников $\boldsymbol{OCB}$ и $\boldsymbol{OBA}$. Уравнение прямой $\boldsymbol{OC}$: $\varphi=\operatorname{arctg}2$ (можно получить и формально, перейдя к полярным координатам в её уравнении: $y=2x\Rightarrow\ r\sin\varphi=2r\cos\varphi\Rightarrow\operatorname{tg}\varphi=2$), прямой $\boldsymbol{OB}$: $\varphi=\operatorname{arctg}4$, прямой $\boldsymbol{CB}$: $y=24\Rightarrow r\sin\varphi=24\Rightarrow\ r=24/\sin\varphi$, прямой $\boldsymbol{OA}$: $\varphi=\pi$, прямой $\boldsymbol{AB}$:

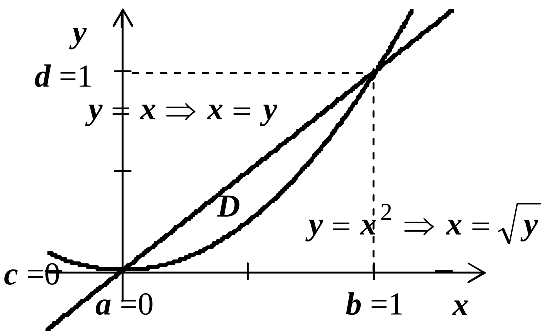
$y=2x+12\Rightarrow r\sin\varphi=2r\cos\varphi+12\Rightarrow\ r=\dfrac{12}{\sin\varphi-2\cos\varphi}$. В результате

$$\boldsymbol{I}=\iint\limits_{D}f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_{D_{r,\varphi}}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,rdrd\varphi=$$

$$=\int\limits_{\operatorname{arctg}2}^{\operatorname{arctg}4}d\varphi\int\limits_{0}^{24/\sin\varphi}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,rdr+\int\limits_{\operatorname{arctg}4}^{\pi}d\varphi\int\limits_{0}^{12/(\sin\varphi-2\cos\varphi)}f(r\cos\varphi,r\sin\varphi)\,rdr.$$

16.1.6.2. Вычисление двойного интеграла. Двойной интеграл вычисляется переходом к повторному. Рассмотрим ряд примеров.

1. $\boldsymbol{I}=\iint\limits_{D}(x+y)\,dxdy,\quad \boldsymbol{D}:\begin{cases}y=x,\\ y=x^2\end{cases}.$

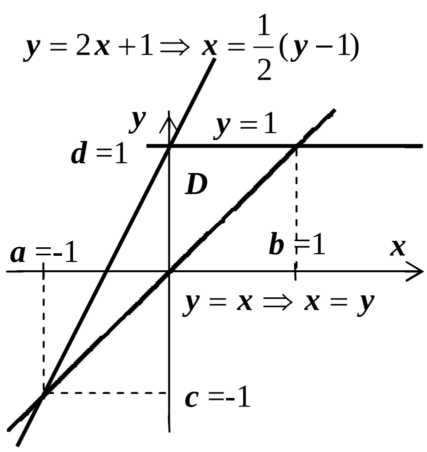


Здесь область $\boldsymbol{D}$ (которую обязательно надо изобразить на чертеже) правильна в направлении обеих осей, поэтому вычисления по обеим формулам перехода имеют одинаковую трудоёмкость:

$$\boldsymbol{I}=\iint\limits_{D}(x+y)\,dxdy=\int\limits_{0}^{1}dx\int\limits_{x^2}^{x}(x+y)\,dy=\int\limits_{0}^{1}dx\left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{x}=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}\left[\left(x\cdot x+\frac{x^2}{2}\right)-\left(x\cdot x^2+\frac{(x^2)^2}{2}\right)\right]dx=\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{3}{2}x^2-x^3-\frac{1}{2}x^4\right)dx=\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{10}x^5\right)\Bigg|_{0}^{1}=\frac{3}{20};$$

$$\boldsymbol{I}=\iint\limits_{D}(x+y)\,dxdy=\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{y}^{\sqrt{y}}(x+y)\,dx=\int\limits_{0}^{1}dy\left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\Bigg|_{y}^{\sqrt{y}}=$$



$$=\int\limits_{0}^{1}\left[\left(\frac{y}{2}+y\sqrt{y}\right)-\left(\frac{y^2}{2}+y^2\right)\right]dy=$$

$$=\int\limits_{0}^{1}\left(\frac{y}{2}+y^{3/2}-\frac{3}{2}y^2\right)dy=\left(\frac{1}{4}y^2+\frac{2}{5}y^{5/2}-\frac{1}{2}y^3\right)\Bigg|_{0}^{1}=\frac{3}{20}.$$

2. $\boldsymbol{I}=\iint\limits_{D}xy\,dxdy,\quad \boldsymbol{D}:\begin{cases}y=x,\ y=1,\\ y=2x+1\end{cases}.$

Здесь область $\boldsymbol{D}$ тоже правильна в направлении обеих осей, однако верхняя граница состоит из двух кусков: $\varphi_2(x)=\begin{cases}2x+1, & -1\le x\le 0;\\ 1, & 0<x\le 1;\end{cases}$, поэтому первый из повторных интегралов будет содержать два слагаемых:

$$I=\iint\limits_D xydxdy=\int_{-1}^{0}dx\int_{x}^{2x+1}xydy+\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{1}xydy=\int_{-1}^{0}dx\left(x\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x}^{2x+1}+$$

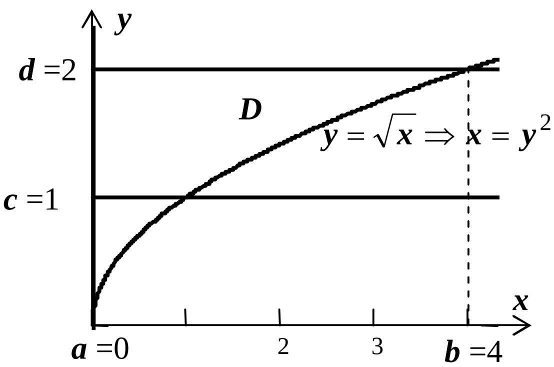
$$+\int_{0}^{1}dx\left(x\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x}^{1}=\int_{-1}^{0}\left(\frac{1}{2}x(2x+1)^2-\frac{1}{2}x^3\right)dx+\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}x^3\right)dx=$$

$$=\int_{-1}^{0}\left(\frac{3}{2}x^3+2x^2+\frac{1}{2}x\right)dx+\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{8}x^4\right)\Bigg|_{0}^{1}=\left(\frac{3}{8}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2\right)\Bigg|_{-1}^{0}+\frac{1}{8}=\frac{1}{8}-\left(\frac{3}{8}-\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{6};$$

$$I=\iint\limits_D xydxdy=\int_{-1}^{1}dy\int_{\frac{y-1}{2}}^{y}xydx=\int_{-1}^{1}dy\left(y\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{\frac{y-1}{2}}^{y}=\int_{-1}^{1}dy\left(\frac{y^3}{2}-\frac{y}{2}\cdot\left(\frac{y-1}{2}\right)^2\right)=\int_{-1}^{1}\left(\frac{y^3}{2}-\frac{y^3}{8}+\frac{y^2}{4}-\frac{y}{8}\right)dy=$$

$$=\left(\frac{3}{32}y^4+\frac{y^3}{12}-\frac{y^2}{16}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\left(\frac{3}{32}+\frac{1}{12}-\frac{1}{16}\right)-\left(\frac{3}{32}-\frac{1}{12}-\frac{1}{16}\right)=\frac{1}{6}.$$

Этот пример проще решается по второй формуле.



3. $I=\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy,\quad D:\begin{cases}x=0,\ y=\sqrt{x},\\ y=1,\ y=2.\end{cases}$.

Здесь переход к повторному интегралу по формуле

$I=\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy=\int_{0}^{1}dx\int_{1}^{2}e^{\frac{x}{y}}dy+\int_{1}^{4}dx\int_{\sqrt{x}}^{2}e^{\frac{x}{y}}dy$ бессмысленен, так как внутренний интеграл не берётся, в то же время второй повторный интеграл вычисляется без проблем:

$$I=\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy=\int_{1}^{2}dy\int_{0}^{y^2}e^{\frac{x}{y}}dx=\int_{1}^{2}dy\int_{0}^{y^2}ye^{\frac{x}{y}}d\left(\frac{x}{y}\right)=\int_{1}^{2}ye^{\frac{x}{y}}\Bigg|_{0}^{y^2}dy=\int_{1}^{2}y\left(e^{y}-1\right)dy=\int_{1}^{2}yde^{y}-\frac{1}{2}y^2\Bigg|_{1}^{2}=$$

$$=\left(ye^{y}-e^{y}\right)\Big|_{1}^{2}-3/2=e^2-3/2.$$

4. $I=\iint\limits_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy,\quad D:\left\{x^2+y^2=2ax.\right.$

Здесь область D ограничена окружностью радиуса a, сдвинутой на a единиц по оси Ox. Уравнения для правой, левой, верхней и нижней полуокружностей приведены на рисунке. Повторные интегралы в декартовых координатах

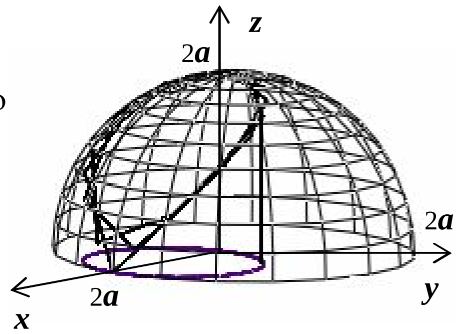
$I=\int_{0}^{2a}dx\int_{-\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dy$, $I=\int_{-a}^{a}dy\int_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a+\sqrt{a^2-y^2}}\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dx$ можно вычислить, но это достаточно трудоёмко. Попробуем перейти к полярным координатам (это имеет смысл, так как и подынтегральная функция, и кривая, ограничивающая D зависят от выражения $x^2+y^2=r^2$). Переход к полярным координатам в уравнении окружности даёт $r^2=2ar\cos\varphi$, или $r=2a\cos\varphi$. Это и есть уравнение границы в полярных координатах. Итак,

$$I = \iint\limits_{D} \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy = \iint\limits_{D_{r,\varphi}} \sqrt{4a^2 - r^2}\,rdrd\varphi = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2a\cos\varphi} \sqrt{4a^2 - r^2}\,rdr =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(4a^2 - r^2\right)^{3/2}\Big|_0^{2a\cos\varphi} d\varphi = -\frac{1}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} 8a^3\left[\left(1-\cos^2\varphi\right)^{3/2} - 1\right]d\varphi = \frac{8a^3}{3}\left[\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\sin^3\varphi\,d\varphi\right] =$$

$$= \frac{8}{3}a^3\left(\pi + \cos\varphi - \frac{\cos 3\varphi}{3}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{8}{3}\pi a^3.$$

Ответ явно неправильный. Мы должны получить объём тела, расположенного в полупространстве $z \ge 0$, ограниченного цилиндром $x^2 + y^2 = 2ax$ и сферой $z = \sqrt{4a^2 = x^2 - y^2}$ радиуса $2a$ сверху; в то время как получили половину объём верхнего полушара (рисунок справа). С такой ситуацией мы уже встречались, когда рассматривали приложения определённого интеграла. Ошибка делается, когда выражение $\sqrt{1-\cos^2\varphi}$ заменяется на $\sin\varphi$, а не на $|\sin\varphi|$. Дальше необходимо отдельно рассматривать интервалы $-\pi/2 \le \varphi \le 0$ и $0 \le \varphi \le \pi/2$. Избежать это можно, если воспользоваться симметрией и области, и подынтегральной функции относительно оси Ox, т.е. вычислять удвоенный интеграл по половине круга $y \ge 0$:



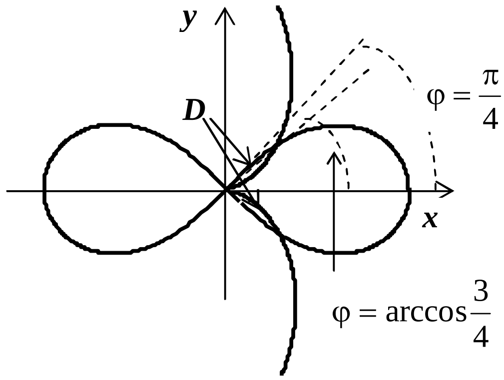
$$I = \iint\limits_{D} \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\,dxdy = \iint\limits_{D_{r,\varphi}} \sqrt{4a^2 - r^2}\,rdrd\varphi = 2\int\limits_{0}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2a\cos\varphi} \sqrt{4a^2 - r^2}\,rdr =$$

$$= -\frac{2}{3}\int\limits_{0}^{\pi/2}\left(4a^2 - r^2\right)^{3/2}\Big|_0^{2a\cos\varphi} d\varphi = \frac{16}{3}a^3\left[\frac{\pi}{2} + \cos\varphi - \frac{\cos 3\varphi}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{16}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right).$$

16.1.7. Приложения двойного интеграла.

16.1.7.1. Вычисление площадей плоских областей. В соответствии с свойством **16.1.3.3. Интеграл от единичной функции** $s(D) = \iint\limits_{D} dxdy$. Пример: найти площадь области , лежащей внутри кривых $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right),\ x^2 + y^2 = a\sqrt{2}\left(\sqrt{x^2 + y^2} - x\right)$.

Решение. Построить эти кривые можно только в полярных координатах; первое уравнение приводится к виду $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, это - лемниската Бернулли; второе - к виду $r = a\sqrt{2}(1 - \cos\varphi)$, это - кардиоида. Решая уравнение $a\sqrt{\cos 2\varphi} = a\sqrt{2}(1-\cos\varphi)$, находим, что точка их пересечения лежит на луче $\varphi = \arccos(3/4)$. D состоит из двух лунок одинаковой площади; вычислим площадь верхней. При $0 \le \varphi \le \arccos(3/4)$ эта лунка ограничена кардиоидой; при $\arccos(3/4) \le \varphi \le \pi/4$ - лемнискатой, поэтому



$$s(D) = \iint\limits_{D} dxdy = \iint\limits_{D_{r,\varphi}} rdrd\varphi = \int\limits_{0}^{\arccos(3/4)} d\varphi \int\limits_{0}^{a\sqrt{2}(1-\cos\varphi)} rdr + \int\limits_{\arccos(3/4)}^{\pi/4} d\varphi \int\limits_{0}^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} rdr =$$

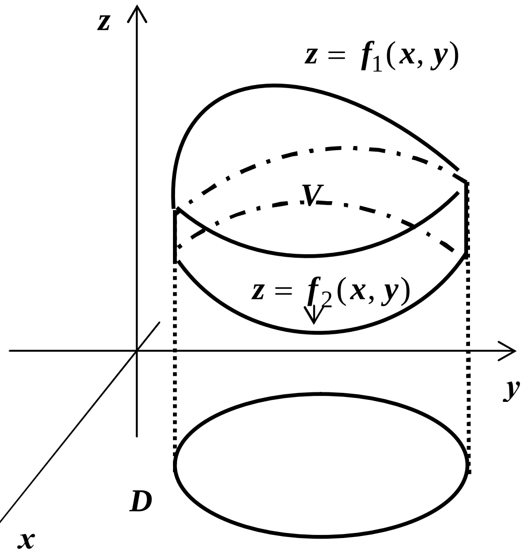
$$= \int\limits_{0}^{\arccos(3/4)} d\varphi\cdot\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{a\sqrt{2}(1-\cos\varphi)} + \int\limits_{\arccos(3/4)}^{\pi/4} d\varphi\cdot\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{a\sqrt{2\cos 2\varphi}} = a^2\int\limits_{0}^{\arccos(3/4)}(1-\cos\varphi)^2 d\varphi + a^2\int\limits_{\arccos(3/4)}^{\pi/4}\cos 2\varphi\,d\varphi =$$

$$= \boldsymbol{a}^2\left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\arccos(3/4)} + \frac{\boldsymbol{a}^2}{2}\sin 2\varphi\Big|_{\arccos(3/4)}^{\pi/4} =$$

$$= \boldsymbol{a}^2\left(\frac{3}{2}\arccos(3/4) - 2\sin\arccos(3/4) + \frac{\sin(2\arccos(3/4))}{4}\right) + \frac{\boldsymbol{a}^2}{2}\left(1 - \sin(2\arccos(3/4))\right) = \text{ё}$$

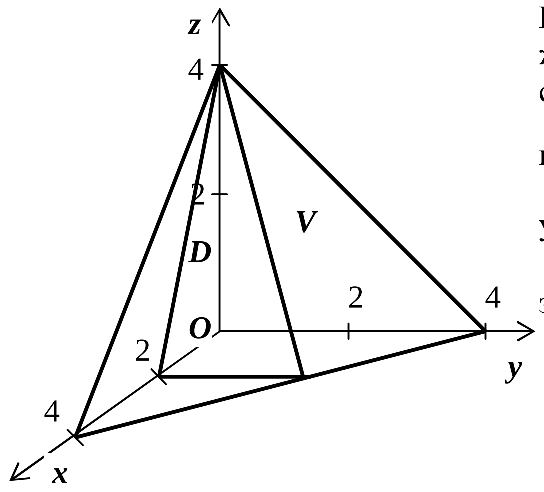
$$= \boldsymbol{a}^2\left(\frac{3}{2}\arccos(3/4) - 2\sqrt{1-(3/4)^2} + \frac{1}{4}\cdot 2\cdot\sqrt{1-(3/4)^2}\cdot\frac{3}{4}\right) + \frac{\boldsymbol{a}^2}{2}\left(1 - 2\cdot\sqrt{1-(3/4)^2}\cdot\frac{3}{4}\right) =$$

$$= \frac{\boldsymbol{a}^2}{2}\left(1 - \frac{19\sqrt{7}}{16}\right) + \frac{3}{2}\boldsymbol{a}^2\arccos(3/4).$$



16.1.7.2. Вычисление объёмов. Объём тела, ограниченного сверху и снизу поверхностями $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \boldsymbol{D}$, с боков - цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси $\boldsymbol{Oz}$, равен $\boldsymbol{v} = \iint\limits_{\boldsymbol{D}} [\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})]\boldsymbol{dxdy}$; эта формула очевидно следует из геометрического смысла двойного интеграла. Основной вопрос, который надо решить - на какую координатную плоскость проектировать тело, чтобы выкладки были наиболее простыми.

Примеры. 1. Найти объём тела $\boldsymbol{V}: \begin{cases} \boldsymbol{y} = 0, \boldsymbol{z} = 0, \\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = 4, \\ 2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = 4. \end{cases}$



Решение. Тело изображено на рисунке справа. Перебором возможностей убеждаемся, что проще всего описать это тело, если отправляться от его проекции на ось **Oxz**: $\boldsymbol{V}: \begin{cases} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \in \boldsymbol{D}, \\ 0 \le \boldsymbol{y} \le 4 - \boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}. \end{cases}$ Область $\boldsymbol{D}$ - треугольник, ограниченный прямыми $\boldsymbol{x} = 0, \boldsymbol{z} = 0, 2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = 4$, поэтому $\boldsymbol{V} = \iint\limits_{\boldsymbol{D}} (4 - \boldsymbol{x} - \boldsymbol{z})\boldsymbol{dxdz} = \int_0^2 \boldsymbol{dx} \int_0^{4-2\boldsymbol{x}} (4 - \boldsymbol{x} - \boldsymbol{z})\boldsymbol{dz} =$

$$= \int_0^2 \boldsymbol{dx}\left(4\boldsymbol{z} - \boldsymbol{xz} - \boldsymbol{z}^2/2\right)\Big|_0^{4-2\boldsymbol{x}} = \int_0^2 \left[16 - 8\boldsymbol{x} - 4\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{x}^2 - (4 - 2\boldsymbol{x})^2/2\right]\boldsymbol{dx} =$$

$$= \int_0^2 (8 - 4\boldsymbol{x})\boldsymbol{dx} = \left(8\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{x}^2\right)\Big|_0^2 = 16 - 8 = 8.$$

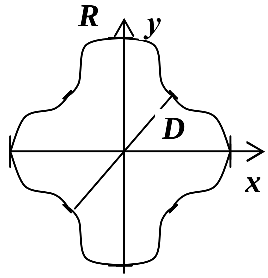
2. Найти объём области, ограниченной поверхностями $\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2 = \boldsymbol{R}^2$; $(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2)^3 = \boldsymbol{R}^2(\boldsymbol{x}^4 + \boldsymbol{y}^4)$.

Решение. Первая поверхность - сфера, вторая - цилиндрическая - с образующими, параллельными оси **Oz** (в уравнении нет **z** в явной форме). Построить в плоскости **Oxy** кривую шестого порядка, заданную уравнением $(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2)^3 = \boldsymbol{R}^2(\boldsymbol{x}^4 + \boldsymbol{y}^4)$, в декартовой системе координат невозможно, можно только сказать, что она симметрична относительно осей (чётные степени) и точка $\boldsymbol{O}(0,0)$ принадлежит этой кривой. Пробуем перейти к полярным координатам.

$$\boldsymbol{r}^6 = \boldsymbol{R}^2\boldsymbol{r}^4(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi); \boldsymbol{r}^2 = \boldsymbol{R}^2((\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)^2 - 2\cos^2\varphi\sin^2\varphi) = \boldsymbol{R}^2(1 - \frac{\sin^2 2\varphi}{2}) =$$

$= \boldsymbol{R}^2(1 - \frac{1-\cos 4\varphi}{4}) = \boldsymbol{R}^2\,\frac{3+\cos 4\varphi}{4}; \boldsymbol{r} = \boldsymbol{R}\frac{\sqrt{3+\cos 4\varphi}}{2}$. Эту кривую построить уже можно. $\boldsymbol{r}(\varphi)$

максимально, когда $\cos 4\varphi = 1$ $(\varphi = 0, \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{4} = \pi, \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2})$, минимально, когда



$\cos 4\varphi = -1$ $(\varphi = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4})$, и гладко меняется между этими пределами (точка $O(0,0)$ не принадлежит этой кривой, где мы её потеряли?).
Пользуясь симметрией, получаем

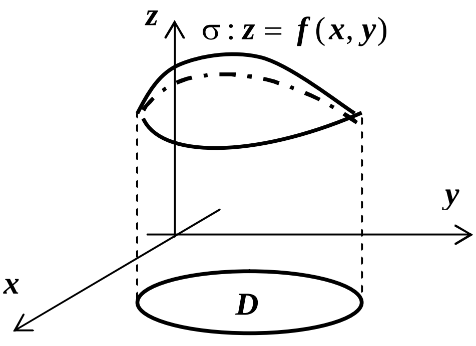
$$V = 16\iint_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy = 16\iint_D \sqrt{R^2 - r^2}\,rdrd\varphi =$$

$$= 16\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{R\frac{\sqrt{3+\cos 4\varphi}}{2}} \sqrt{R^2 - r^2}\,rdr =$$

$$= -8\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{R\frac{\sqrt{3+\cos 4\varphi}}{2}} \sqrt{R^2 - r^2}\,d(R^2 - r^2) = -8\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{R\frac{\sqrt{3+\cos 4\varphi}}{2}} d\varphi = -\frac{16}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\left(\frac{\sin^2 2\varphi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - 1\right] d\varphi =$$

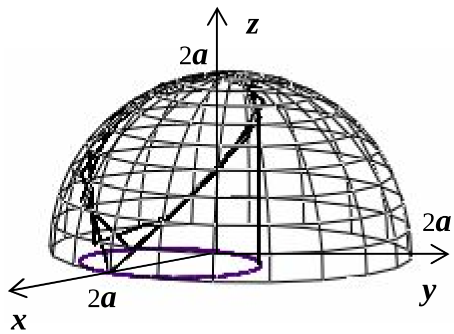
и т.д.

16.1.7.3. Вычисление площади поверхности. Пусть в пространстве задана кусочно-гладкая поверхность σ, однозначно проектирующаяся в область D на плоскости Oxy. Пусть эта поверхность задаётся уравнением $\sigma : z = f(x, y), (x, y) \in D$. Тогда площадь этой поверхности выражается формулой



$$s(\sigma) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dxdy.$$

Мы докажем эту формулу позже, когда будем изучать поверхностные интегралы. Сейчас рассмотрим пример: найти площадь лепестков, вырезаемых цилиндром $x^2 + y^2 = 2ax$ из сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$.



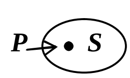
Решение. На рисунке изображён верхний из этих лепестков. Уравнение поверхности $z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$, вычисляем производные $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}}$, и

$s(\sigma) = \iint_D \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{4a^2 - x^2 - y^2}}\,dxdy = 2a\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}}$. Область D - сдвинутый на a единиц по оси Ox круг, поэтому вычисляем в полярных координатах, учитывая симметрию поверхности относительно плоскостей Oxy и Oxz:

$$s(\sigma) = 4\cdot 2a \iint_{D_{r,\varphi}} \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{4a^2 - r^2}} = 8a\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2a\cos\varphi} \left(4a^2 - r^2\right)^{-1/2} rdr = -8a\int_0^{\pi/2} d\varphi \left(4a^2 - r^2\right)^{1/2}\Big|_0^{2a\cos\varphi} =$$

$$= 8a\int_0^{\pi/2}\left[2a - 2a\sqrt{1 - \cos^2\varphi}\right]d\varphi = 16a^2\left(\varphi + \cos\varphi\right)\Big|_0^{\pi/2} = 16a^2\left(\pi/2 - 1\right).$$

16.1.7.4. Механические приложения двойного интеграла должны решит**.** Будем считать, что D - неоднородная плоская пластина с поверхностной плотностью материала в точке P равной $\mu(P)$. В механике $\mu(P)$ определяется так. Точка P окружается малой областью S, находится масса $m(S)$ и площадь этой области (площадь тоже будем обозначать буквой S), и



$\mu(P) = \lim\limits_{diam(S)\to 0} \frac{m(S)}{S}$. Для нахождения массы по заданной плотности мы ь обратную задачу. Разобьём $\boldsymbol{D}$ на малые подобласти $\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2, \boldsymbol{D}_3, \dots \boldsymbol{D}_n$, в каждой из подобластей $\boldsymbol{D}_i$ выберем произвольную точку $\boldsymbol{P}_i$, и, считая что в пределах $\boldsymbol{D}_i$ плотность постоянна и равна $\mu(\boldsymbol{P}_i)$, получим, что масса $\boldsymbol{D}_i$ приближённо есть $\mu(\boldsymbol{P}_i)\cdot \boldsymbol{s}(\boldsymbol{D}_i)$, а масса всей пластины $\sum\limits_{i=1}^{n}\mu(\boldsymbol{P}_i)\cdot \boldsymbol{s}(\boldsymbol{D}_i)$. Это - интегральная сумма, при уменьшении $\mathrm{d} = \max\limits_{i=1,2,\dots,n} \mathrm{diam}(\boldsymbol{D}_i)$ точность приближения увеличивается, и в пределе

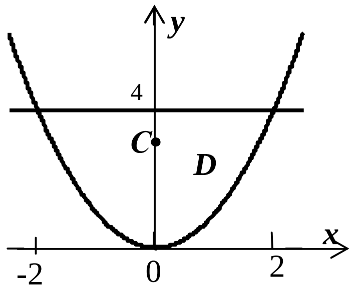
$$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{D}) = \lim_{\substack{d\to 0\\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n}\mu(\boldsymbol{P}_i)\cdot \Delta \boldsymbol{s}(\boldsymbol{D}_i) = \iint\limits_{D}\mu(\boldsymbol{P})\boldsymbol{ds}.$$

Аналогично находятся другие параметры пластины:

координаты центра тяжести $\boldsymbol{x_c} = \dfrac{1}{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{D})}\iint\limits_{D}\boldsymbol{x}\cdot\mu(\boldsymbol{P})\boldsymbol{ds}$, $\boldsymbol{y_c} = \dfrac{1}{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{D})}\iint\limits_{D}\boldsymbol{y}\cdot\mu(\boldsymbol{P})\boldsymbol{ds}$;

моменты инерции $\boldsymbol{I_x} = \iint\limits_{D}\boldsymbol{y}^2\cdot\mu(\boldsymbol{P})\boldsymbol{ds}$ (относительно оси $\boldsymbol{Ox}$), $\boldsymbol{I_y} = \iint\limits_{D}\boldsymbol{x}^2\cdot\mu(\boldsymbol{P})\boldsymbol{ds}$ (относительно оси $\boldsymbol{Oy}$), $\boldsymbol{I_O} = \iint\limits_{D}(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2)\cdot\mu(\boldsymbol{P})\boldsymbol{ds} = \boldsymbol{I_x}+\boldsymbol{I_y}$ (относительно начала координат).

Пример: найти параметры неоднородной плоской пластины, ограниченной кривыми $\boldsymbol{D}:\begin{cases}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}^2,\\ \boldsymbol{y}=4;\end{cases}$ если плотность $\mu(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}+1$.



Решение.

$$\boldsymbol{m}(\boldsymbol{D}) = \iint\limits_{D}(\boldsymbol{y}+1)\boldsymbol{dxdy} = 2\int_0^2 \boldsymbol{dx}\int_{x^2}^{4}(\boldsymbol{y}+1)\boldsymbol{dy} = 2\int_0^2\left(\boldsymbol{y}^2/2+\boldsymbol{y}\right)\Big|_{x^2}^{4}\boldsymbol{dx} =$$

$$= 2\int_0^2\left(12-\boldsymbol{x}^4/2-\boldsymbol{x}^2\right)\boldsymbol{dx} = 2\left(12\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^5/10-\boldsymbol{x}^3/3\right)\Big|_0^2 = 2\left(24-\frac{16}{5}-\frac{8}{3}\right) = \frac{544}{15}.$$

$$\boldsymbol{x_c} = \frac{1}{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{D})}\iint\limits_{D}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}+1)\boldsymbol{dxdy} = \frac{15}{544}\int_{-2}^{2}\boldsymbol{dx}\int_{x^2}^{4}\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}+1)\boldsymbol{dy} = \frac{15}{544}\int_{-2}^{2}\boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{y}^2/2+\boldsymbol{y}\right)\Big|_{x^2}^{4}\boldsymbol{dx} =$$

$$= \frac{15}{544}\int_{-2}^{2}\left(12\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^5/2-\boldsymbol{x}^3\right)\boldsymbol{dx} = \frac{1}{544}\left(6\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{x}^6/10-\boldsymbol{x}^4/4\right)\Big|_{-2}^{2} = 0$$ (что и следовало ожидать, так как область и плотность симметричны относительно оси $\boldsymbol{Oy}$).

$$\boldsymbol{y_c} = \frac{1}{\boldsymbol{m}(\boldsymbol{D})}\iint\limits_{D}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{y}+1)\boldsymbol{dxdy} = \frac{15}{544}\int_{-2}^{2}\boldsymbol{dx}\int_{x^2}^{4}\boldsymbol{y}(\boldsymbol{y}+1)\boldsymbol{dy} = \frac{15}{272}\int_0^2\left(\boldsymbol{y}^3/3+\boldsymbol{y}^2/2\right)\Big|_{x^2}^{4}\boldsymbol{dx} =$$

$$= \frac{15}{272}\int_0^2\left(64/3+8-\boldsymbol{x}^6/3-\boldsymbol{x}^4/2\right)\boldsymbol{dx} = \frac{15}{272}\left(88\boldsymbol{x}/3-\boldsymbol{x}^7/21-\boldsymbol{x}^5/10\right)\Big|_0^2 = \frac{15}{272}\left(\frac{176}{3}-\frac{128}{21}-\frac{16}{5}\right) = \frac{15}{272}\cdot\frac{1728}{35} \approx 2{,}72.$$

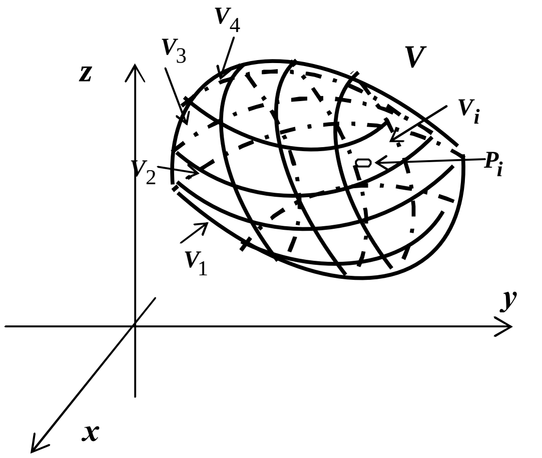
$$\boldsymbol{I_x} = \iint\limits_{D}\boldsymbol{y}^2(\boldsymbol{y}+1)\boldsymbol{dxdy} = 2\int_0^2\boldsymbol{dx}\int_{x^2}^{4}\boldsymbol{y}^2(\boldsymbol{y}+1)\boldsymbol{dy} = 2\int_0^2\left(\boldsymbol{y}^4/4+\boldsymbol{y}^3/3\right)\Big|_{x^2}^{4}\boldsymbol{dx} = 2\int_0^2\left(\frac{256}{3}-\frac{\boldsymbol{x}^8}{4}-\frac{\boldsymbol{x}^6}{3}\right)\boldsymbol{dx} =$$

$$= 2\left(\frac{256}{3}\boldsymbol{x}-\frac{\boldsymbol{x}^9}{36}-\frac{\boldsymbol{x}^7}{21}\right)\Bigg|_0^2 \approx 300{,}7.$$

$$\boldsymbol{I_y} = \iint\limits_{D}\boldsymbol{x}^2(\boldsymbol{y}+1)\boldsymbol{dxdy} = 2\int_0^2\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{dx}\int_{x^2}^{4}(\boldsymbol{y}+1)\boldsymbol{dy} = 2\int_0^2\boldsymbol{x}^2\left(\boldsymbol{y}^2/2+\boldsymbol{y}\right)\Big|_{x^2}^{4}\boldsymbol{dx} = 2\int_0^2\boldsymbol{x}^2\left(12-\frac{\boldsymbol{x}^4}{2}-\boldsymbol{x}^2\right)\boldsymbol{dx} =$$

$$= 2\left(4\boldsymbol{x}^3-\frac{\boldsymbol{x}^7}{14}-\frac{\boldsymbol{x}^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 \approx 32{,}9. \qquad \boldsymbol{I_O} = \iint\limits_{D}\left(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2\right)(\boldsymbol{y}+1)\boldsymbol{dxdy} = \boldsymbol{I_x}+\boldsymbol{I_y} \approx 333{,}6.$$

16.2. Тройной интеграл.



16.2.1. Определение тройного интеграла. Теорема существования тройного интеграла. Пусть в пространстве $Oxyz$ задана ограниченная замкнутая область (объём) V, и пусть на области V определена функция $f(x,y,z)$.

Разобьём область V произвольным образом на n подобластей $V_1, V_2, V_3, \ldots V_n$ (не имеющих общих внутренних точек). Символом $v(V_i)$ будем обозначать объём области V_i; символом d обозначим наибольший из диаметров областей V_i: $\mathrm{d} = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \mathrm{diam}(V_i)$.

В каждой из подобластей V_i $(i = 1,2,\ldots,n)$ выберем произвольную точку $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, вычислим в этой точке значение функции $f(P_i) = f(x_i, y_i, z_i)$, и составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i) \cdot v(V_i)$.

Если существует предел последовательности интегральных сумм при $\mathrm{d} = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \mathrm{diam}(V_i) \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения области V на подобласти V_i, ни от выбора точек P_i, то функция $f(x,y,z)$ называется интегрируемой по области V, а значение этого предела называется тройным интегралом от функции $f(x,y,z)$ по области V и обозначается $\iiint\limits_V f(P)dv$.

Если расписать значение $f(P)$ через координаты точки P, и представить dv как $dv = dx \cdot dy \cdot dz$, получим другое обозначение тройного интеграла: $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$. Итак, кратко,

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V f(P)dv = \lim_{\substack{d\to 0\\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \cdot v(V_i).$$

Теорема существования тройного интеграла. Если подынтегральная функция $f(x,y,z)$ непрерывна на области V, то она интегрируема по этой области.

16.2.2. Свойства тройного интеграла по смыслу и доказательству полностью аналогичны свойствам определённого и двойного интегралов.

16.2.2.1. Линейность. Если функции $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ интегрируемы по области V, то их линейная комбинация $\alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z)$ тоже интегрируема по D, и $\iiint\limits_V [\alpha f(P) + \beta g(P)]dv$

$$= \alpha \iiint\limits_V f(P)dv + \beta \iiint\limits_V g(P)dv.$$

16.2.2.2. Аддитивность. Если область V является объединением двух областей V_1 и V_2, не имеющих общих внутренних точек, то $\iiint\limits_V f(P)dv = \iiint\limits_{V_1} f(P)dv + \iiint\limits_{V_2} f(P)dv$.

16.2.2.3. Интеграл от единичной функции по области V равен объёму этой области: $\iiint\limits_V dv = v(V)$.

16.2.2.4 Интегрирование неравенств. Если в любой точке $P \in V$ выполняется неравенство $f(P) \le g(P)$, и функции $f(P)$, $g(P)$ интегрируемы по области V, то $\iiint\limits_V f(P)dv \le \iiint\limits_V g(P)dv$.

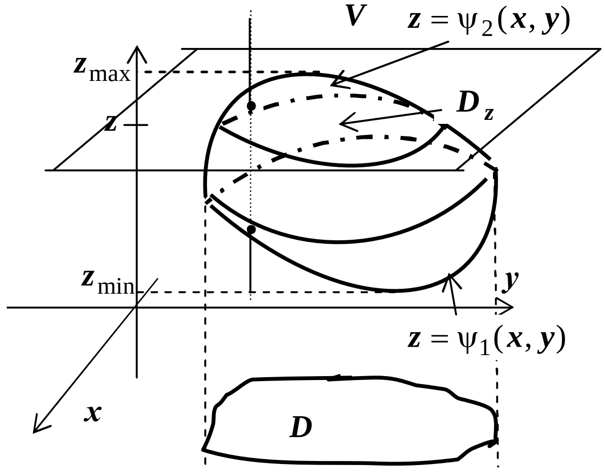
16.2.2.3. Теоремы об оценке интеграла.

16.2.2.4.1. Если функция $f(P)$ интегрируема по области V, и для $\forall P \in V$ выполняется

$m \le f(P) \le M$, то $m \cdot v(V) \le \iiint\limits_V f(P)dv \le M \cdot v(V)$.

16.2.2.4.2. Если функция $f(P)$ интегрируема по области V, то $\left|\iiint\limits_V f(P)dv\right| \le \iiint\limits_V |f(P)|\,dv$.

16.2.2.5. Теорема о среднем. Если функция $f(P)$ непрерывна на области V, то существует точка $P_0 \in V$, такая что $\iiint\limits_V f(P)dv = f(P_0)\cdot v(V)$.



16.2.3. Вычисление тройного интеграла. Теорема о переходе от тройного интеграла к повторному. Будем называть ограниченную замкнутую область V **простой (правильной)**, если выполняются два условия : проекция V на какую-либо координатную плоскость, например, на плоскость Oxy - простая область D, и любая прямая, перпендикулярная этой плоскости и проходящая через внутреннюю точку V, пересекает границу V в двух точках. Такую область можно описать следующим образом:
$V = \{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D,\ \psi_1(x,y) \le z \le \psi_2(x,y)\}$ (поверхность $z = \psi_1(x,y)$ образована множеством нижних точек пересечения прямой, параллельной оси Oz, с границей V; поверхность $z = \psi_2(x,y)$ - множеством верхних точек пересечения).

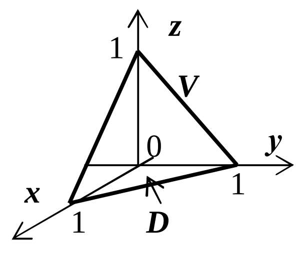
Теорема. Если V - простая область с кусочно-гладкой границей, $f(x,y,z)$ - непрерывная функция, то $\iiint\limits_V f(P)dv = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz$.

Доказать эту теорему можно так, как мы доказали теорему о переходе от двойного интеграла к повторному: установить, что для повторного интеграла в правой части формулы имеют место все свойства интеграла, разбить область V на подобласти V_i $(i = 1,2,\dots,n)$, пользуясь свойствами аддитивности и теоремой о среднем, представить повторный интеграл как интегральную сумму для тройного $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} f(P_i)v(V_i)\right)$ и перейти к пределу при $\mathrm{d} = \max\limits_{i=1,2,\dots,n} \mathrm{diam}(V_i) \to 0$.

Если расписать двойной интеграл по простой области D $\left(D = \left\{(x,y)\middle|\begin{array}{l} a \le x \le b, \\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\end{array}\right\}\right)$ в виде повторного, получим ещё более детализированную формулу для вычисления тройного интеграла:

$$\iiint\limits_V f(P)dv = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

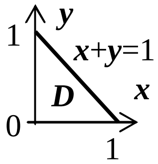
Можно также доказать, что тройной интеграл можно представить в виде повторного с другим порядком интегрирования. Обозначим $z_{\min} = \min\limits_{(x,y,z)\in V} z$, $z_{\max} = \max\limits_{(x,y,z)\in V} z$ (т.е. минимальное и максимальное значения ординаты для точек области V), D_z - плоскую область, получающуюся при сечении V плоскостью $z = \mathrm{const}$. Тогда $\iiint\limits_V f(P)dv = \int\limits_{z_{\min}}^{z_{\max}} dz \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy$. Естественно, для конкретной задачи может оказаться предпочтительней проектировать V не на плоскость Oxy, а на другую координатную плоскость.



16.2.4. Примеры. 1. $I = \iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}$, $V: \begin{cases} x=0,\ y=0,\ z=0, \\ x+y+z=1. \end{cases}$

Проекция области V на плоскость Oxy - треугольник $D: \{x=0,\ y=0,\ x+y=1\}$, поэтому

$$I=\iiint\limits_V\frac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}=\iint\limits_D dxdy\int\limits_0^{1-x-y}\frac{dz}{(1+x+y+z)^3}=\iint\limits_D\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(1+x+y+z)^2}\right]_0^{1-x-y}dxdy=$$

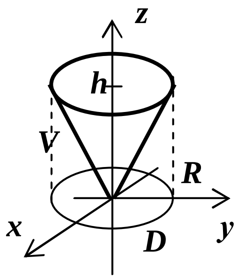


$$=-\frac{1}{2}\iint\limits_D\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{(1+x+y)^2}\right]dxdy=-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{(1+x+y)^2}\right]dy=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{(1+x+y)^2}\right]dy=-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left[\frac{y}{4}+\frac{1}{1+x+y}\right]_0^{1-x}dx=-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left[\frac{1-x}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x}\right]dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left[\frac{1-x}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{1+x}\right]dx=-\frac{1}{2}\left(\frac{3x}{4}-\frac{x^2}{8}-\ln(1+x)\right)_0^1=-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{8}-\ln 2\right)=\frac{1}{2}\left(\ln 2-\frac{5}{8}\right).$$

2. $I=\iiint\limits_V z\cdot dxdydz, V:\begin{cases}z^2=\dfrac{h^2}{R^2}\left(x^2+y^2\right),\\ z=h.\end{cases}$ Здесь V - внутренность конуса,



D - проекция круга, получающегося при сечении этого конуса плоскостью $z=h$ на Oxy, т.е. круг, ограниченный кривой $h^2=\dfrac{h^2}{R^2}\left(x^2+y^2\right)\Rightarrow x^2+y^2=R^2$, поэтому $I=\iint\limits_D dxdy\int\limits_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h}zdz=\iint\limits_D\left.\dfrac{z^2}{2}\right|_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h}dxdy=\dfrac{1}{2}\iint\limits_D\left[h^2-\dfrac{h^2}{R^2}\left(x^2+y^2\right)\right]dxdy=$

$$=\frac{h^2}{2R^2}\iint\limits_D\left[R^2-\left(x^2+y^2\right)\right]dxdy=\text{ (переходим к полярным координатам) }=\frac{h^2}{2R^2}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\left[R^2-r^2\right]rdr=$$

$$=\frac{h^2}{2R^2}\int\limits_0^{2\pi}\left[R^2\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^R d\varphi=\frac{h^2}{2R^2}2\pi\frac{R^4}{4}=\frac{\pi h^2R^2}{4}.$$

Вычислим тот же интеграл по другой формуле перехода к повторному интегралу: $I=\int\limits_0^h dz\iint\limits_{D_z}zdxdy=\int\limits_0^h zdz\iint\limits_{D_z}zdxdy=\int\limits_0^h zdz\iint\limits_{D_z}dxdy=\int\limits_0^h zdz\cdot s(D_z)=$ (внутренний двойной интеграл - интеграл от функции, равной 1, поэтому он равен площади круга, получающегося при сечении конуса плоскостью $z=\text{const}$, уравнение ограничивающей окружности $x^2+y^2=\dfrac{z^2R^2}{h^2}$, площадь $s(D_z)=\dfrac{\pi z^2R^2}{h^2}$) $=\int\limits_0^h z\dfrac{\pi z^2R^2}{h^2}dz=\dfrac{\pi R^2}{h^2}\cdot\left.\dfrac{z^4}{4}\right|_0^h=\dfrac{\pi h^2R^2}{4}$. Это решение оказалось проще; мы сыграли на том, что подынтегральная функция не зависит от x и y.

16.2.5. Замена переменных в тройном интеграле.

16.2.5.1. Теорема о за мена переменных в тройном интеграле. Пусть в пространстве $Ouvw$ задана область G, и пусть отображение $F(M)=M^*$ преобразует эту область в область V пространства $Oxyz$. Будем считать, что отображение F задаётся функциями $F:\begin{cases}x=x(u,v,w)\\ y=y(u,v,w)\\ z=z(u,v,w)\end{cases}$. Пусть: 1). F взаимно однозначно отображает G на V; 2). Функции $x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)$ непрерывно дифференцируемы на G (имеют непрерывные частные производные); 3). Якобиан

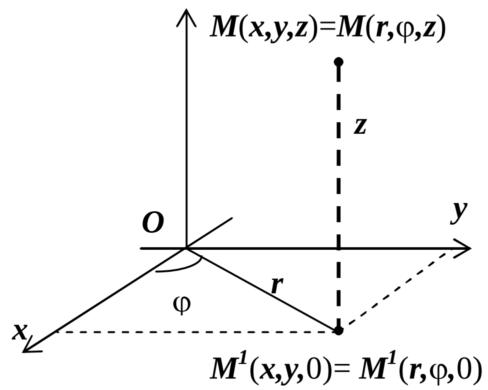
$$J(u,v,w)=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u}\\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$$ не обращается в нуль на G. Тогда

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_G f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\cdot\left|J(u,v,w)\right|\cdot dudvdw\,.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы о замене переменных в двойном интеграле.

Рассмотрим наиболее часто употребляемые криволинейные системы координат в пространстве - цилиндрические и сферические.

16.2.5.2. Тройной интеграл в цилиндрических координатах. В этой координатной системе положение точки в пространстве характеризуется тремя числами: r, φ и z, где r и φ - полярные координаты проекции M^1 точки M на плоскость Oxy, z - аппликата точки M. Формулы перехода от цилиндрических координат к декартовым:



$$x=r\cos\varphi,$$

$$y=r\sin\varphi,$$

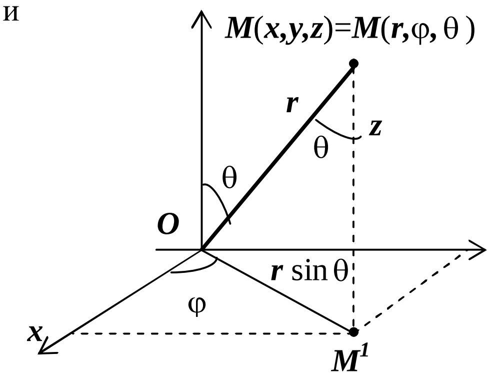
$$z=z.$$

Вычислим якобиан этого преобразования:

$$J(r,\varphi,z)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r}\\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=r\text{, следовательно,}$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_V f(r\cos\varphi,r\sin\varphi,z)\cdot r\cdot drd\varphi dz\,.$$

16.2.5.3. Тройной интеграл в сферических координатах. В этих координатах положение точки M в пространстве характеризуется тремя числами: r, φ и θ, где r - длина радиуса-вектора точки M, φ - полярный угол проекции M^1 точки M на плоскость Oxy, θ - угол между радиусом-вектором точки M и осью Oz. Формулы перехода от сферических координат к декартовым:



$$x=r\sin\theta\cos\varphi,$$

$$y=r\sin\theta\sin\varphi,$$

$$z=r\cos\theta.$$

Вычислим якобиан этого преобразования:

$$J(r,\varphi,z)=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r}\\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta}\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ -r\sin\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi & 0\\ r\cos\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\end{vmatrix}=r^2\sin\theta\begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ \cos\theta\cos\varphi & \cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\end{vmatrix}=$$

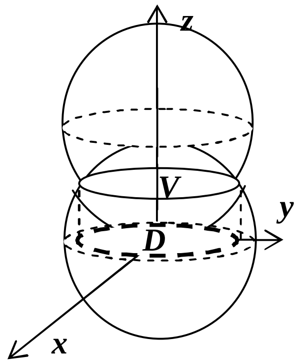
$$=r^2\sin\theta\left[\cos\theta(-\cos\theta\sin^2\varphi-\cos\theta\cos^2\varphi)-\sin\theta(\sin\theta\cos^2\varphi+\sin\theta\sin^2\varphi)\right]=-r^2\sin\theta\text{, следовательно,}$$

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{V_{r,\varphi,\theta}} f(r\sin\theta\cos\varphi,r\sin\theta\sin\varphi,r\cos\theta)\cdot r^2\sin\theta\cdot drd\varphi d\theta\,.$$

16.2.5.4. Примеры применения цилиндрических и сферических координат. Как и в случае перехода к полярным координатам в двойном интеграле, дать однозначный рецепт того, когда следует применять цилиндрические или сферические координаты, нельзя, это дело опыта. Можно попробовать применить цилиндрические координаты, если подынтегральная функция и/или уравнения поверхностей, ограничивающих объём ***V***, зависят от комбинации $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2=\boldsymbol{r}^2$; сферические - если эти уравнения зависят от $\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{z}^2=\boldsymbol{r}^2$. Рассмотрим ряд примеров.

1. Найти объём ***V*** общей части двух шаров, ограниченных сферами $\begin{cases}\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{z}^2=\boldsymbol{R}^2,\\ \boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{z}^2=2\boldsymbol{Rz}\end{cases}$.

Решение. Пересечение сфер находится на уровне $2\boldsymbol{Rz}=\boldsymbol{R}^2\Rightarrow\boldsymbol{z}=\boldsymbol{R}/2$ и представляет собой круг радиуса $\boldsymbol{R}\frac{\sqrt{3}}{2}$. Объём ***V*** ограничен сверху поверхностью $\boldsymbol{z}=\sqrt{\boldsymbol{R}^2-\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2}$, снизу - поверхностью $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{R}-\sqrt{\boldsymbol{R}^2-\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2}$. Вычисления в декартовых координатах дают



$$\boldsymbol{V}=\iiint\limits_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{dv}=\iiint\limits_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{dxdydz}=\int\limits_{-\boldsymbol{R}\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\boldsymbol{R}\frac{\sqrt{3}}{2}}\boldsymbol{dx}\int\limits_{-\sqrt{\frac{3}{4}\boldsymbol{R}^2-\boldsymbol{x}^2}}^{\sqrt{\frac{3}{4}\boldsymbol{R}^2-\boldsymbol{x}^2}}\boldsymbol{dy}\int\limits_{\boldsymbol{R}-\sqrt{\boldsymbol{R}^2-\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2}}^{\sqrt{\boldsymbol{R}^2-\boldsymbol{x}^2-\boldsymbol{y}^2}}\boldsymbol{dz}$$ - достаточно

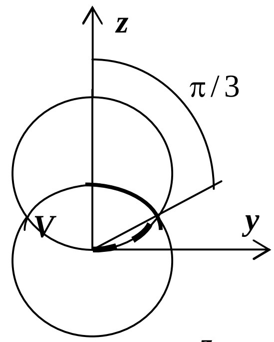
громоздкие выкладки. В цилиндрических координатах объём ***V*** ограничен сверху поверхностью $\boldsymbol{z}=\sqrt{\boldsymbol{R}^2-\boldsymbol{r}^2}$, снизу - поверхностью $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{R}-\sqrt{\boldsymbol{R}^2-\boldsymbol{r}^2}$, поэтому

$$\boldsymbol{V}=\iiint\limits_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{dv}=\iiint\limits_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{rdrd}\varphi\boldsymbol{dz}=\int\limits_0^{2\pi}\boldsymbol{d}\varphi\int\limits_0^{\boldsymbol{R}\frac{\sqrt{3}}{2}}\boldsymbol{rdr}\int\limits_{\boldsymbol{R}-\sqrt{\boldsymbol{R}^2-\boldsymbol{r}^2}}^{\sqrt{\boldsymbol{R}^2-\boldsymbol{r}^2}}\boldsymbol{dz}=2\pi\int\limits_0^{\boldsymbol{R}\frac{\sqrt{3}}{2}}\left[2\sqrt{\boldsymbol{R}^2-\boldsymbol{r}^2}-\boldsymbol{R}\right]\boldsymbol{rdr}=$$

$$=2\pi\left[-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\boldsymbol{R}^2-\boldsymbol{r}^2\right)^3}-\boldsymbol{R}\frac{\boldsymbol{r}^2}{2}\right]\Bigg|_0^{\boldsymbol{R}\frac{\sqrt{3}}{2}}=2\pi\left[\frac{2}{3}\boldsymbol{R}^3-\frac{2}{3}\sqrt{\left(\boldsymbol{R}^2/4\right)^3}-\frac{3\boldsymbol{R}^3}{8}\right]=2\pi\boldsymbol{R}^3\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{24}-\frac{3}{8}\right)=\frac{5}{12}\pi\boldsymbol{R}^3.$$

В сферических координатах уравнение нижней сферы принимает вид $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{R}$, верхней - $\boldsymbol{r}^2=2\boldsymbol{Rr}\cos\theta\Rightarrow\boldsymbol{r}=2\boldsymbol{R}\cos\theta$, их пересечение соответствует значению $\cos\theta=1/2\Rightarrow\theta=\pi/3$. В интервале $0\le\theta\le\pi/3$ ***r*** меняется от 0 до ***R***, в интервале $\pi/3\le\theta\le\pi/2$ ***r*** меняется от 0 до $2\boldsymbol{R}\cos\theta$, поэтому

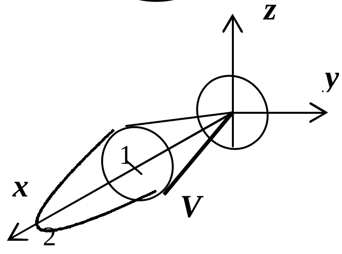
$$\boldsymbol{V}=\iiint\limits_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{dv}=\iiint\limits_{\boldsymbol{V}}\boldsymbol{r}^2\sin\theta\boldsymbol{drd}\varphi\boldsymbol{d}\theta=\int\limits_0^{2\pi}\boldsymbol{d}\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta\boldsymbol{d}\theta\int\limits_0^{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{dr}+\int\limits_0^{2\pi}\boldsymbol{d}\varphi\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\boldsymbol{d}\theta\int\limits_0^{2\boldsymbol{R}\cos\theta}\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{dr}=$$



$$=2\pi\frac{\boldsymbol{R}^3}{3}\left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}+2\pi\frac{8\boldsymbol{R}^3}{3}\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\sin\theta\boldsymbol{d}\theta=\frac{\pi\boldsymbol{R}^3}{3}-\frac{16\pi\boldsymbol{R}^3}{3}\cdot\frac{\cos^4\theta}{4}\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{\pi\boldsymbol{R}^3}{3}+\frac{\pi\boldsymbol{R}^3}{3\cdot4}=\frac{5\pi\boldsymbol{R}^3}{12}.$$

В этом примере трудоёмкость вычислений в цилиндрических и сферических координатах примерно одинакова.



2. $\boldsymbol{I}=\iiint\limits_{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})\boldsymbol{dxdydz};\quad\boldsymbol{V}:\begin{cases}\boldsymbol{x}=2-\boldsymbol{y}^2-\boldsymbol{z}^2,\\ \boldsymbol{x}^2=\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{z}^2,\ \boldsymbol{x}\ge0.\end{cases}$

Параболоид и конус пересекаются в плоскости $x = 2 - x^2 \Rightarrow x = 1$ по кругу радиуса 1. Осью симметрии объёма V служит ось Ox, поэтому цилиндрические координаты вводим формулами
$x = x, \quad y = r\cos\varphi, \quad z = r\sin\varphi;$

$$I = \iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz = \iiint\limits_V (x + r\cos\varphi + r\sin\varphi) r dx dr d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r dr \int\limits_r^{2-r^2} (x + r\cos\varphi + r\sin\varphi)dx =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \frac{x^2}{2}\Bigg|_r^{2-r^2} r dr + \int\limits_0^{2\pi} (\cos\varphi + \sin\varphi)d\varphi \int\limits_0^1 x\Big|_r^{2-r^2} r^2 dr = \pi\int\limits_0^1 \left(4 - 5r^2 + r^4\right)dr = \frac{38\pi}{15}.$$

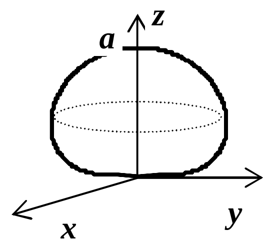
Применение сферических координат в этом примере нецелесообразно (громоздкое уравнение для параболоида).

3. $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz; \quad V: \{x^2+y^2+z^2 = z.$ Здесь область интегрирования - шар радиуса 1/2, сдвинутый по оси Oz на 1/2 единицы, подынтегральная функция зависит от выражения $x^2+y^2+z^2$, поэтому применим сферические координаты. Уравнение сферы
$x^2+y^2+z^2 = z \Rightarrow r^2 = r\cos\theta \Rightarrow r = \cos\theta (\Rightarrow 0 \le \theta \le \pi/2)$, поэтому

$$I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz = \iiint\limits_V r\cdot r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{\cos\theta} r^3 dr = \frac{2\pi}{4}\int\limits_0^{\pi/2} r^4\Big|_0^{\cos\theta} \sin\theta d\theta =$$

$$= \frac{2\pi}{4}\int\limits_0^{\pi/2} \cos^4\theta \sin\theta d\theta = -\frac{2\pi}{4\cdot 5}\cos^5\theta\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{10}.$$

4. Вычислить объём тела, ограниченного поверхностью
$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = a^3 z,\ a = \text{const} > 0.$



Здесь тоже для того, чтобы понять, как устроено тело, и найти его объём, надо перейти к сферическим координатам (на это указывает комбинация $x^2+y^2+z^2 = r^2$). Уравнение поверхности
$\left(x^2+y^2+z^2\right)^2 = a^3 z \Rightarrow r^4 = a^3 r\cos\vartheta \Rightarrow r = a\sqrt[3]{\cos\vartheta}\ (\Rightarrow 0 \le \theta \le \pi/2)$. По этому уравнению поверхность построить уже можно; отсутствие координаты φ в уравнении показывает, что это - тело вращения вокруг оси Oz. Находим объём:

$$V = \iiint\limits_V r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/2} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{a\sqrt[3]{\cos\theta}} r^2 dr = \frac{2\pi}{3}\int\limits_0^{\pi/2} r^3\Big|_0^{a\sqrt[3]{\cos\theta}} \sin\theta d\theta =$$

$$= \frac{2\pi a^3}{3}\int\limits_0^{\pi/2} \cos\theta\sin\theta d\theta = \frac{\pi a^3}{3}.$$

16.2.6. Механические приложения тройного интеграла. Пусть V - тело в пространстве, в котором задано распределение объёмной плотности массы $\mu(P)$ ($P \in V$, $\mu(P) = \lim\limits_{diam(G)\to 0} \frac{m(G)}{v(G)}$, где G - область, содержащая точку P, $m(G)$ - масса этой области, $v(G)$ - её объём). Вывод следующих формул полностью аналогичен выводу для двумерного случая (раздел **16.1.7.4. Механические приложения двойного интеграла**), поэтому просто перечислим их.

Масса тела $m(v) = \iiint\limits_V \mu(P)dv$;

координаты центра тяжести $x_c = \frac{1}{m(V)}\iiint\limits_V x\cdot\mu(P)dv$, $y_c = \frac{1}{m(V)}\iiint\limits_V y\cdot\mu(P)dv$,

$z_c = \frac{1}{m(V)}\iiint\limits_V z\cdot\mu(P)dv$;

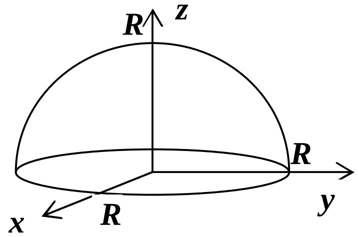
моменты инерции $I_{Oxz}=\iiint\limits_V y^2\cdot\mu(P)dv$ (относительно плоскости Oxz), $I_{Oyz}=\iiint\limits_V x^2\cdot\mu(P)dv$ (относительно плоскости Oyz), $I_{Oxy}=\iiint\limits_V z^2\cdot\mu(P)dv$ (относительно плоскости Oxy),

$I_x=\iiint\limits_V (y^2+z^2)\cdot\mu(P)dv$ (относительно оси Ox), $I_y=\iiint\limits_V (x^2+z^2)\cdot\mu(P)dv$ (относительно оси Oy),

$I_z=\iiint\limits_V (x^2+y^2)\cdot\mu(P)dv$ (относительно оси Oz),

$I_O=\iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\cdot\mu(P)dv=I_{Oxy}+I_{Oyz}+I_{Oxz}$ (относительно начала координат).

Примеры. 1. Найти координаты центра тяжести половины шара радиуса R, если плотность пропорциональна расстоянию от центра шара.



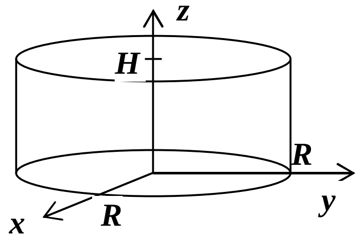
Решение. Если ввести координатную систему так, как показано на рисунке, то $\mu(P)=k\sqrt{x^2+y^2+z^2}=kr$; вычисления ведём, естественно, в сферических координатах:

$$m=\iiint\limits_V kr\cdot r^2\sin\theta drd\varphi d\theta=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin\theta d\theta\int\limits_0^R r^3dr=2\pi k\cdot 1\cdot R^4/4=$$

$=\pi kR^4/2$; $x_c=\dfrac{1}{m}\iiint\limits_V x\cdot kr\cdot r^2\sin\theta drd\varphi d\theta=k\int\limits_0^{2\pi}\cos\varphi d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2\theta d\theta\int\limits_0^R r^4dr=0$, аналогично $y_c=0$ (что, впрочем, очевидно и без вычислений);

$$z_c=\frac{1}{m}\iiint\limits_V z\cdot kr\cdot r^2\sin\theta drd\varphi d\theta=\frac{2k}{\pi kR^4}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\pi/2}\cos\theta\sin\theta d\theta\int\limits_0^R r^4dr=\frac{2k}{\pi kR^4}\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{R^5}{5}=\frac{2R}{5}.$$

2. Найти моменты инерции однородного $(\mu=k=\mathrm{const})$ цилиндра относительно диаметра основания и оси.



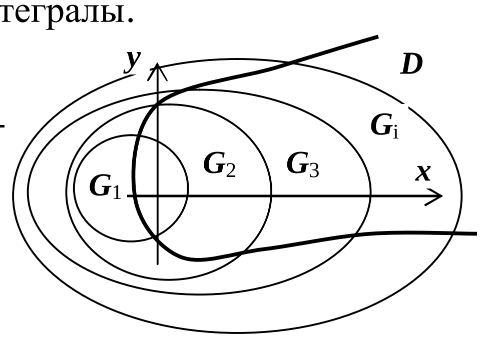
Решение. Если система координат введена так, как показано на рисунке, то мы должны найти I_x (или $I_y=I_x$) и I_z. Вычисляем в цилиндрических координатах. $I_x=\iiint\limits_V k(y^2+z^2)dxdydz=$

$$=\iiint\limits_V k(r^2\sin^2\varphi+z^2)rdrd\varphi dz=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R rdr\int\limits_0^H(r^2\sin^2\varphi+z^2)dz=k\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R r\left(r^2H\sin^2\varphi+\frac{H^3}{3}\right)dr=$$

$$=k\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{R^4}{4}H\sin^2\varphi+\frac{H^3R^2}{6}\right)d\varphi=\frac{\pi kHR^4}{4}+\frac{\pi kH^3R^2}{3}.$$

$$I_z=\iiint\limits_V k(x^2+y^2)dxdydz=\iiint\limits_V kr^2\cdot rdrd\varphi dz=k\cdot 2\pi\frac{R^4}{4}\cdot H=\frac{\pi kHR^4}{2}.$$

14.3. Несобственные кратные интегралы.



14.3.1. Несобственные интегралы по неограниченной области. Логика определения сходимости несобственного двойного, тройного, n- кратного интеграла по неограниченной области такая же, как и для несобственного определённого интеграла: мы ограничиваем область, вычисляем интеграл по этой ограниченной области, и, затем, расширяя область интегрирования до исходной, смотрим, существует или нет конечный предел значения интеграла. Рассмотрим это более подробно для случая двойного интеграла.

Пусть в неограниченной области D определена функция $f(x,y)$. Построим бесконечную последовательность ограниченных областей G_i, $i = 1,2,...$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $G_{i+1} \supset G_i$,

2. $\mathrm{diam}(G_i) \to \infty$ при $i \to \infty$,

3. для любой точки $P \in D$ существует такой номер i_0, что $P \in G_i$ при $i \ge i_0$.

Пусть теперь $D_i = D \cap G_i$. Любая такая область ограничена. Рассмотрим последовательность значений интегралов $I_i = \iint\limits_{D_i} f(x,y)dxdy$. Если для любой последовательности $\{G_i\}$ существует конечный $\lim\limits_{i\to\infty} I_i$, то несобственный интеграл $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ называется сходящимся, а значение предела - значением этого интеграла; если хотя бы для одной последовательности $\{G_i\}$ $\lim\limits_{i\to\infty} I_i$ не существует или бесконечен, несобственный интеграл $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ называется расходящимся.

Можно показать, что если подынтегральная функция сохраняет знак на области D, то для сходимости $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ достаточно существования конечного $\lim\limits_{i\to\infty} \iint\limits_{D_i} f(x,y)dxdy$ для какой-либо одной последовательности $\{G_i\}$. Очевидно, что для таких функций справедливы признаки сравнения. Другое важное свойство, которое мы вводили для сходимости несобственных определенных интегралов, свойство абсолютной сходимости, для кратных интегралов теряет смысл: оказывается, что если сходится $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$, то обязательно сходится и $\iint\limits_{D} |f(x,y)|dxdy$

Рассмотрим два примера.

1. $\iint\limits_{\{(x,y)|x^2+y^2\ge 1\}} \dfrac{dxdy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^p}$. Здесь область D - внешность круга радиуса 1. Выберем последовательность $\{G_i = (x,y) | 1 \le x^2 + y^2 \le i^2, i = 2,3,...\}$ (кольца, ограниченные окружностями радиуса 1 и i), тогда $D_i = G_i$, и ($p \ne 2$)

$$I_i = \iint\limits_{D_i} \frac{dxdy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^p} = \iint\limits_{D_i} \frac{rdrd\varphi}{r^p} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_1^i \frac{dr}{r^{p-1}} = 2\pi\left(-\frac{1}{p-2}\cdot\frac{1}{r^{p-2}}\right)\Bigg|_1^i.$$

Это выражение имеет конечный предел при $i \to \infty$, если $p > 2$. Случай $p = 2$ исследуется отдельно и приводит к расходимости. Таким образом, исследуемый интеграл сходится при $p > 2$.

Упражнение. Самостоятельно доказать, что $\iiint\limits_{\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\ge 1\}} \dfrac{dxdydz}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^p}$ сходится при $p > 3$.

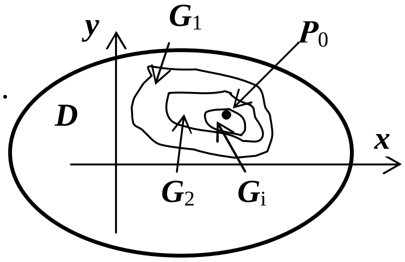
2. Цель этого примера - найти значение интеграла, который играет важную роль в теории вероятностей, при решении уравнений в частных производных и в большом числе других приложений - **интеграла Пуассона** $\Pi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Рассмотрим двойной интеграл по всей плоскости $\iint\limits_{\left\{\substack{-\infty\le x\le+\infty \\ -\infty\le y\le+\infty}\right\}} e^{-x^2-y^2} dxdy$. В качестве областей G_i выберем круги радиуса i: $\{G_i = (x,y) | 0 \le x^2 + y^2 \le i^2, i = 1,2,3,...\}$, и в этом случае $D_i = G_i$.

$$I_i = \iint\limits_{D_i} e^{-x^2-y^2} dxdy = \iint\limits_{D_i} e^{-r^2} rdrd\varphi = -\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^i e^{-r^2} d(-r^2) = -\pi\left(e^{-r^2}\right)\Bigg|_0^i = \pi\left(1 - e^{-i^2}\right) \underset{i\to\infty}{\to} \pi.$$

С другой стороны, если расписать двойной интеграл $\iint\limits_{\left\{\substack{-\infty\le x+\le\infty \\ -\infty\le y\le+\infty}\right\}} e^{-x^2-y^2}dxdy$ в виде повторного, получим $\iint\limits_{\left\{\substack{-\infty\le x\le+\infty \\ -\infty\le y\le+\infty}\right\}} e^{-x^2-y^2}dxdy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy = \Pi^2$, и так как $\Pi^2 = \pi$, то $\Pi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

14.3.2. Несобственные интегралы от неограниченной функции. Структура множества точек, в окрестностях которых функция двух, трех и большего числа переменных может оказаться неограниченной, может быть достаточно сложной. Так, функция трёх переменных может быть неограниченной в окрестности одной точки $\left(f(x,y,z) = \dfrac{1}{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}\right)$, прямой $\left(f(x,y,z) = \dfrac{1}{(x-1)^2+(y-2)^2}\right)$, плоскости $\left(f(x,y,z) = \dfrac{1}{(x-1)^2}\right)$; естественно, возможны более сложные случаи. Мы рассмотрим самый простой случай, когда функция неограничена в окрестности единственной точки.



Пусть функция двух переменных $f(x,y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D всюду, за исключением точки P_0. Возьмём бесконечную последовательность ограниченных областей G_i, $i = 1,2,\ldots$, удовлетворяющую следующим условиям:

1. $G_{i+1} \subset G_i$,
2. $\operatorname{diam}(G_i) \to 0$ при $i \to \infty$,

Пусть теперь $D_i = D \setminus G_i$. В каждой такой области функция $f(x,y)$ непрерывна. Рассмотрим последовательность значений интегралов $I_i = \iint\limits_{D_i} f(x,y)dxdy$. Если для любой последовательности $\{G_i\}$ существует конечный $\lim\limits_{i\to\infty} I_i$, то несобственный интеграл $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ называется сходящимся, а значение предела - значением этого интеграла; если хотя бы для одной последовательности $\{G_i\}$ $\lim\limits_{i\to\infty} I_i$ не существует или бесконечен, несобственный интеграл $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ называется расходящимся.

И в этом случае можно показать, что:

1. если подынтегральная функция сохраняет знак на области D, то для сходимости $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ достаточно существования конечного $\lim\limits_{i\to\infty} \iint\limits_{D_i} f(x,y)dxdy$ для какой-либо одной последовательности $\{G_i\}$.
2. Для таких функций справедливы признаки сравнения.
3. Если сходится $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$, то обязательно сходится и $\iint\limits_{D} |f(x,y)|dxdy$

Пример. $\iint\limits_{\{(x,y)|x^2+y^2\le1\}} \dfrac{dxdy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^p}$. Здесь область D - внутренность круга радиуса 1. Выберем последовательность $\left\{G_i = (x,y) \mid x^2+y^2 \le \left(\dfrac{1}{i}\right)^2, i = 2,3,\ldots\right\}$ (круги радиуса $1/i$), тогда

$D_i = D \setminus G_i$ - кольцо $\left\{D_i = (x,y) \mid \left(\dfrac{1}{i}\right)^2 \le x^2+y^2 \le 1, i = 2,3,\ldots\right\}$, и ($p \ne 2$)

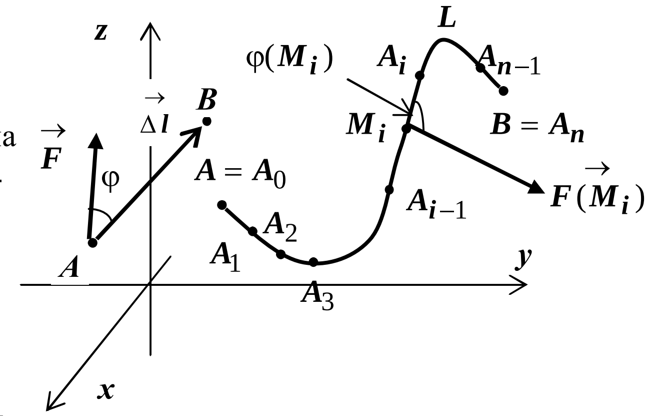
$$I_i=\iint\limits_{D_i}\frac{dxdy}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^p}=\iint\limits_{D_i}\frac{rdrd\varphi}{r^p}=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{1/i}^{1}\frac{dr}{r^{p-1}}=2\pi\left(-\frac{1}{p-2}\cdot\frac{1}{r^{p-2}}\right)\Bigg|_{1/i}^{1}$$

. Это выражение имеет конечный предел при $i\to\infty$, если $p<2$. Случай $p=2$ исследуется отдельно и приводит к расходимости. Таким образом, исследуемый интеграл сходится при $p<2$.

Упражнение. Самостоятельно доказать, что $\iiint\limits_{\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 1\}}\frac{dxdydz}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^p}$ сходится при $p<3$.

16.3. Криволинейные интегралы.

16.3.1. Введение. Рассмотрим следующую физическую задачу. Пусть в пространстве $Oxyz$ вдоль кривой $L=\overset{\cup}{AB}$ перемещается материальная точка под воздействием силы $\vec{F}(M)=P(M)\cdot\vec{i}+Q(M)\cdot\vec{j}+R(M)\cdot\vec{k}$; при этом сила может меняться от точки к точке. Требуется найти работу, которая совершается силой.



В случае, когда в качестве $L=\overset{\cup}{AB}$ берётся $\vec{\Delta l}\{\Delta x,\Delta y,\Delta z\}$ - прямолинейный отрезок (левая часть рисунка), и $\vec{F}(M)=\vec{F}\{P,Q,R\}=\mathrm{const}$ - постоянная сила, работа есть скалярное произведение силы на вектор перемещения точки: $A=\vec{F}\cdot\vec{\Delta l}$. Это выражение можно трактовать двумя способами.

1. По определению скалярного произведения $A=\vec{F}\cdot\vec{\Delta l}=(F\cdot\cos\varphi)\cdot\Delta l$. Здесь $F=\left|\vec{F}\right|$, $\Delta l=\left|\vec{\Delta l}\right|$, φ - угол между $\vec{F}$ и $\vec{\Delta l}$. Обозначим $f=F\cdot\cos\varphi$, тогда $A=f\cdot\Delta l$.
2. Если расписать скалярное произведение в координатной форме, то $A=\vec{F}\cdot\vec{\Delta l}=P\cdot\Delta x+Q\cdot\Delta y+R\cdot\Delta z$.

Пусть теперь L - произвольная гладкая ограниченная кривая, и сила $\vec{F}(M)$ может меняться от точки к точке (правая часть рисунка). Чтобы свести этот случай к предыдущему, разобьём кривую $L=\overset{\cup}{AB}$ точками $A_0=A, A_1, A_2,\dots,A_n=B$ на n частей, на каждой из дуг $\overset{\cup}{A_{i-1}A_i}$ выберем произвольную точку M_i, и, считая, что дуга $\overset{\cup}{A_{i-1}A_i}$ - прямолинейный отрезок - вектор $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}\{\Delta x_i,\Delta y_i,\Delta z_i\}$ длины Δl_i, и сила вдоль этого отрезка постоянна и равна $\vec{F}(M_i)$, получим, что работа вдоль этой дуги близка к $\Delta A_i=\vec{F}(M_i)\cdot\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ ($i=1,2,\dots,n$). Как мы видели, это выражение можно представить и в виде $\Delta A_i=\vec{F}(M_i)\cdot\overrightarrow{A_{i-1}A_i}=f(M_i)\cdot\Delta l_i$

(где $f(M_i)=\left|\overrightarrow{F}(M_i)\right|\cdot\cos\varphi(M_i)$, $\varphi(M_i)$ - угол между $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ и $\overrightarrow{F}(M_i)$), и в виде

$\Delta A_i=\overrightarrow{F}(M_i)\cdot\overrightarrow{A_{i-1}A_i}=P(M_i)\cdot\Delta x_i+Q(M_i)\cdot\Delta y_i+R(M_i)\cdot\Delta z_i$. Суммируя эти выражения по всем n дугам, получим выражения двух интегральных сумм: $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot\Delta l_i$ и

$\sum\limits_{i=1}^{n} P(M_i)\cdot\Delta x_i+Q(M_i)\cdot\Delta y_i+R(M_i)\cdot\Delta z_i$. Переход к пределу в этих интегральных суммах при

$\max\limits_{i=1,2,\ldots n}\Delta l_i\to 0$ приведёт к двум криволинейным интегралам: $\int\limits_L f(M)\cdot dl$ и

$\int\limits_L P(M)\cdot dx+Q(M)\cdot dy+R(M)\cdot dz$. Первый из этих интегралов называется криволинейным интегралом первого рода, или криволинейным интегралом по длине дуги; второй - криволинейным интегралом второго рода, или криволинейным интегралом по координатам. Несмотря на то, что они описывают одну и ту же физическую величину, с математической точки зрения это разные объекты. Они имеют разные определения и разные свойства. В частности, криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления прохождения кривой: $\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(M)\cdot dl=\int\limits_{\overset{\cup}{BA}} f(M)\cdot dl$ (так как угол φ между силой и кривой входит в подынтегральную функцию в явном виде), в то время как криволинейный интеграл второго рода меняет знак при изменении направления прохождения кривой:

$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} P(M)\cdot dx+Q(M)\cdot dy+R(M)\cdot dz=-\int\limits_{\overset{\cup}{BA}} P(M)\cdot dx+Q(M)\cdot dy+R(M)\cdot dz$ (вектор

$\overrightarrow{A_{i-1}A_i}\{\Delta x_i,\Delta y_i,\Delta z_i\}$, координаты которого входят в интегральную сумму, меняется на вектор

$\overrightarrow{A_iA_{i-1}}\{-\Delta x_i,-\Delta y_i,-\Delta z_i\}$).

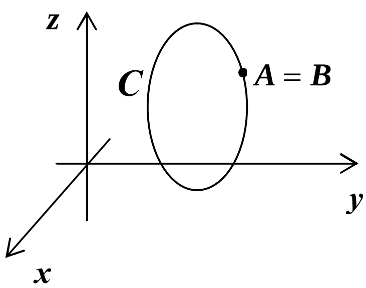
Перейдём к формальным определениям.

16.3.2. Криволинейный интеграл первого рода (по длине дуги).

16.3.2.1. Определение криволинейного интеграла первого рода. Пусть в пространстве переменных x,y,z задана кусочно-гладкая кривая $L=\overset{\cup}{AB}$, на которой определена функция $f(x,y,z)$. Разобьём кривую точками $A_0=A, A_1, A_2,\ldots,A_n=B$ на n частей, на каждой из дуг $\overset{\cup}{A_{i-1}A_i}$ выберем произвольную точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$, найдём $f(M_i)=f(x_i,y_i,z_i)$ и длину Δl_i дуги $\overset{\cup}{A_{i-1}A_i}$, и составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot\Delta l_i$. Если существует предел последовательности интегральных сумм при $\max\limits_{i=1,2,\ldots n}\Delta l_i\to 0$, не зависящий ни от способа разбиения кривой на дуги

$\overset{\cup}{A_{i-1}A_i}$ $(i=1,2,\ldots,n)$, ни от выбора точек M_i, то функция $f(x,y,z)$ называется интегрируемой по кривой L, а значение этого предела называется криволинейным интегралом первого рода, или криволинейным интегралом по длине дуги от функции $f(x,y,z)$ по кривой L, и обозначается $\int\limits_L f(M)\cdot dl$ (или

$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(M)\cdot dl$).



Теорема существования. Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна на кусочно-гладкой кривой L, то она интегрируема по этой кривой.

Случай замкнутой кривой. В этом случае в качестве начальной и конечной точки можно взять произвольную точку кривой. Замкнутую кривую в дальнейшем будем называть **контуром** и обозначать буквой C. То, что кривая, по которой вычисляется интеграл, замкнута, принято обозначать кружочком на знаке интеграла: $\oint\limits_C f(M)\cdot dl$.

16.3.2.2. Свойства криволинейного интеграла первого рода. Для этого интеграла имеют место все шесть свойств, справедливых для определённого, двойного, тройного интеграла, от **линейности** до **теоремы о среднем**. Сформулировать и доказать их **самостоятельно**. Однако для этого интеграла справедливо и седьмое, персональное свойство:

Независимость криволинейного интеграла первого рода от направления прохождения кривой: $\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} f(M)\cdot dl = \int\limits_{\overset{\cup}{BA}} f(M)\cdot dl$.

Доказательство. Интегральные суммы для интегралов, стоящих в правой и левой частях этого равенства, при любом разбиении кривой и выборе точек M_i совпадают (всегда длина дуги $\overset{\cup}{A_{i-1}A_i}$ $\Delta l_i \geq 0$), поэтому равны их пределы при $\max\limits_{i=1,2,\ldots n} \Delta l_i \to 0$.

16.3.2.3. Вычисление криволинейного интеграла первого рода. Примеры. Пусть кривая L задана параметрическими уравнениями $L: \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t_0 \leq t \leq t_k \\ z = z(t); \end{cases}$, где $x(t), y(t), z(t)$ - непрерывно дифференцируемые функции, и пусть точкам $A_i(x_i, y_i, z_i)$, которые задают разбиение кривой, соответствуют значения параметра t_i, т.е. $x_i = x(t_i), y_i = y(t_i), z_i = z(t_i)$. Тогда (см. раздел 13.3. Вычисление длин кривых) $\Delta l_i = \int\limits_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\cdot dt$. По теореме о среднем, существует точка $\bar{t}_i$ такая, что $\Delta l_i = \sqrt{[x'(\bar{t}_i)]^2 + [y'(\bar{t}_i)]^2 + [z'(\bar{t}_i)]^2}\cdot \Delta t_i$, где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$. Выберем точки M_i, получающиеся при этом значении параметра: $M_i(x_i, y_i, z_i) = M_i(x(\bar{t}_i), y(\bar{t}_i), z(\bar{t}_i))$. Тогда интегральная сумма для криволинейного интеграла $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\cdot \Delta l_i$ будет равна интегральной сумме для определенного интеграла $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x(\bar{t}_i), y(\bar{t}_i), z(\bar{t}_i))\cdot \sqrt{[x'(\bar{t}_i)]^2 + [y'(\bar{t}_i)]^2 + [z'(\bar{t}_i)]^2}\cdot \Delta t_i$. Так как $\Delta l_i \to 0 \Leftrightarrow \Delta t_i \to 0$, то, переходя к пределу при $\max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta l_i \to 0$, или, что тоже самое, $\max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta t_i \to 0$ в равенстве

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\cdot \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} f(x(\bar{t}_i), y(\bar{t}_i), z(\bar{t}_i))\cdot \sqrt{[x'(\bar{t}_i)]^2 + [y'(\bar{t}_i)]^2 + [z'(\bar{t}_i)]^2}\cdot \Delta t_i,$$ получим

$$\int\limits_L f(x, y, z)\cdot dl = \int\limits_{t_0}^{t_k} f(x(t), y(t), z(t))\cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\cdot dt.$$

Таким образом, вычисление криволинейного интеграла первого рода сводится к вычислению определённого интеграла по параметру. Если кривая задана параметрически, то этот переход не вызывает трудностей; если дано качественное словесное описание кривой, то основной трудностью может быть введение параметра на кривой. Ещё раз подчеркнём, что **интегрирование всегда ведётся в сторону возрастания параметра.**

Примеры. 1. Вычислить $\int\limits_L (x+y+z)dl$, где L - один виток спирали $L: \begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \\ z = at; \ 0 \leq t \leq 2\pi. \end{cases}$

Здесь переход к определённому интегралу проблем не вызывает: находим
$x'(t) = -R\sin t,\ y'(t) = R\cos t,\ z'(t) = a,\ \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \sqrt{R^2 + a^2}$, и

$$\int\limits_L (x+y+z)dl = \int\limits_0^{2\pi} (R\cos t + R\sin t + at)\sqrt{R^2+a^2}dt = 2\pi^2 a\sqrt{R^2+a^2}.$$

2. Вычислить тот же интеграл по отрезку прямой, соединяющей точки $A(1,2,3)$ и $B(-3,3,-8)$. Здесь прямого параметрического задания кривой нет, поэтому на AB необходимо ввести параметр. Параметрические уравнения прямой имеют вид $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$ где $\vec{a}\{m,n,p\}$ - направляющий вектор, (x_0, y_0, z_0) - точка прямой. В качестве точки берем точку $A(1,2,3)$, в качестве направляющего вектора - вектор $\overrightarrow{AB}\{-4,1,-11\}$: $\begin{cases} x = 1-4t, \\ y = 2+t, \\ z = 3-11t, \end{cases} \Rightarrow dl = \sqrt{16+1+121}dt = \sqrt{138}dt$. Легко видеть, что точка $A(1,2,3)$ соответствует значению $t=0$, точка $B(-3,3,-8)$ - значению $t=1$, поэтому

$$\int\limits_{AB} (x+y+z)dl = \int\limits_0^1 [(1-4t)+(2+t)+(3-11t)]\sqrt{138}dt = \sqrt{138}\int\limits_0^1 (6-14t)dt = -\sqrt{138}.$$

3. Найти $\int\limits_{AB} xyd\ell$, где $\overset{\cup}{AB}$ - часть сечения цилиндра $x^2+y^2=4$ плоскостью $z=x+1$, лежащая в первом октанте.

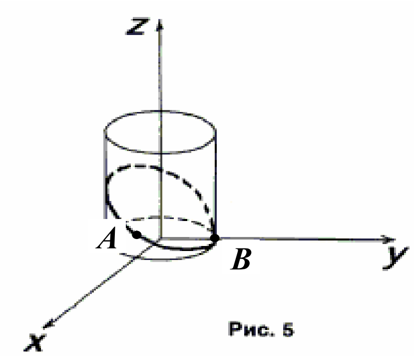


Рис. 5

Решение: Параметрические уравнения окружности - направляющей цилиндра имеют вид $x=2\cos\varphi$, $y=2\sin\varphi$, и так как $z=x+1$, то $z= 2\cos\varphi+1$. Итак,

$L = \overset{\cup}{AB} : \begin{cases} x = 2\cos\varphi,\ y = 2\sin\varphi, \\ z = 2\cos\varphi + 1, 0 \le \varphi \le \pi/2; \end{cases}$ поэтому

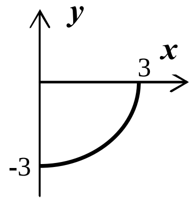
$$\int\limits_{AB} xyd\ell = 8\int\limits_0^{\pi/2} \cos\varphi\sin\varphi\sqrt{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}\,d\varphi = \frac{8}{2}\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1+\sin^2\varphi}\,d\sin^2\varphi =$$

$$= \frac{8}{3}(1+\sin^2\varphi)^{3/2}\Big|_0^{\pi/2} = 8\cdot\frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

16.3.2.3.1. Вычисление криволинейного интеграла первого рода. Плоский случай. Если кривая лежит на какой-либо координатной плоскости, например, плоскости Oxy, и задаётся функцией $y = y(x), a \le x \le b$, то, рассматривая x как параметр, получаем следующую формулу для вычисления интеграла: $\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x, y(x))\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,dx$. Аналогично, если кривая задаётся уравнением $x = x(y), c \le y \le d$, то $\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_c^d f(x(y), y)\sqrt{1+[x'(y)]^2}\,dy$.

Пример. Вычислить $\int\limits_L xy^2 dl$, где L - четверть окружности $x^2+y^2=9$, лежащая в четвёртом квадранте.

Решение. 1. Рассматривая x как параметр, получаем $y=-\sqrt{9-x^2}$, $y'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$,



$\sqrt{1+y'^2(x)}=\dfrac{3}{\sqrt{9-x^2}}$, поэтому $\int\limits_L xy^2dl=\int\limits_0^3 x\left[-\sqrt{9-x^2}\right]^2\cdot\dfrac{3}{\sqrt{9-x^2}}dx=$

$$=3\int\limits_0^3 x\cdot\sqrt{9-x^2}dx=-\left[\sqrt{9-x^2}\right]^3\Bigg|_0^3=27.$$

2. Если за параметр взять переменную y, то $x=\sqrt{9-y^2}$, $x'(y)=\dfrac{-y}{\sqrt{9-y^2}}$, $dl=\dfrac{3dy}{\sqrt{9-y^2}}$ и

$$\int\limits_L xy^2dl=\int\limits_0^3\sqrt{9-y^2}\,y^2\cdot\frac{3}{\sqrt{9-y^2}}dy=y^3\Big|_0^3=27.$$

3. Естественно, можно взять обычные параметрические уравнения окружности $x=3\cos t$, $y=3\sin t$, $3\pi/2\le t\le 2\pi$: $\int\limits_L xy^2dl=\int\limits_{3\pi/2}^{2\pi}3\cos t\cdot(3\sin t)^2\cdot\sqrt{(-3\sin t)^2+(3\cos t)^2}dy=81\dfrac{\sin t^3}{3}\Bigg|_{3\pi/2}^{2\pi}=27$.

Если кривая задана в полярных координатах $r=r(\varphi)$, $\varphi_0\le\varphi\le\varphi_k$, то $dl=\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}d\varphi$,

и $\int\limits_L f(x,y)dl=\int\limits_{\varphi_0}^{\varphi_k}f(r(\varphi)\cos\varphi,r(\varphi)\sin\varphi)\cdot\sqrt{r^2(\varphi)+r'^2(\varphi)}\cdot d\varphi$.

16.3.2.4. Механические приложения криволинейного интеграла 1-го рода.

16.3.2.4.1. Масса m материальной кривой $\overset{\cup}{AB}$ с плотностью $\mu(x,y,z)$ вычисляется по формуле $m=\int\limits_{\overset{\cup}{AB}}\mu(x,y,z)d\ell$.

Пример. Найти массу четверти лемнискаты $r^2=a^2\cos 2\varphi$, если плотность выражается формулой $\mu(x,y)=k\sqrt{x^2+y^2}=kr$.

Решение: $r=a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $r'=-a\dfrac{\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, поэтому

$$m=\int\limits_{\overset{\cup}{AB}}krd\ell=k\int\limits_0^{\pi/4}a\sqrt{\cos 2\varphi}\cdot\sqrt{a^2\cos 2\varphi+\frac{a^2\sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi}}d\varphi=\frac{1}{4}\pi ka^2.$$

16.3.2.4.2. Статические моменты и координаты центра масс. Пусть плоская материальная кривая $\overset{\cup}{AB}$ имеет плотность $\mu(x,y)$. Статический момент относительно оси Ox определяется по формуле $M_x=\int\limits_{\overset{\cup}{AB}}y\mu(x,y)d\ell$, относительно оси Oy: $M_y=\int\limits_{\overset{\cup}{AB}}x\mu(x,y)d\ell$.

Аналогично, статические моменты пространственной кривой относительно координатных плоскостей вычисляются по формулам

$$M_{xy}=\int\limits_{\overset{\cup}{AB}}z\mu d\ell,\qquad M_{xz}=\int\limits_{\overset{\cup}{AB}}y\mu d\ell,\qquad M_{yz}=\int\limits_{\overset{\cup}{AB}}x\mu d\ell$$

Координаты центра масс могут быть найдены по формулам

$x_c=\dfrac{M_y}{m}$, $y_c=\dfrac{M_x}{m}$ - для плоской кривой;

$x_c=\dfrac{M_{yz}}{m}$, $y_c=\dfrac{M_{xz}}{m}$, $z_c=\dfrac{M_{xy}}{m}$ - для пространственной кривой, где m - масса кривой.

Пример. Найти центр масс четверти однородной окружности $x^2 + y^2 = a^2, x \ge 0, y \ge 0$

Решение: Можно считать, что $\mu=1$. Тогда масса кривой равна ее длине $m = \frac{2\pi a}{4} = \frac{\pi a}{2}$. Статический момент M_x равен

$$M_x = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} y d\ell = \int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx = a^2.$$

Из соображений симметрии $M_y = M_x$, поэтому координаты центра масс равны

$$x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{2a}{\pi},\ y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{2a}{\pi}.$$

16.3.2.4.3. Моменты инерции. Моменты инерции плоской кривой $\overset{\cup}{AB}$ с плотностью μ относительно координатных осей вычисляются по формулам

$$I_{Ox} = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} y^2 \mu d\ell, \quad I_{Oy} = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} x^2 \mu d\ell;$$

моменты инерции относительно начала координат

$$I_0 = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} (x^2 + y^2) \mu d\ell = I_x + I_y$$

В случае пространственной кривой моменты инерции относительно координатных осей и начала координат определяются по формулам

$$I_{Ox} = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} (y^2 + z^2) \mu d\ell, \quad I_{Oy} = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} (x^2 + z^2) \mu d\ell, \quad I_{Oz} = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} (x^2 + y^2) \mu d\ell,$$

$$I_0 = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} (x^2 + y^2 + z^2) \mu d\ell = \frac{I_{Ox} + I_{Oy} + I_{Oz}}{2}.$$

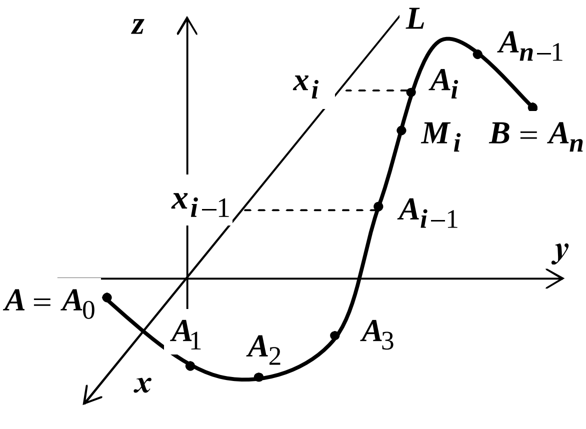
Пример. Найти момент инерции относительно оси ***Oz*** однородной винтовой линии ($\mu=1$) $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = at;\ 0 \le t \le 2\pi$

Решение:

$$I_{Oz} = \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} (x^2 + y^2) \mu d\ell = \int\limits_0^{2\pi} (a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t) \sqrt{a^2 + a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t}\, dt = a^3 \sqrt{2} \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\sqrt{2}\pi a^3.$$

16.3.3. Криволинейный интеграл второго рода (по координатам).

16.3.3.1. Определение криволинейного интеграла второго рода. Пусть в пространстве ***Oxyz*** дана кусочно-гладкая кривая $L = \overset{\cup}{AB}$, на которой определена функция $P(x, y, z)$. Разобьём кривую точками $A_0(x_0, y_0, z_0) = A,\ A_1(x_1, y_1, z_1),$ $A_2(x_2, y_2, z_2), \ldots, A_i(x_i, y_i, z_i), \ldots, A_n(x_n, y_n, z_n) = B$ на n частей, на каждой из дуг $\overset{\cup}{A_{i-1}A_i}$ выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, найдём $P(M_i) = P(x_i, y_i, z_i)$ и проекцию $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ дуги $\overset{\cup}{A_{i-1}A_i}$ на ось ***Ox***, и составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} P(M_i) \cdot \Delta x_i$. Если существует предел последовательности интегральных сумм при



$\max\limits_{i=1,2,\ldots n} \Delta l_i \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения кривой на дуги $\overset{\cup}{A_{i-1}A_i}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, ни от выбора точек M_i, то функция $P(x,y,z)$ называется интегрируемой по кривой L, а значение этого предела называется криволинейным интегралом второго рода, или криволинейным интегралом по координате x от функции $P(x,y,z)$ по кривой L, и обозначается $\int\limits_L P(M)\cdot dx$ (или $\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} P(M)\cdot dx$).

Теорема существования. Если функция $P(x,y,z)$ непрерывна на кривой L, то она интегрируема по этой кривой.

Если на кривой L, вместе с функцией $P(x,y,z)$, заданы функции $Q(x,y,z)$ и $R(x,y,z)$, то, аналогично интегралу $\int\limits_L P(M)\cdot dx$, определяются интегралы $\int\limits_L Q(M)\cdot dy$ и $\int\limits_L R(M)\cdot dz$. В приложениях рассматривается сумма этих интегралов, которая обозначается $\int\limits_L P(M)\cdot dx + Q(M)\cdot dy + R(M)\cdot dz$ и также называется криволинейным интегралом второго рода. Если кривая, по которой ведётся интегрирование, является контуром (т.е. замкнута), то, как и для криволинейного интеграла по длине дуги, в качестве начальной (и совпадающей с ней конечной) точки можно взять любую точку кривой.

16.3.3.2. Свойства криволинейного интеграла второго рода. Для этого интеграла существенны следующие свойства:

16.3.3.2.1. Линейность. Если функции $P(M),\ P_1(M),\ Q(M),\ Q_1(M),\ R(M),\ R_1(M)$ интегрируемы по кривой L (каждая по своей координате, то по этой кривой интегрируемы функции $\alpha P(M)+\beta P_1(M),\ \alpha Q(M)+\beta Q_1(M),\ \alpha R(M)+\beta R_1(M)$, и

$$\int\limits_L [\alpha P(M)+\beta P_1(M)]dx + [\alpha Q(M)+\beta Q_1(M)]dy + [\alpha R(M)+\beta R_1(M)]dz =$$

$$= \alpha\int\limits_L P(M)dx + Q(M)dy + R(M)dz + \beta\int\limits_L P_1(M)dx + Q_1(M)dy + R_1(M)dz.$$

16.3.3.2.2. Аддитивность. Если кривая L разбита на две части L_1 и L_2, не имеющие общих внутренних точек, то $\int\limits_L P\cdot dx + Q\cdot dy + R\cdot dz = \int\limits_{L_1} P\cdot dx + Q\cdot dy + R\cdot dz + \int\limits_{L_2} P\cdot dx + Q\cdot dy + R\cdot dz$.

Доказательство этих свойств такое же, как и для других типов интегралов; воспроизвести их **самостоятельно**. Персональное свойство криволинейного интеграла по координатам:

16.3.3.2.3. Изменение знака криволинейного интеграла второго рода при изменении направления прохождения кривой: $\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} P\cdot dx + Q\cdot dy + R\cdot dz = -\int\limits_{\overset{\cup}{BA}} P\cdot dx + Q\cdot dy + R\cdot dz$.

Доказательство очевидно: при изменении направления прохождения кривой меняет знак каждая проекция Δx_i, следовательно, меняет знак интегральная сумма, следовательно, меняет знак предел последовательности интегральных сумм.

16.3.3.3. Вычисление криволинейного интеграла второго рода. Примеры. Пусть кривая L задана параметрическими уравнениями $L:\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t_0 \le t \le t_k \\ z = z(t); \end{cases}$, где $x(t),\ y(t),\ z(t)$ - непрерывно дифференцируемые функции, и пусть точкам $A_i(x_i, y_i, z_i)$, которые задают разбиение кривой, соответствуют значения параметра t_i, т.е. $x_i = x(t_i),\ y_i = y(t_i),\ z_i = z(t_i)$. Тогда по теореме Лагранжа существуют такие точки $\bar{t}_i\ (i = 1,2,\dots,n)$, что $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = x'(\bar{t}_i)(t_i - t_{i-1})$. Выберем точки M_i, получающиеся при этих значениях параметра: $M_i(x_i, y_i, z_i) = M_i(x(\bar{t}_i), y(\bar{t}_i), z(\bar{t}_i))$. Тогда интегральная сумма для криволинейного интеграла $\sum\limits_{i=1}^{n} P(x_i, y_i, z_i)\cdot\Delta x_i$ будет равна интегральной сумме для определенного интеграла $\sum\limits_{i=1}^{n} P(x(\bar{t}_i), y(\bar{t}_i), z(\bar{t}_i))\cdot x'(\bar{t}_i)\cdot\Delta t_i$. Так как $\Delta l_i \to 0 \Leftrightarrow \Delta t_i \to 0$, то, переходя к пределу при $\max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta l_i \to 0$, или, что тоже самое, $\max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta t_i \to 0$ в равенстве

$\sum\limits_{i=1}^{n} P(x_i, y_i, z_i)\cdot \Delta x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} P(x(\bar{t}_i), y(\bar{t}_i), z(\bar{t}_i))\cdot x'(\bar{t}_i)\cdot \Delta t_i$, получим

$\int\limits_L P(x,y,z)\cdot dx = \int\limits_{t_0}^{t_k} P(x(t), y(t), z(t))\cdot x'(t)\cdot dt$. Аналогично доказываются формулы для интегралов по другим координатам. Окончательно

$$\int\limits_L P(x,y,z)\cdot dx + Q(x,y,z)\cdot dy + R(x,y,z)\cdot dz =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_k} \left[P(x(t), y(t), z(t))\cdot x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\cdot y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))\cdot z'(t)\right]dt.$$

Таким образом, вычисление криволинейного интеграла второго рода ни чем не отличается от вычисления интеграла первого и сводится к интегрированию по параметру. **Направление интегрирования определяется условиями задачи.**

Примеры. 1. Найти $\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} ydx - xdy + zdz$, где $\overset{\cup}{AB}$ - виток винтовой линии $x=a\cdot\cos t$, $y=a\cdot\sin t$, $z=a\cdot t$, $0 \le t \le 2\pi$.

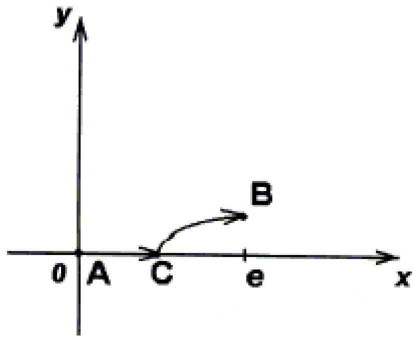
Решение:

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} ydx - xdy + zdz = \int\limits_0^{2\pi}(a\sin t\cdot(-a\sin t) - a\cos t\cdot a\cos t + at\cdot a)dt = a^2\int\limits_0^{2\pi}(t-1)dt = 2a^2(\pi^2 - \pi)$$

Пусть плоская кривая задана в декартовой системе координат уравнением $y=y(x)$, $A(a,y(a))$, $B(b,y(b))$. Тогда

$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x))dx\,.$$

Пример 2. Найти $\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} (x+y)dx + y^2dy$ по кривой $\begin{cases} y = 0, 0 \le x \le 1 \\ y = \ln x, 1 \le x \le e \end{cases}$.



Решение: Пользуясь свойством аддитивности, разобьем интеграл на сумму двух:

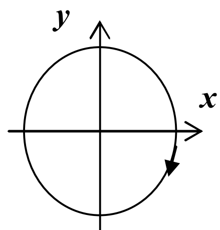
$$\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} (x+y)dx + y^2dy = \int\limits_{\overset{\cup}{AC}} (x+y)dx + y^2dy + \int\limits_{\overset{\cup}{CB}} (x+y)dx + y^2dy =$$

$$= \int\limits_0^1 (x+o)dx + \int\limits_1^e \left(x + \ln x + \ln^2 x\cdot\frac{1}{x}\right)dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 + \left(\frac{x^2}{2} + x\ln x - x + \right.$$

$$\left.+\frac{\ln^3 x}{3}\right)\Bigg|_1^e = \frac{e^2}{2} + \frac{4}{3}.$$

Пример 3. Найти $\oint\limits_c x(1-y)dx + xdy$, где C - окружность, проходимая в отрицательном направлении (по часовой стрелке).

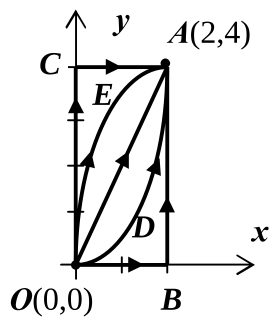
Решение: Параметризуем окружность $x=2\cos t$, $y=2\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$. Движению по часовой стрелке соответствует уменьшение параметра t, поэтому интегрируем от 2π до 0:



$$\oint\limits_C x(1-y)dx + xdy = \int\limits_{2\pi}^{0} (2\cos t(1-2\sin t)(-2\sin t) + 2\cos t \cdot 2\cos t)dt = \int\limits_{2\pi}^{0} (-4\cos t\sin t +$$

$$+8\cos t \cdot \sin^2 t + 4\cos^2 t)dt = \left.(-2\sin^2 t + \frac{8}{3}\sin^3 t + 2t + \sin 2t)\right|_{2\pi}^{0} = -4\pi.$$

Пример 4. Вычислить $\int\limits_L 2xydx + (x^2+y^2)dy$ по каждому из путей, соединяющих точки $O(0,0)$ и $A(2,4)$, и изображённых на рисунке справа:



1. Ломаная OBA, состоящая из прямолинейных отрезков;
2. Ломаная OCA;
3. Прямолинейный отрезок OA;

4-5. Параболы ODA и OEA, симметричные относительно координатных осей.

Решение. 1. $\int\limits_{OBA} 2xydx + (x^2+y^2)dy = \int\limits_{OB} 2xydx + (x^2+y^2)dy + \int\limits_{BA} 2xydx + (x^2+y^2)dy$ (по свойству аддитивности). На OB в качестве параметра естественно выбрать переменную x, при этом $y=0, dy=0$, поэтому $\int\limits_{OB} 2xydx + (x^2+y^2)dy = 0$. На BA $x=2, dx=0, 0\le y\le 4$, поэтому $\int\limits_{BA} 2xydx + (x^2+y^2)dy = \int\limits_0^4 \left(2^2+y^2\right)dy = \left.\left(4y+\frac{y^3}{3}\right)\right|_0^4 = 37\frac{1}{3}$. Окончательно, $I_1 = \int\limits_{OBA} 2xydx + (x^2+y^2)dy = 37\frac{1}{3}$.

2. $\int\limits_{OCA} 2xydx + (x^2+y^2)dy = \int\limits_{OC} 2xydx + (x^2+y^2)dy + \int\limits_{CA} 2xydx + (x^2+y^2)dy$.

$$\int\limits_{OC} 2xydx + (x^2+y^2)dy = \left|x=0, dx=0, 0\le y\le 4\right| = \int\limits_0^4 y^2dy = \frac{64}{3} = 21\frac{1}{3}.$$

$\int\limits_{CA} 2xydx + (x^2+y^2)dy = \left|y=4, dy=0, 0\le x\le 2\right| = \int\limits_0^2 8xdx = 16$. Окончательно,

$$I_2 = \int\limits_{OCC} 2xydx + (x^2+y^2)dy = 37\frac{1}{3}.$$

3. На прямолинейном отрезке OA $y=2x$, поэтому

$$\int\limits_{OA} 2xydx + (x^2+y^2)dy = \int\limits_0^2 \left(2x\cdot 2x\cdot 1 + (x^2+4x^2)\cdot 2\right)dx = \int\limits_0^2 14x^2dx = \frac{112}{3} = 37\frac{1}{3}.$$

4. Уравнение параболы OEA имеет вид $x = ky^2$, значение коэффициента k найдём, подставляя в это уравнение координаты точки A: $2 = k4^2 \Rightarrow k = 1/8 \Rightarrow x = y^2/8, x'_y = y/4$, поэтому

$$\int\limits_{OEA} 2xydx + (x^2+y^2)dy = \int\limits_0^4 \left[\left(2\cdot\frac{y^2}{8}\cdot y\right)\cdot\frac{y}{4} + \left(\frac{y^4}{64}+y^2\right)\right]dy = \int\limits_0^4 \left(\frac{5y^4}{64}+y^2\right)dy = 37\frac{1}{3}.$$

5. Совершенно также убеждаемся, что интеграл по параболе ODA имеет то же значение.

Закономерен вопрос: для любого ли интеграла и любых начальной и конечной точек значение интеграла не зависит от формы пути, соединяющего эти точки? Убедимся в том, что это не так, на примере интеграла $\int\limits_L 2xydx-(x^2+y^2)dy$: $I_1=\int\limits_{OBA} 2xydx-(x^2+y^2)dy=-\int\limits_0^4(2^2+y^2)dy=-37\frac{1}{3}$;

$I_2=\int\limits_{OCA} 2xydx+(x^2-y^2)dy=\int\limits_0^4 y^2dy-\int\limits_0^2 8xdx=\frac{64}{3}-16=5\frac{1}{3}\neq I_1$.

Следующие разделы будут посвящены ответу на поставленный вопрос: при каких условиях криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_C Pdx+Qdy$ не зависит от формы пути, соединяющего начальную и конечную точки, и определяется только этими точками? В трёхмерном случае этот вопрос будет изучаться в теории поля.

16.3.3.4. Формула Грина.

16.3.3.4.1. Связность, односвязность, многосвязность. Напомним определения ряда понятий из теории функций нескольких переменных, которыми нам придется пользоваться.

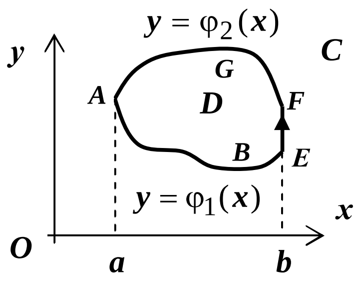
Множество точек (на прямой, на плоскости, в пространстве) называется **связным**, если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей этому множеству.

Область (на плоскости, в пространстве) называется **односвязной**, если любой замкнутый контур, лежащий в этой области, можно непрерывной деформацией стянуть в точку, не выходя при этом за пределы области.

Примеры: односвязны шар, параллелепипед и вообще любой выпуклый объём в пространстве. Односвязен шаровой слой, заключённый между двумя сферами. Пример неодносвязной области: тор. Все пространство односвязно и остаётся односвязным, если из него удалить точку или отрезок. Если же удалить из пространства прямую, оно потеряет свойство односвязности: окружность, охватывающую эту прямую, не удастся стянуть в точку, не пересекая прямую.

Кусочно-гладкая граница ограниченной односвязной области всегда связна, следовательно, является контуром.

16.3.3.4.2. Теорема Грина для односвязной области. Пусть на плоскости Oxy задана односвязная область D, ограниченная кусочно-гладким контуром C. На множестве $\overline{D}=D\cup C$ определены непрерывные функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, имеющие непрерывные частные производные. Тогда $\oint\limits_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$, при этом контур C обходится так, что область D остаётся слева.



Док-во. 1. Пусть D - простая область. Докажем сначала, что $\oint\limits_C P(x,y)dy=-\iint\limits_D\frac{\partial P}{\partial y}dxdy$. Опишем D неравенствами

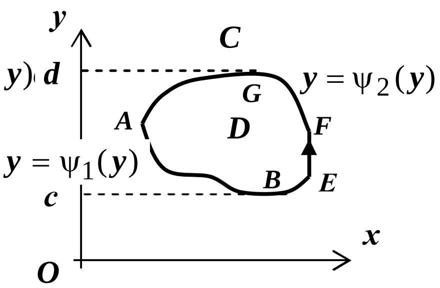
$D:\begin{cases}a\le x\le b,\\ \varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x).\end{cases}$ Тогда

$$-\iint\limits_D\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=-\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_x(x)}\frac{\partial P}{\partial y}dy=-\int\limits_a^b P(x,y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}dx=-\int\limits_a^b P(x,\varphi_2(x))dx-$$

$$+\int\limits_a^b P(x,\varphi_1(x))dx=\int\limits_a^b P(x,\varphi_1(x))dx-\int\limits_b^a P(x,\varphi_2(x))dx=\int\limits_{\overset{\smile}{ABE}}P(x,y)dx+\ +\int\limits_{\overset{\smile}{FGA}}P(x,y)dx.$$ Если контур включает вертикальные участки, такие как EF, то на этих участках $dx=0$, поэтому $\int\limits_{\overset{\smile}{EF}}P(x,y)dx=0$, и

$$-\iint\limits_D\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\int\limits_{\overset{\smile}{ABE}}P(x,y)dx+\int\limits_{\overset{\smile}{EF}}P(x,y)dx+\int\limits_{\overset{\smile}{FGA}}P(x,y)dx=\oint\limits_C P(x,y)$$

, что и требовалось доказать.

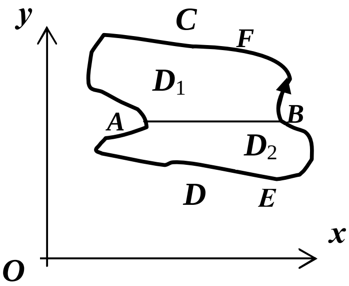


Равенство $\oint\limits_{C} Q(x,y)dy = \iint\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$ доказывается точно также:

$$\iint\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int\limits_{c}^{d} dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int\limits_{c}^{d} Q(x,y)\Big|_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dy =$$

$= \int\limits_{c}^{d} Q(\psi_2(y),y)dy - \int\limits_{c}^{d} Q(\psi_1(y),y)dy = \int\limits_{\overset{\cup}{BEFG}} Q(x,y)dy + + \int\limits_{\overset{\cup}{GAC}} Q(x,y)dy = \oint\limits_{C} Q(x,y)dy$. Суммируя равенства $\oint\limits_{C} P(x,y)dy = -\iint\limits_{D} \frac{\partial P}{\partial y} dxdy$ и $\oint\limits_{C} Q(x,y)dy = \iint\limits_{D} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy$, получим одну из важнейших формул анализа -формулу Грина

$$\oint\limits_{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$



2. Пусть теперь D - произвольная, не обязательно простая, область. Разобьём её на простые части. Пусть это разбиение производится отрезком AB, и пусть подобласти D_1 и D_2 - результат разбиения. Для этих подобластей формула Грина доказана:

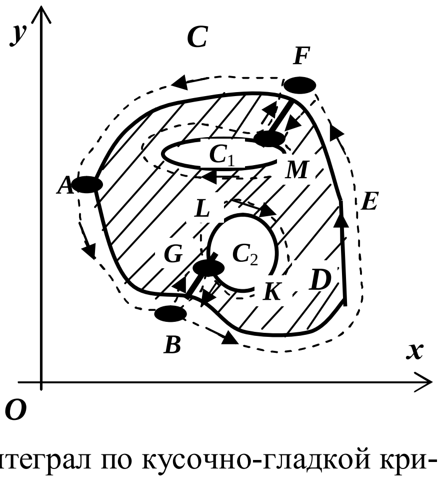
$\oint\limits_{ABFA} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$ и

$\oint\limits_{AEBA} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$. По свойству аддитивности

$\oint\limits_{ABFA} Pdx + Qdy = \oint\limits_{AB} Pdx + Qdy + \oint\limits_{BFA} Pdx + Qdy$, $\oint\limits_{AEBA} Pdx + Qdy = \oint\limits_{AEB} Pdx + Qdy + \oint\limits_{BA} Pdx + Qdy =$

$= \oint\limits_{AEB} Pdx + Qdy - \oint\limits_{AB} Pdx + Qdy$. Суммируя эти выражения, убеждаемся, что криволинейные интегралы по отрезкам AB и BA взаимно уничтожаются, а сумма интегралов по кривым BFA и AEB даёт интеграл по контуру C, т.е. формула Грина верна и для области, не являющейся простой. Доказательство остаётся справедливым и в случае, когда разбиение производится добавлением большего числа, чем одна, кривых.

16.3.3.4.3. Теорема Грина для многосвязной области. Пусть теперь D многосвязная на плоскости Oxy. Граница многосвязной области состоит из нескольких связных частей, не имеющих общих точек. Рассмотрим случай, когда граница области D (на рисунке область заштрихована) состоит из внешнего контура C и внутренних контуров C_1 и C_2. Соединим контур C разрезом FM с контуром C_1, разрезом BG - с контуром C_2. (Под словами "соединим разрезом BG " подразумевается то, что мы удалим из D отрезок BG). Область $D' = D \setminus (BG \cup FM)$ с границей

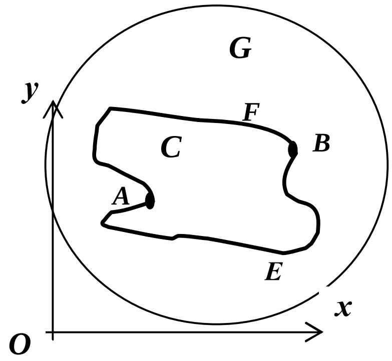


$\Gamma' = \overset{\cup}{AB} \cup BG \cup (C_2 = \overset{\cup}{GLKG}) \cup GB \cup \overset{\cup}{BF} \cup FM \cup C_1 \cup MF \cup \overset{\cup}{MA}$ односвязна, поэтому для неё справедлива формула Грина:

$\oint\limits_{\Gamma'} Pdx + Qdy = \iint\limits_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$. Двойные интегралы по областям D и D' равны (площадь разрезов равна нулю); в криволинейный интеграл по кусочно-гладкой кривой Γ' интегралы по разрезам входят с противоположными знаками ($\int\limits_{BG} Pdx + Qdy$ и $\int\limits_{GB} Pdx + Qdy$, например) и поэтому взаимно уничтожаются, поэтому оказывается справедлива **теорема Грина для многосвязной области:** пусть на плоскости Oxy дана многосвязная область D с границей Γ. На множестве $\overline{D} = D \cup \Gamma$ определены непрерывные функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, имеющие непрерывные частные производные. Тогда $\oint\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$, при этом каждая часть полной границы Γ обходится так, что область D остаётся слева.

16.3.3.5. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. В этом разделе будет дан ответ на вопрос: при каких условиях криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} Pdx + Qdy$ не зависит от формы пути, соединяющего точки A и B, а определяется только этими точками? Будем предполагать, что в некоторой односвязной области G на плоскости заданы непрерывно дифференцируемые функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, и все рассматриваемые точки, контуры и области принадлежат этой области.

16.3.3.5.1. Теорема 1. Для того, чтобы интеграл $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} Pdx + Qdy$ не зависел от формы пути, соединяющего точки A и B, необходимо и достаточно, чтобы интеграл по любому замкнутому контуру был равен нулю.



Доказательство. Необходимость. Пусть $C = \overset{\smile}{AEBFA}$ - произвольный замкнутый контур, лежащий в области G, A и B - произвольные точки этого контура. Так как, по условию,

$$\int\limits_{\overset{\smile}{AEB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{\overset{\smile}{AFB}} Pdx + Qdy, \text{ то } \int\limits_{\overset{\smile}{AEB}} Pdx + Qdy = -\int\limits_{\overset{\smile}{BFA}} Pdx + Qdy \Rightarrow \int\limits_{\overset{\smile}{AEB}} Pdx + Qdy + \int\limits_{\overset{\smile}{BFA}} Pdx + Qdy = 0 \Rightarrow \oint\limits_{C} Pdx + Qdy = 0.$$

Достаточность. Пусть для любого контура $C \subset G$ выполняется $\oint\limits_{C} Pdx + Qdy = 0$. Пусть $\forall A \in G$, $\forall B \in G$ - произвольные точки, $\overset{\smile}{AEB}$ и $\overset{\smile}{AFB}$ - две различных кривых, соединяющих эти точки. $\overset{\smile}{AEBFA}$ - замкнутый контур, поэтому

$$\oint\limits_{\overset{\smile}{AEBFA}} Pdx + Qdy = 0 \Rightarrow \oint\limits_{\overset{\smile}{AEB}} Pdx + Qdy + \oint\limits_{\overset{\smile}{BFA}} Pdx + Qdy = 0 \Rightarrow \oint\limits_{\overset{\smile}{AEB}} Pdx + Qdy - \oint\limits_{\overset{\smile}{AFB}} Pdx + Qdy = 0 \Rightarrow \int\limits_{\overset{\smile}{AEB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{\overset{\smile}{AFB}} Pdx + Qdy,$$

что и требовалось доказать.

16.3.3.5.2. Теорема 2. Для того, чтобы интеграл $\oint\limits_{C} Pdx + Qdy$ по любому контуру C был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы функции P, Q и их частные производные были непрерывны, и выполнялось условие $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Доказательство. Необходимость. От противного. Пусть для $\forall C \subset G$ выполняется $\oint\limits_{C} Pdx + Qdy = 0$, но существует точка $M_0 \in G$ такая, что $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(M_0) \neq 0$. Предположим для определённости, что $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)(M_0) = s > 0$. Так как разность $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывна, существует окрестность точки M_0 такая, что $\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) > s/2$. Выберем контур C, целиком лежащий в этой окрестности. Если D - область ограниченная этим контуром, то, по формуле Грина,

$\oint\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$. Но, по теореме об интегрировании неравенств, $\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy > \frac{s}{2}\cdot S(D) > 0$ ($S(D)$ - площадь области D), т.е. $\oint\limits_C Pdx + Qdy > 0$, что противоречит условиям теоремы. Следовательно, в любой точке $M_0 \in G$ выполняется условие $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Достаточность. Если в любой точке $M_0 \in G$ выполняется условие $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, то для любого контура C $\oint\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = 0$ (D - область ограниченная контуром C).

Таким образом, для того, чтобы криволинейный интеграл $\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} Pdx + Qdy$ не зависел от формы пути, соединяющего начальную и конечную точки (или, что то же самое, интеграл по любому замкнутому контуру был равен нулю), требуется выполнение двух условий:

1. Контур и ограниченная им область лежат в некоторой односвязной области, в которой
2. P, Q и их частные производные непрерывны , и $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Отметим существенность первого условия. Так, для интеграла $\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$ второе условие выполняется: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$, в то же время интеграл по окружности радиуса R не равен нулю: $\int\limits_{x^2+y^2=R^2} \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = \left| \begin{array}{c} x = R\cos t,\ y = R\sin t \\ 0 \le t \le 2\pi \end{array} \right| = -\int\limits_0^{2\pi}\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)dt = -2\pi$. Причина - функции P и Q непрерывны всюду, кроме начала координат; удаление точки из плоскости лишает её свойства односвязности.

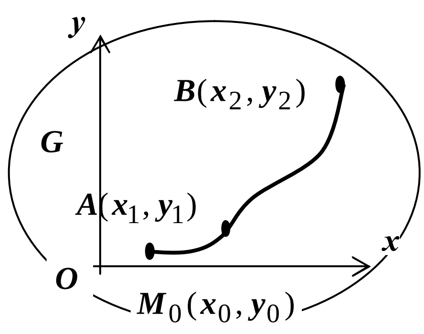
16.3.3.6. Вычисление криволинейного интеграла второго рода в случае, когда выполняются условия независимости от формы пути.

Если выполнены условия независимости от формы пути, соединяющего начальную $A(x_1, y_1)$ и конечную $B(x_2, y_2)$ точки кривой, то значение интеграла $\int\limits_{\overset{\cup}{AB}} Pdx + Qdy$ определяется только точками A и B. Поэтому в этом случае для обозначения интеграла применяется обозначение $\int\limits_A^B Pdx + Qdy$ или $\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} Pdx + Qdy$. Докажем следующую теорему.

Теорема. Если в односвязной области G выполнено условие $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, то существует функция $u(x, y)$ такая, что для любых точек $A(x_1, y_1) \in G$ и $B(x_2, y_2) \in G$

$$\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} Pdx + Qdy = u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1).$$

Функцию $u(x, y)$ принято называть потенциальной функцией.



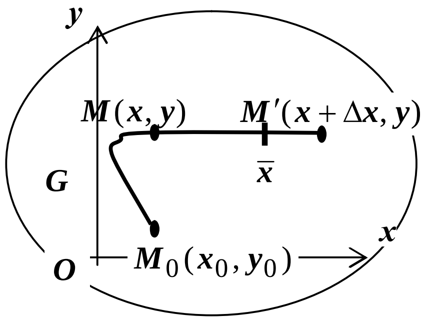
Доказательство. Фиксируем произвольную точку $M_0(x_0, y_0) \in G$, и докажем, что в качестве искомой функции $u(x, y)$ можно взять $u(x, y) = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Pdx + Qdy$. Действительно, по свойству аддитивности $\int\limits_{\overset{\cup}{M_0AB}} Pdx + Qdy = \int\limits_{\overset{\cup}{M_0A}} Pdx + Qdy + \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} Pdx + Qdy \Rightarrow \int\limits_{\overset{\cup}{AB}} Pdx + Qdy =$

$= \int\limits_{\overset{\cup}{M_0AB}} Pdx + Qdy - \int\limits_{\overset{\cup}{M_0A}} Pdx + Qdy$, или $\int\limits_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} Pdx + Qdy = \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_2, y_2)} Pdx + Qdy - \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} Pdx + Qdy$, т.е.

$\int\limits_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} Pdx + Qdy = u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1)$, что и требовалось доказать.

Разность $u(x_2, y_2) - u(x_1, y_1)$ обозначается символом $u(x, y)\Big|_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)}$ или $u(x, y)\Big|_A^B$. Формула $\int\limits_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)} Pdx + Qdy = u(x, y)\Big|_{(x_1, y_1)}^{(x_2, y_2)}$ является аналогом формулы Ньютона-Лейбница для двухмерного случая; ещё раз отметим, что она имеет место в случае, когда выполняются условия независимости интеграла от формы пути.

Докажем, что для построенной функции $u(x, y)$ выполняются следующие соотношения: $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$. Действительно, пусть $M(x, y) \in G$, $M'(x + \Delta x, y) \in G$. Тогда $u(M) = \int\limits_{\overset{\cup}{M_0M}} Pdx + Qdy$,



$u(M') = \int\limits_{\overset{\cup}{M_0MM'}} Pdx + Qdy = \int\limits_{\overset{\cup}{M_0M}} Pdx + Qdy + \int\limits_{\overset{\cup}{MM'}} Pdx + Qdy \Rightarrow$

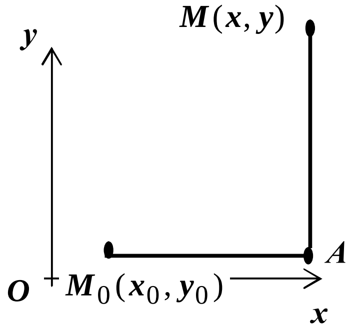
$u(x + \Delta x, y) = u(x, y) + \int\limits_{x}^{x + \Delta x} P(x, y)dx$ (на MM' $y = \text{const}$)

$\Rightarrow \Delta_x u(x, y) = u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = = \int\limits_{x}^{x + \Delta x} P(x, y)dx = P(\bar{x}, y) \cdot \Delta x$ (по теореме о среднем)

$\Rightarrow \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = P(\bar{x}, y)$. Точка $\bar{x}$ удовлетворяет условиям $x < \bar{x} < x + \Delta x$. Устремим $\Delta x \to 0$, тогда $\bar{x} \to x$, и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim\limits_{\bar{x} \to x} P(\bar{x}, y) = P(x, y)$.

Аналогично доказывается, что $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$.

Условие $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ теперь означает просто, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$. Кроме того, из $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y)$, $\frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$, следует, что подынтегральное выражение $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy = du$ является полным дифференциалом функции $u(x, y)$ (условие $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ есть условие того, что обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ - уравнение в полных дифференциалах). Для отыскания потенциальной функции $u(x, y)$ можно: 1. Решить уравнение в полных дифференциалах; 2. Построить $u(x, y)$



напрямую по формуле $u(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy$. В качестве пути интегрирования обычно берётся путь M_0AM, состоящий из отрезков, параллельных координатным осям.
Тогда на M_0A $y=y_0$, $dy=0$, $x_0\le x$(как переменная интегрирования)$\le x_M$; на AM $x=x_M$; $dx=0$, $y_0\le y$(как переменная интегрирования)$\le y_M$.

Продемонстрируем оба метода на примере 4 раздела **16.3.3.3:** $\int\limits_L 2xydx+(x^2+y^2)dy$. Здесь $P=2xy,\ \frac{\partial P}{\partial y}=2x,\ Q=x^2+y^2,\ \frac{\partial Q}{\partial y}=2x=\frac{\partial P}{\partial y}$, т.е. условия независимости выполняются. В качестве точки M_0 берём начало координат $M_0(0{,}0)$.

1. Решаем систему уравнений $\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=2xy,\\ \frac{\partial u}{\partial y}=x^2+y^2.\end{cases}$ Из первого уравнения $u(x,y)=\int\limits_0^x 2xydx=x^2y+\varphi(y)$, подставляем эту функцию во второе уравнение $\frac{\partial u}{\partial y}=x^2+\varphi'(y)=x^2+y^2\Rightarrow\varphi'(y)=y^2\Rightarrow\varphi(y)=y^3/3+C\Rightarrow u(x,y)=x^2y+\frac{x^3}{3}+C$ (потенциал всегда определяется с точностью до произвольной постоянной, физический смысл имеет разность потенциалов в двух точках, которая не зависит от этой постоянной).

2. $u(x,y)=\int\limits_0^x 2x\cdot 0\cdot dx+\int\limits_0^y\left(x^2+y^2\right)dy=x^2y+\frac{y^3}{3}+C$.

Теперь, когда потенциальная функция определена, легко находится любой интеграл:

$$\int\limits_{(0,0)}^{(2,4)} 2xydx+(x^2+y^2)dy=\left.\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\right|_{(0,0)}^{(2,4)}=16+\frac{64}{3}-0=37\frac{1}{3}.$$

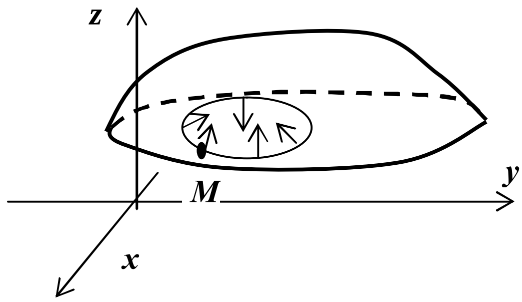
16.3.3.7. Выражение площади плоской области через криволинейный интеграл. Из формулы Грина $\oint\limits_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\iint\limits_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$ следует неожиданный результат: если функции P и Q удовлетворяют условию $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1$, то $\oint\limits_C P(x,y)dx+Q(x,y)dy=S(D)$ ($S(D)$ - площадь области D). Таким образом, площадь области можно выразить через криволинейный интеграл второго рода по границе этой области. В качестве функций P и Q можно взять любые непрерывно дифференцируемые функции, такие что $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1$, например, $P=0,Q=x$; $P=-y,Q=0$; $P=-\frac{y}{2},Q=\frac{x}{2}$; $P=2xy,Q=x^2+y^2+x$ и т.д. В результате $S(D)=\oint\limits_C xdy=-\oint\limits_C ydx=\frac{1}{2}\oint\limits_C xdy-ydx$ и т.д. При этом контур C (граница области D) обходится в положительном направлении. Чаще всего применяется третья из этих формул. Для примера найдём площадь, ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Параметрические уравнения эллипса $x=a\cos t,\ y=b\sin t$, поэтому $S(D)=\frac{1}{2}\oint\limits_C xdy-ydx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi}ab(\cos^2 t+\sin^2 t)dt=\pi ab$; это, видимо, самый простой способ вычисления площади эллиптической области.

16.4. Поверхностные интегралы.

16.4.1. Односторонние и двусторонние поверхности. Ориентация поверхности. Поверхность может быть односторонней и двусторонней. Простой пример модели односторонней поверхности - лист Мёбиуса, который получается, если взять узкую длинную полоску бумаги и склеить её узкие торцы, перекрутив полоску один раз. В том, что у полученной поверхности одна сторона, можно убедиться, если начать закрашивать её в какой-нибудь цвет, не отрывая кисть от бумаги и не пересекая границ. В результате будет окрашен весь лист Мёбиуса. Мы будем рассматривать только двусторонние поверхности.

Поверхность называется **гладкой**, если в каждой её точке существует касательная плоскость, непрерывно меняющаяся вдоль поверхности. Поверхность называется **кусочно-гладкой**, если она состоит из нескольких гладких частей, примыкающим друг к другу по гладким или кусочно- гладким кривым. Так, плоскость - гладкая поверхность; поверхность куба - кусочно-гладка.

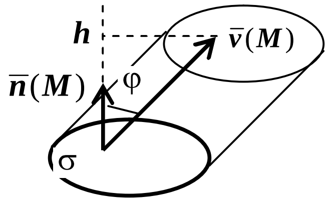
Дадим формальное определение односторонней и двусторонней поверхностей. Пусть дана гладкая поверхность σ, и на ней произвольно выбрана точка $\boldsymbol{M}$. Из двух возможных направлений нормали в этой точке выберем одно и зафиксируем его. Характеризовать это направление будем единичным вектором нормали $\overline{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{M})$. Возьмём замкнутый контур $\boldsymbol{C}$, проходящий через точку $\boldsymbol{M}$, целиком лежащий в σ и не пересекающий её границы, и будем двигаться по контуру, восстанавливая в каждой точке нормаль так, чтобы она непрерывно получалось из $\overline{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{M})$. Если для любого такого контура и любой точки М мы вернёмся в М с исходным направлением нормали, то поверхность σ называется **двусторонней**. Если хотя бы для одного контура мы вернёмся в исходную точку с противоположным направлением нормали, то поверхность называется **односторонней**.



Задать ориентацию поверхности (выбрать определённую сторону поверхности) означает выбрать в каждой точке σ один из двух возможных векторов нормали $\overline{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{M})$ так, чтобы он непрерывно менялся от точки к точке. Для этого достаточно определить нормаль $\overline{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{M}_0)$ в какой-либо одной точке $\boldsymbol{M}_0 \in \sigma$; во всех остальных точках $\boldsymbol{M}$ направления нормали $\overline{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{M})$ должны браться так, чтобы они получались непрерывным переносом из $\overline{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{M})$ вдоль какого-нибудь пути $\overset{\cup}{\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}}$. Согласно определению двусторонней поверхности, мы гарантированно придём в точку $\boldsymbol{M}$ с одним и тем же направлением нормали при любом пути $\overset{\cup}{\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}}$.

16.4.2. Поток жидкости через поверхность. Как и при изучении криволинейных интегралов, начнём с физической задачи. Пусть через объём $\boldsymbol{V}$ течёт поток жидкости, имеющий скорость $\overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M})$ в точке $\boldsymbol{M}$. Пусть в $\boldsymbol{V}$ размещена проницаемая (возможно, воображаемая) поверхность σ. Требуется найти количество Π жидкости, протекающей через σ за единицу времени. В дальнейшем мы будем называть это количество потоком через поверхность.

В случае, когда σ - ограниченная плоская область и $\overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M}) = \overline{\text{const}}$, решение очевидно. Это количество равно объёму, ограниченному цилиндрической поверхностью с основанием σ и боковой стороной $\overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M})$. Площадь основания объёма равна σ (этим символом мы обозначаем и поверхность, и её площадь), высота $\boldsymbol{h} = \text{пр}_{\overline{\boldsymbol{n}}}\overline{\boldsymbol{v}} = |\,\overline{\boldsymbol{v}}\,|\cos\varphi = \overline{\boldsymbol{v}} \cdot \overline{\boldsymbol{n}}$, т.е. равна скалярному произведению вектора скорости на единичный вектор нормали. Итак, $\Pi = \overline{\boldsymbol{v}}\overline{\boldsymbol{n}}\sigma$. Заметим, что изобразив на рисунке единичный вектор нормали, мы ввели на поверхности ориентацию. Так, применительно к рисунку справа, мы выбрали верхнюю сторону поверхности; если бы выбрали противоположную нормаль, поток изменил бы знак.

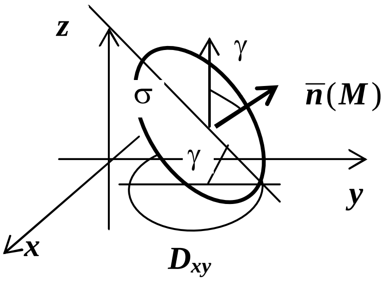


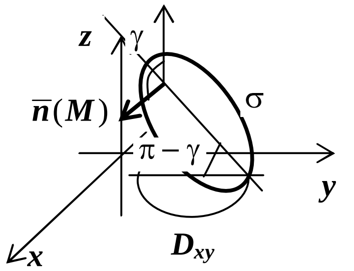
Возможны два способа представления этой величины.

1. Обозначив $\boldsymbol{f} = (\overline{\boldsymbol{v}} \cdot \overline{\boldsymbol{n}})$, получим $\Pi = \boldsymbol{f} \cdot \sigma$.

2. Если в некоторой координатной системе $\overline{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M})$ имеет координаты $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, единичный вектор $\overline{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{M})$ имеет координаты - направляющие косинусы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$, то

$\Pi = \bar{\boldsymbol{v}}\bar{\boldsymbol{n}}\sigma = (\boldsymbol{P}\cos\alpha + \boldsymbol{Q}\cos\beta + \boldsymbol{R}\cos\gamma)\sigma = \boldsymbol{P}(\cos\alpha\cdot\sigma) + \boldsymbol{Q}(\cos\beta\cdot\sigma) + \boldsymbol{R}(\cos\gamma\cdot\sigma)$. Чему равно произведение $\cos\gamma\cdot\sigma$? Произведение $|\cos\gamma|\cdot\sigma$ равно площади $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{D_{xy}})$ проекции $\boldsymbol{D_{xy}}$ поверхности σ на плоскость ***Oxy*** (площади всегда положительны). Следовательно, $\cos\gamma\cdot\sigma$ равно $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{D_{xy}})$, если $\cos\gamma \geq 0$ (или, что то же самое, угол γ - острый; проекция $\bar{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{M})$ на орт $\bar{\boldsymbol{k}}$ оси ***Oz*** положительна). Этот случай соответствует верхнему рисунка справа. Соответственно, $\cos\gamma\cdot\sigma$ равно $-\boldsymbol{s}(\boldsymbol{D_{xy}})$, если $\cos\gamma < 0$ (или, что то же самое, угол γ - тупой; проекция $\bar{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{M})$ на орт $\bar{\boldsymbol{k}}$ оси ***Oz*** отрицательна). Этот случай соответствует нижнему рисунку. Итак, можно записать $\boldsymbol{R}(\cos\gamma\cdot\sigma) = \pm\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{s}(\boldsymbol{D_{xy}})$.





Аналогично изложенному, $\boldsymbol{P}(\cos\alpha\cdot\sigma) = \pm\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{s}(\boldsymbol{D_{yz}})$, где следует взять знак "+", если угол α - острый, и "-", если этот угол тупой, и $\boldsymbol{Q}(\cos\beta\cdot\sigma) = \pm\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{s}(\boldsymbol{D_{xz}})$, где берётся знак "+", если угол β - острый, и "-", если этот угол тупой; $\boldsymbol{D_{yz}}$ - проекция σ на плоскость ***Oyz***, $\boldsymbol{D_{xz}}$ - - проекция σ на плоскость ***Oxz***. Окончательно,
$\Pi = \pm\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{s}(\boldsymbol{D_{yz}}) \pm \boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{s}(\boldsymbol{D_{xz}}) \pm \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{s}(\boldsymbol{D_{xy}})$.

Пусть теперь σ - произвольная гладкая ограниченная поверхность, и скорость $\bar{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M})$ может меняться от точки к точке. Чтобы свести этот случай к предыдущему, разобьём σ сетью кривых на $\boldsymbol{n}$ частей $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{\boldsymbol{i}}, \ldots \sigma_{\boldsymbol{n}}$, на каждой из частей $\sigma_{\boldsymbol{i}}$ выберем произвольную точку $\boldsymbol{M_i}$, и, считая, что $\sigma_{\boldsymbol{i}}$ - плоская область, скорость $\bar{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M})$ по $\sigma_{\boldsymbol{i}}$ постоянна и равна $\bar{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M_i})$ и что ориентация всей части $\sigma_{\boldsymbol{i}}$ характеризуется единичным нормальным вектором $\bar{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{M_i})$, получим, что через $\sigma_{\boldsymbol{i}}$ в единицу времени протекает $\Pi_{\boldsymbol{i}} = \bar{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M_i})\bar{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{M_i})\sigma_{\boldsymbol{i}}$ жидкости ($\boldsymbol{i} = 1,2,\ldots,\boldsymbol{n}$). Как мы видели, это выражение можно представить и в виде $\Pi_{\boldsymbol{i}} = \bar{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M_i})\bar{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{M_i})\sigma_{\boldsymbol{i}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{M_i})\sigma_{\boldsymbol{i}}$ (где $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{M_i}) = |\bar{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M_i})|\cdot\cos\varphi(\boldsymbol{M_i})$, $\varphi(\boldsymbol{M_i})$ - угол между $\bar{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{M_i})$ и $\bar{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M_i})$), и в виде
$\Pi_{\boldsymbol{i}} = \pm\boldsymbol{P}(\boldsymbol{M_i})\cdot\boldsymbol{s}(\boldsymbol{D_{i\,yz}}) \pm \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{M_i})\cdot\boldsymbol{s}(\boldsymbol{D_{i\,xz}}) \pm \boldsymbol{R}(\boldsymbol{M_i})\cdot\boldsymbol{s}(\boldsymbol{D_{i\,xy}})$. Суммируя эти выражения по всем $\boldsymbol{n}$ дугам, получим выражения двух интегральных сумм: $\sum\limits_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{M_i})\cdot\sigma_{\boldsymbol{i}}$ и

$\sum\limits_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \left[\pm\boldsymbol{P}(\boldsymbol{M_i})\cdot\boldsymbol{s}(\boldsymbol{D_{i\,yz}}) \pm \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{M_i})\cdot\boldsymbol{s}(\boldsymbol{D_{i\,xz}}) \pm \boldsymbol{R}(\boldsymbol{M_i})\cdot\boldsymbol{s}(\boldsymbol{D_{i\,xy}})\right]$. Переход к пределу в этих интегральных суммах при $\max\limits_{\boldsymbol{i}=1,2,\ldots\boldsymbol{n}} \operatorname{diam}(\sigma_{\boldsymbol{i}}) \to 0$ приведёт к двум поверхностным интегралам: $\iint\limits_{\sigma} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{M})\cdot\boldsymbol{d}\sigma$ и

$\iint\limits_{\sigma} \pm\boldsymbol{P}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{ds_{yz}} \pm \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{ds_{xz}} \pm \boldsymbol{R}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{ds_{xy}}$. Первый из этих интегралов называется поверхностным интегралом первого рода, или поверхностным интегралом по площади поверхности. Во втором интеграле элементы площади в координатных плоскостям принято записывать так, как мы это делали в двойном интеграле: $\boldsymbol{ds_{yz}} = \boldsymbol{dydz}$, $\boldsymbol{ds_{xz}} = \boldsymbol{dxdz}$, $\boldsymbol{ds_{xy}} = \boldsymbol{dxdy}$ и опускать знаки перед слагаемыми:

$\iint\limits_{\sigma} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{dydz} + \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{dxdz} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{M})\boldsymbol{dxdy}$; этот интеграл называется поверхностным интегралом второго рода, или поверхностным интегралом по координатам. Как и криволинейные интегралы двух родов, это разные объекты. Они имеют разные определения и разные свойства. В частности, поверхностный интеграл первого рода не зависит от ориентации поверхности, так как угол φ входит в подынтегральную функцию в явном виде, в то время как поверхностный интеграл второго рода меняет знак при изменении стороны поверхности (вектор $\bar{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{M})$ меняется на $-\bar{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{M})$).

Перейдём к формальным определениям.

16.4.3. Поверхностный интеграл первого рода (по площади поверхности).

16.4.3.1. Определение поверхностного интеграла первого рода. Пусть в пространстве переменных ***x,y,z*** задана кусочно-гладкая поверхность σ, на которой определена функция ***f***(***x***,***y***,***z***). Разобьём поверхность на n частей $\sigma_1, \sigma_2, \dots \sigma_i, \dots \sigma_n$, на каждой из частей σ_i выберем произвольную точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$, найдём $f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i)$ и площадь части σ_i (которую будем обозначать тем же символом σ_i), и составим интегральную сумму $\sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \sigma_i$. Если существует предел последовательности интегральных сумм при $\max\limits_{i=1,2,\dots n} \operatorname{diam} \sigma_i \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения поверхности σ на части σ_i $(i = 1,2,\dots,n)$, ни от выбора точек M_i, то функция $f(x,y,z)$ называется интегрируемой по поверхности σ, а значение этого предела называется поверхностным интегралом первого рода, или поверхностным интегралом по площади поверхности, и обозначается $\iint\limits_{\sigma} f(M) \cdot d\sigma$.

Теорема существования. Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна на поверхности σ, то она интегрируема по этой поверхности.

16.4.3.2. Свойства поверхностного интеграла первого рода. Для этого интеграла имеют место основные шесть свойств, справедливых для определённого, двойного, тройного интеграла, от **линейности** до **теоремы о среднем**. Сформулировать и доказать их **самостоятельно**. Седьмое, персональное, свойство - **независимость поверхностного интеграла первого рода от выбора стороны поверхности.**

16.4.3.3. Вычисление поверхностного интеграла первого рода.

16.4.3.3.1. Определение единичного вектора нормали к поверхности. Выражения для элемента площади поверхности. Предположим, что поверхность σ задаётся неявным уравнением $\Phi(x,y,z) = 0$ ($\Phi(x,y,z)$ - непрерывно дифференцируемая функция) и взаимно однозначно проецируется в область D_{xy} на плоскости Oxy. Из теории функций нескольких переменных известно, что градиент функции ортогонален поверхности уровня этой функции, проходящей через точку, в которой найден градиент. Рассматривая уравнение $\Phi(x,y,z) = 0$ как уравнение поверхности уровня функции трёх переменных $\Phi(x,y,z)$, получаем, что в каждой точке поверхности σ $\operatorname{grad}\Phi(x,y,z)$ ортогонален σ, т.е. является нормальным к σ вектором. Чтобы получить единичный нормальный вектор, достаточно просто пронормировать $\operatorname{grad}\Phi(x,y,z)$: $\bar{n} = \pm \dfrac{\operatorname{grad}\Phi(x,y,z)}{|\operatorname{grad}\Phi(x,y,z)|}$, где знак перед дробью соответствует возможности выбора двух возможных взаимно противоположных направлений нормали. В координатной форме $\bar{n} = \pm \dfrac{\frac{\partial \Phi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\bar{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}}$, где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ - базисные орты.

Если сравнить это выражение с представлением градиента через направляющие косинусы:

$\bar{n} = \cos\alpha \bar{i} + \cos\beta \bar{j} + \cos\gamma \bar{k}$, то $|\cos\alpha| = \dfrac{\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}}$,

$|\cos\beta| = \dfrac{\left|\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}}$, $|\cos\gamma| = \dfrac{\left|\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|}{\sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}}$. Теперь мы можем выразить элемент площади поверхности через элемент площади в каждой координатной плоскости:

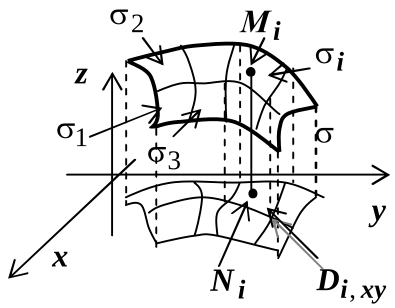
$$d\sigma = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \frac{dxdy}{\left|\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}, \quad d\sigma = \frac{dxdz}{|\cos\beta|} = \frac{dxdz}{\left|\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2},$$

$$d\sigma = \frac{dydz}{|\cos\alpha|} = \frac{dydz}{\left|\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|} \cdot \sqrt{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}$$. В частном случае задания уравнения поверхности в явном виде $z = F(x, y)$ получим $z - F(x, y) = 0$, т.е. $\Phi(x, y, z) = z - F(x, y)$, $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}$,

$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial \Phi}{\partial z} = 1$, поэтому $\operatorname{grad}\Phi = -\frac{\partial F}{\partial x}\bar{i} - \frac{\partial F}{\partial y}\bar{j} + \bar{k}$, $|\operatorname{grad}\Phi| = \sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + 1}$,

$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2}}$, и $d\sigma = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2} \cdot dxdy$. Мы уже пользовались этой формулой при вычислении площади поверхности с помощью двойного интеграла.

16.4.3.3.2. Выражение поверхностного интеграла через двойной интеграл по проекции поверхности на координатную плоскость. Пусть поверхность σ взаимно однозначно проецируется в область D_{xy} на плоскости Oxy. Будем считать, что поверхность задана уравнением $z = F(x, y)$,



$(x, y) \in D_{xy}$. В интегральной сумме $\sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \sigma_i$ выразим площадь σ_i через двойной интеграл по её проекции $D_{i,xy}$ на плоскость Oxy:

$\sigma_i = \iint\limits_{D_{i,xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2} dxdy$. Применим к этому интегралу теорему о среднем: существует точка $N_i(x_i, y_i) \in D_{i,xy}$ такая, что

$\sigma_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2} (N_i) \cdot S(D_{i,xy})$. Значение подынтегральной функции $f(x, y, z)$ будем вычислять в точке $M_i(x_i, y_i, z_i)$, такой, что $z_i = F(x_i, y_i)$. Тогда

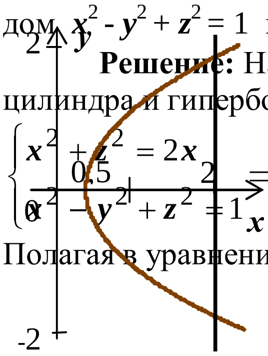
$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i) \cdot \sigma_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, F(x_i, y_i)) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2} ((x_i, y_i)) \cdot S(D_{i,xy}).$$

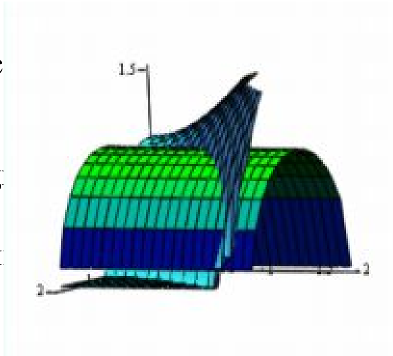
Слева стоит интегральная сумма для поверхностного интеграла, справа - для двойного; переход к пределу при $\max\limits_{i=1,2,\ldots n} \operatorname{diam}\sigma_i \to 0$ (при этом и $\max\limits_{i=1,2,\ldots n} \operatorname{diam} D_{i,xy} \to 0$) даёт

$$\iint\limits_{\sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} f(x, y, F(x, y)) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2} \cdot dxdy.$$

Эта формула и применяется для вычисления поверхностных интегралов. Естественно, в каждой задаче надо выбирать, на какую из координатных плоскостей предпочтительней проецировать поверхность; если проецирование не взаимно однозначно, поверхность разбивается на части, которые проецируются однозначно.

Примеры. 1. Найти $\iint\limits_{\sigma} \sqrt{\frac{x}{2x-1}} d\sigma$, где σ - часть цилиндра $x^2 + z^2 = 2x$, вырезаемая гиперболоидом $x^2 - y^2 + z^2 = 1$ и плоскостью $z = 0$ ($z > 0$).





Решение: Найдем проекцию поверхности σ на плоскость OXY. Ис цилиндра и гиперболоида переменную z:

$\begin{cases} x^2 + z^2 = 2x \\ x^2 - y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow 2x = y^2+1$ - уравнение проекции линии пересечения д

Полагая в уравнении цилиндра $z = 0$, получим уравнение линии пересечен

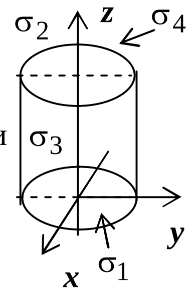
OXY. Таким образом, поверхность σ проецируется в область D, ограниченную параболой $x = \frac{1}{2}(y^2+1)$ и прямой x=2. Часть цилиндра, удовлетворяющая условию z>0, задается уравнением $z = \sqrt{2x - x^2}$.

Тогда $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{(1-x)^2}{2x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$. Таким образом,

$$\iint_\sigma \sqrt{\frac{x}{2x-1}}d\sigma = \iint_D \sqrt{\frac{x}{2x-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}dxdy = = 2\int_{1/2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x-1}\cdot\sqrt{2-x}} \cdot \int_0^{\sqrt{2x-1}} dy =$$

$$2\int_{1/2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = 4\sqrt{2-x}\Big|_2^{1/2} = 4\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

2. Найти $\iint_\sigma z|xy|d\sigma$, где σ - полная поверхность цилиндра $x^2+y^2 = 1$, $0 \le z \le 1$.



Решение: Искомый интеграл равен сумме трех интегралов: по нижнему и верхнему основаниям σ_1 и σ_2 и боковой поверхности (рис.18). Так как на нижнем основании z=0, то $\iint_{\sigma_1} z|xy|d\sigma$ =0. Для верхнего основания σ_2 имеем $z(x,y)$=1, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y}$ =0, поэтому поверхностный интеграл по σ_2 совпадает с двойным интегралом от функции $z(x,y)|xy| = |xy|$, взятым по кругу $D = \{x^2+y^2<1\}$:

$$\iint_{\sigma_2} z|xy|d\sigma = \iint_D |xy|dxdy = 4\int_0^{\pi/2} \cos\varphi\sin\varphi d\varphi \cdot \int_0^1 r^3 dr = 4\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\pi/2} \cdot \frac{r^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Найдем интеграл по боковой поверхности. Она состоит из двух частей: σ_3 и σ_4, симметричных относительно плоскости OYZ. Так как функция $z|xy|$ - четная по x, то интегралы по σ_3 и σ_4 равны.

Проекция σ_3 на плоскость OYZ - прямоугольник D:{$-1 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$}. Уравнение σ_3: $x=\sqrt{1-y^2}$,

$\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$. Отсюда: $\iint_{\sigma_3\cup\sigma_4} z|xy|d\sigma = 2\iint_D z|y|\sqrt{1-y^2}\frac{dydz}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^1 4zdz \cdot \int_0^1 ydy = 1.$

Окончательно получаем: $\iint_\sigma z|xy|d\sigma = 0 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$

3. Найти $\iint_\sigma x^2 d\sigma$, где σ - сфера $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Решение: Использование соображений симметрии позволяет иногда существенно упростить вычисление интегралов. Очевидно, что для сферы $\iint_\sigma x^2 d\sigma = \iint_\sigma y^2 d\sigma = \iint_\sigma z^2 d\sigma$. Тогда

$$\iint_\sigma x^2 d\sigma = \frac{1}{3}\iint_\sigma (x^2+y^2+z^2)d\sigma = \frac{1}{3}R^2\iint_\sigma d\sigma = \frac{4\pi R^4}{3}.$$

6.4.3.4. Механические и физические приложения поверхностного интеграла 1-го рода.

6.4.3.4.1. Масса поверхности. Пусть на поверхности σ распределена масса с поверхностной плотностью $\mu(x,y,z)$. Тогда масса m поверхности равна

$$m = \iint_\sigma \mu(x,y,z)d\sigma.$$

6.4.3.4.2. Статические моменты и центр масс. Статические моменты поверхности относительно координатных плоскостей OYZ, OXZ, OXY равны соответственно $M_{yz} = \iint_\sigma x\mu d\sigma$,

$M_{xz} = \iint_\sigma y\mu d\sigma$, $M_{xy} = \iint_\sigma z\mu d\sigma$.

Координаты центра масс поверхности σ равны $x_c=\dfrac{M_{yz}}{m}$, $y_c=\dfrac{M_{xz}}{m}$, $z_c=\dfrac{M_{xy}}{m}$.

6.4.3.4. 3. Моменты инерции. Момент инерции поверхности σ относительно прямой L равен $I_L=\iint\limits_{\sigma} r_L^2\mu d\sigma$, где $r_L=r_L(x,y,z)$ - расстояние от точки (x,y,z), лежащей на поверхности σ, до прямой L. В частности, моменты инерции относительно координатных осей OX, OY, OZ равны

$$I_x=\iint\limits_{\sigma}(y^2+z^2)\mu d\sigma,\; I_y=\iint\limits_{\sigma}(x^2+z^2)\mu d\sigma,\; I_z=\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2)\mu d\sigma.$$

Момент инерции относительно точки $P(x_0,y_0,z_0)$ равен

$$I_p=\iint\limits_{\sigma}((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2)\mu(x,y,z)d\sigma$$

Момент инерции относительно начала координат равен

$$I_0=\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2+z^2)\mu(x,y,z)d\sigma=\frac{1}{2}(I_x+I_y+I_z).$$

Пример. Найти координаты центра масс полусферы $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\le 0$, если поверхностная плотность в каждой точке сферы равна расстоянию от этой точки до оси OZ.

Решение: Масса полусферы σ равна

$$M=\iint\limits_{\sigma}\mu d\sigma=\iint\limits_{\sigma}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+((\sqrt{R^2-x^2-y^2})'_x)^2+((\sqrt{R^2-x^2-y^2})'_y)^2}dxdy=$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{R^2-x^2-y^2}}dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\frac{Rdxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=R\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R\frac{r^2dr}{\sqrt{R^2-r^2}}=$$

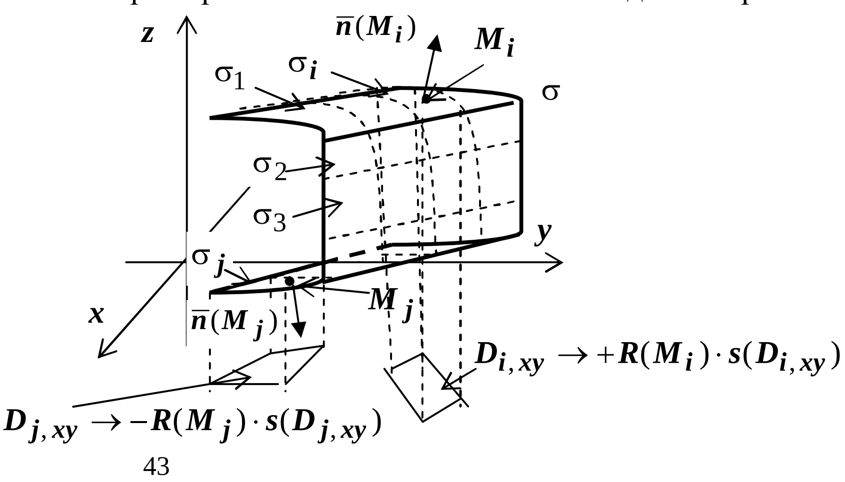
$$=2\pi R\int\limits_0^R\frac{r^2-R^2+R^2}{\sqrt{R^2-r^2}}dr=2\pi R\left(R^2\arcsin\frac{r}{R}\Big|_0^R-\int\limits_0^R\sqrt{R^2-r^2}dr\right)=\frac{\pi^2R^3}{2}.$$

(Мы воспользовались тем, что интеграл $\int\limits_0^R\sqrt{R^2-r^2}dr$ равен четверти площади круга радиуса R т.е. $\dfrac{\pi R^2}{4}$).

16.4. Поверхностные интегралы.

16.4.4. Поверхностный интеграл второго рода (по координатам).

16.4.4.1. Определение поверхностного интеграла второго рода. Пусть в пространстве переменных x,y,z задана ограниченная кусочно-гладкая двусторонняя поверхность σ, на которой введена ориентация (т.е. с помощью единичного вектора нормали в какой-либо точке σ задана сторона поверхности), и на которой определена функция $R(x,y,z)$. Разобьём поверхность на n частей $\sigma_1,\sigma_2,\ldots\sigma_i,\ldots\sigma_n$, на каждой из частей σ_i выберем произвольную точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$, найдём $R(M_i)=R(x_i,y_i,z_i)$, нормаль $\overline{n}(M_i)$ в точке M_i к выбранной стороне поверхности, и площадь $s(D_{i,xy})$ проекции части σ_i на плоскость OXY.



В интегральную сумму слагаемое $R(M_i)\cdot s(D_{i,xy})$ возьмём со знаком "+", если $\cos\gamma \geq 0$ (т.е. если угол γ между $\overline{n}(M_i)$ и осью Oz - острый; проекция $\overline{n}(M)$ на орт $\overline{k}$ оси Oz положительна), и со знаком "-", если $\cos\gamma < 0$. В результате интегральная сумма будет иметь вид $\sum_{i=1}^{n} \pm R(M_i)\cdot s(D_{i,xy})$. Если существует предел последовательности интегральных сумм при $\max\limits_{i=1,2,\dots n} \operatorname{diam}\sigma_i \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения поверхности σ на части σ_i $(i = 1,2,\dots,n)$, ни от выбора точек M_i, то функция $R(x,y,z)$ называется интегрируемой по поверхности σ, а значение этого предела называется поверхностным интегралом второго рода, или поверхностным интегралом по координатам x,y, и обозначается $\iint\limits_{\sigma} R(M)\cdot dxdy$.

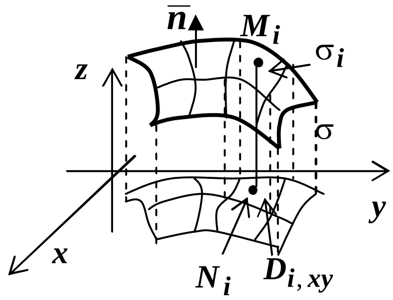
Теорема существования. Если функция $R(x,y,z)$ непрерывна на поверхности σ, то она интегрируема по этой поверхности.

Если на поверхности σ, вместе с функцией $R(x,y,z)$, определены функции $P(x,y,z)$ и $Q(x,y,z)$, то, так же, как и интеграл $\iint\limits_{\sigma} R(M)\cdot dxdy$, определяются интегралы $\iint\limits_{\sigma} P(M)\cdot dydz$ и $\iint\limits_{\sigma} Q(M)\cdot dxdz$; в приложениях, как мы видели из рассмотренной в начале раздела физической задачи, обычно рассматривается сумма этих интегралов, которая обозначается

$$\iint\limits_{\sigma} P(M)\cdot dydz + Q(M)\cdot dxdz + R(M)\cdot dxdy.$$

16.4.4.2. Свойства поверхностного интеграла второго рода. Для этого интеграла, как и для криволинейного интеграла второго рода, имеет смысл формулировать следующие свойства: **линейность, аддитивность и зависимость поверхностного интеграла от выбора стороны поверхности: при изменении ориентации поверхности интеграл меняет знак.**

16.4.4.3. Вычисление поверхностного интеграла второго рода. Пусть поверхность σ взаимно однозначно проецируется в область D_{xy} на плоскости Oxy. В этом случае $\cos\gamma$ имеет одинаковый знак во всех точках поверхности. Именно, $\cos\gamma > 0$, если рассматривается верхняя сторона поверхности, и $\cos\gamma < 0$, если рассматривается нижняя сторона. Поэтому для верхней стороны все слагаемые в интегральной сумме должны браться со знаком "+", и сумма будет иметь вид



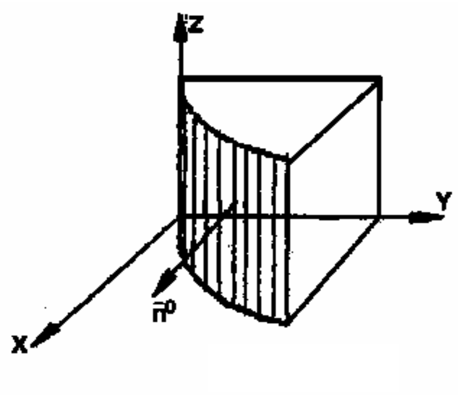
$\sum_{i=1}^{n} R(M_i)\cdot s(D_{i,xy}) = \sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i)\cdot s(D_{i,xy})$. Если поверхность задана уравнением $z = F(x,y)$, $(x,y)\in D_{xy}$, то эта сумма равна $\sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z(x_i, y_i))\cdot s(D_{i,xy})$. В последней сумме легко увидеть интегральную сумму для двойного интеграла $\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$. Переход к пределу при $\max\limits_{i=1,2,\dots n} \operatorname{diam}\sigma_i \to 0$ (при этом и $\max\limits_{i=1,2,\dots n} \operatorname{diam} D_{i,xy} \to 0$) даст $\iint\limits_{\sigma} R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$. Напомню, что эта формула получена для верхней стороны поверхности. Если выбрана нижняя сторона, то все слагаемые в интегральной сумме должны браться со знаком "-", и интегральная сумма будет иметь вид

$-\sum_{i=1}^{n} R(M_i)\cdot s(D_{i,xy}) = -\sum_{i=1}^{n} R(x_i, y_i, z_i)\cdot s(D_{i,xy})$. Рассуждая, как и для верхней стороны, получим, что в этом случае $\iint\limits_{\sigma} R(x,y,z)dxdy = -\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$. Окончательно,

$\iint\limits_{\sigma} R(x,y,z)dxdy = \pm \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))dxdy$, где знак "+" берётся для верхней стороны поверхности, знак "-" - для нижней стороны.

Аналогично изложенному, для других интегралов: $\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)dydz = \pm \iint\limits_{D_{yz}} P(x(y,z),y,z)dydz$, если поверхность однозначно проецируется в область D_{yz} на плоскости Oyz, при этом знак "+" берётся для "передней" стороны поверхности (где $\cos\alpha > 0$), для "задней" стороны, где $\cos\alpha < 0$, берётся знак "-"; $\iint\limits_{\sigma} Q(x,y,z)dxdz = \pm \iint\limits_{D_{xz}} Q(x,y(x,z),z)dxdz$, если поверхность однозначно проецируется в область D_{xz} на плоскость Oxz, знак "+" берётся для "правой" стороны поверхности (где $\cos\beta > 0$), для "левой" стороны, где $\cos\beta < 0$, берётся знак "-". Как и для поверхностного интеграла первого рода, если проецирование не взаимно однозначно, поверхность разбивается на части, которые проецируются однозначно.

Примеры. 1. Вычислить $I = \iint\limits_{\sigma} (x+z)dydz + (8y-x)dxdz + (2x^2-y)dxdy$, σ - часть поверхности цилиндра $y = \frac{x^2}{4}$, заключенная между плоскостями x=0, x=8, z=0, z=3. Сторона поверхности выбирается так, чтобы нормаль образовывала острый угол с осью Ox.



Решение: Определяем знаки направляющих косинусов нормали cosα>0, cosβ<0, cosγ=0. Поэтому

$$I = \iint\limits_{\sigma} (x+z)dydz + (8y-x)dxdz + (2x^2-y)dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D_{yz}} (x(y,z)+z)dydz - \iint\limits_{D_{xz}} (8y(x,z)-x)dxdz,$$ где

D_{yz}={(y,z): 0≤ y ≤16, 0 ≤ z ≤ 3}, D_{xz}={(x,z): 0 ≤ x ≤ 8, 0 ≤ z ≤ 3} - проекции σ на плоскости Oyz и Oxz соответственно. Проекция поверхности σ на плоскость Oxy вырождается в линию - параболу $y=\frac{x^2}{4}$, cosγ=0, поэтому интеграл по D_{xy} в данном случае отсутствует. Вычислим отдельно интегралы по D_{yz} и D_{xz}, выражая $x(y,z)$ и $y(x,z)$ из уравнения поверхности σ: $x(y,z)=2\sqrt{y}$, $y(x,z)=\frac{x^2}{4}$.

$$\iint\limits_{D_{yz}} (x(y,z)+z)dydz = \iint\limits_{D_{yz}} (2\sqrt{y}+z)dydz = \int_0^3 dz \int_0^{16} (2\sqrt{y}+z)\, dy = 328, \quad \iint\limits_{D_{xz}} (8y(x,z)-x)dxdz = \iint\limits_{D_{xz}} (2x^2-x)dxdz$$

$= \int_0^3 dz \int_0^8 (2x^2-x)\, dx = 928$. Окончательно I = 328 - 928 = - 600.

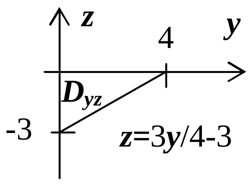
2. Вычислить $I = \iint\limits_{\sigma} 3xdydz + zdxdz + 5ydxdy$, где σ - часть плоскости $2x+3y-4z=12$, ограниченная координатными плоскостями x=0, y=0, z=0. Сторона поверхности выбирается так, чтобы нормаль образовывала острый угол с осью Oz.

Решение. Из двух направлений нормали к σ $\bar{n} = \pm\frac{2\bar{i}+3\bar{j}-4\bar{k}}{\sqrt{4+9+16}}$ мы должны выбрать такое, для которого коэффициент при орте $\bar{k}$ (т.е. $\cos\gamma$) положителен, поэтому выбираем знак "-", тогда

$\bar{\boldsymbol{n}} = \dfrac{-2\bar{\boldsymbol{i}} - 3\bar{\boldsymbol{j}} + 4\bar{\boldsymbol{k}}}{\sqrt{29}}$. В соответствии со знаками направляющих косинусов,

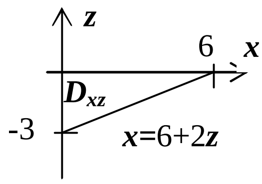
$\boldsymbol{I} = \iint\limits_{\sigma} 3\boldsymbol{xdydz} + \boldsymbol{zdxdz} + 5\boldsymbol{ydxdy} = -\iint\limits_{\boldsymbol{D_{yz}}} 3x(y,z)\boldsymbol{dydz} - \iint\limits_{\boldsymbol{D_{xz}}} \boldsymbol{zdxdz} + \iint\limits_{\boldsymbol{D_{xy}}} 5\boldsymbol{ydxdy}$. Вычисляем эти интегралы.

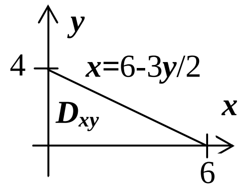
1. $-3\iint\limits_{\boldsymbol{D_{yz}}} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\boldsymbol{dydz} = \left| \boldsymbol{x} = 6 - 3\boldsymbol{y}/2 + 2\boldsymbol{z} \right| = -3\iint\limits_{\boldsymbol{D_{yz}}} \left(6 - \dfrac{3\boldsymbol{y}}{2} + 2\boldsymbol{z}\right)\boldsymbol{dydz} =$



$$= -3\int_0^4 \boldsymbol{dy} \int_{\frac{3}{4}\boldsymbol{y}-3}^{0} \left(6 - \frac{3}{2}\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{z}\right)\boldsymbol{dz} = -3\int_0^4 \left(\frac{9}{16}\boldsymbol{y}^2 - \frac{9}{2}\boldsymbol{y} + 9\right)\boldsymbol{dy} = -3(12 - 36 + 36) = -36.$$

2. $-\iint\limits_{\boldsymbol{D_{xz}}} \boldsymbol{zdxdz} = -\int_{-3}^{0} \boldsymbol{zdz} \int_0^{6+2\boldsymbol{z}} \boldsymbol{dx} = -\int_{-3}^{0} (6 + 2\boldsymbol{z})\boldsymbol{zdz} = 27 - 18 = 9.$





3. $5\iint\limits_{\boldsymbol{D_{xy}}} \boldsymbol{ydxdy} = 5\int_0^4 \boldsymbol{ydy} \int_0^{6-\frac{3}{2}\boldsymbol{y}} \boldsymbol{dx} = 5\int_0^4 \left(6 - \frac{3}{2}\boldsymbol{y}\right)\boldsymbol{ydy} =$

$= 5(48 - 32) = 80$. Окончательно, $\boldsymbol{I} = -36 + 9 + 80 = 53.$

В заключение напомню, что **вычисление поверхностного интеграла второго рода всегда можно свести к вычислению поверхностного интеграла первого рода**. Так, в последнем примере подынтегральное выражение равно $\left(\bar{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M}) \cdot \bar{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{M})\right)\boldsymbol{d}\sigma$, где $\bar{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M}) = 3\boldsymbol{x}\bar{\boldsymbol{i}} + \boldsymbol{z}\bar{\boldsymbol{j}} + 5\boldsymbol{y}\bar{\boldsymbol{k}}$,

$\bar{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{M}) = \cos\alpha\bar{\boldsymbol{i}} + \cos\beta\bar{\boldsymbol{j}} + \cos\gamma\bar{\boldsymbol{k}} = \dfrac{-2\bar{\boldsymbol{i}} - 3\bar{\boldsymbol{j}} + 4\bar{\boldsymbol{k}}}{\sqrt{29}}$. Поэтому $\bar{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{M}) \cdot \bar{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{M}) = \dfrac{-6\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{z} + 20\boldsymbol{y}}{\sqrt{29}}$, и, проектируя σ на плоскость $\boldsymbol{Oxy}$ $\left(\boldsymbol{d}\sigma = \dfrac{\boldsymbol{dxdy}}{|\cos\gamma|} = \dfrac{\sqrt{29}}{4}\boldsymbol{dxdy}\right)$, получим

$$\boldsymbol{I} = \iint\limits_{\sigma} 3\boldsymbol{xdydz} + \boldsymbol{zdxdz} + 5\boldsymbol{ydxdy} = \iint\limits_{\sigma} \frac{-6\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{z} + 20\boldsymbol{y}}{\sqrt{29}}\boldsymbol{d}\sigma = \iint\limits_{\boldsymbol{D_{xy}}} \frac{-6\boldsymbol{x} - 3\boldsymbol{z} + 20\boldsymbol{y}}{\sqrt{29}} \cdot \frac{\sqrt{29}}{4}\Bigg|_{\boldsymbol{z} = \frac{1}{2}\boldsymbol{x} + \frac{3}{4}\boldsymbol{y} - 3} \boldsymbol{dxdy} =$$

$$= \frac{1}{4}\iint\limits_{\boldsymbol{D_{xy}}} \left(-\frac{15}{2}\boldsymbol{x} + \frac{71}{4}\boldsymbol{y} + 9\right)\boldsymbol{dxdy} = \frac{1}{4}\int_0^6 \boldsymbol{dx} \int_0^{4-\frac{2}{3}\boldsymbol{x}} \left(-\frac{15}{2}\boldsymbol{x} + \frac{71}{4}\boldsymbol{y} + 9\right)\boldsymbol{dy} = \frac{1}{4}\int_0^6 \left(\frac{161}{18}\boldsymbol{x}^2 - \frac{250}{3}\boldsymbol{x} + 178\right)\boldsymbol{dx} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(644 - 1500 + 1068\right) = \frac{212}{5} = 53.$$