2. Криволинейные интегралы

Пусть вектор-функция $\bar{F} = P(x, y)\bar{i} + Q(x, y)\bar{j}$ определена на гладкой кривой AB. Разобьем кривую AB произвольным образом на элементарные дуги $A\overset{\cup}{}A_1$, $A_1\overset{\cup}{}A_2$, ..., $A_{n-1}\overset{\cup}{}B$, $A_i = A_i(x_i, y_i)$, $A = A(x_0,y_0)$, $B = B(x_n, y_n)$. На каждой элементарной дуге выберем по одной произвольной точке (ξ_i, η_i). Вычислим в этих точках вектор-функцию $\bar{F}$. Обозначим $\Delta X_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta Y_i = y_i - y_{i-1}$ - проекции элементарной дуги на оси Ox и Oy и составим сумму $\sum\limits_{i=1}^{n}\left[P(\xi_i, \eta_i)\cdot \Delta X_i + Q(\xi_i, \eta_i)\cdot \Delta Y_i\right]$. Эта сумма называется интегральной суммой по координатам для вектор-функции $\bar{F}$.

<u>Определение 1</u>. Криволинейным интегралом по координатам (II рода) от вектор-функции $\bar{F}$ по кривой AB называется конечный предел интегральных сумм при $\max \Delta X_i \to 0$, $\max \Delta Y_i \to 0$, если такой предел существует и не зависит ни от разбиения кривой AB на элементарные дуги, ни от выбора точек (ξ_i, η_i), то есть

$$\int\limits_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \lim_{\substack{\max \Delta X_i \to 0 \\ \max \Delta Y_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n}\left[P(\xi_i, \eta_i)\cdot \Delta X_i + Q(\xi_i, \eta_i)\cdot \Delta Y_i\right].$$

Криволинейный интеграл по координатам есть работа, совершаемая переменной силой $\bar{F} = P(x, y)\bar{i} + Q(x, y)\bar{j}$ на криволинейном пути AB.

Основные свойства криволинейного интеграла II рода

1. Криволинейный интеграл II рода меняет знак на противоположный при изменении направления пути интегрирования

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

2. $$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} P(x,y)dx + \int_{AB} Q(x,y)dy .$$

3. Если кривая AB разбита на две части AC и CB, то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \\ + \int_{CB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

Вычисление криволинейного интеграла сводится к вычислению определенного интеграла.

Если кривая AB задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t_1 \le t \le t_2$, то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_1}^{t_2} [P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)] dt .$$

Если кривая AB задана уравнением $y=f(x)$, $a \le x \le b$, то

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{a}^{b} [P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) \cdot f'(x)] dx . \qquad (2.1)$$

Для вычисления криволинейного интеграла по замкнутому контуру L можно использовать формулу Грина:

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy, \qquad (2.2)$$

где функции P(x,y), Q(x,y) и их частные производные $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ непрерывны в области D, ограниченной контуром L, а обход контура L осуществляется против часовой стрелки, то есть область D всегда остается слева.

Необходимым и достаточным условием <u>независимости криволинейного интеграла</u> $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ <u>от пути интегрирования</u> в односвязной области D с непрерывными P(x,y), Q(x,y), $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$ является выполнение равенства $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

При вычислении криволинейных интегралов, независящих от пути интегрирования, удобно в качестве пути интегрирования выбирать ломаную, звенья которой параллельны осям координат, например, как на рисунке 10.

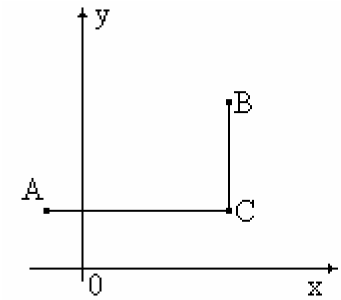

Рис.10

<u>Пример 1</u>. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (y-x)dx + xdy$ по дуге окружности L: $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, расположенной в 1-ой четверти, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

<u>Решение</u>. Из параметрических уравнений окружности, найдём $dx = (R\cos t)' dt = -R\sin t dt$, $dy = (R\sin t)' dt = R\cos t dt$. Подставив всё это в криволинейный интеграл, вычислим его:

$$\int\limits_L (y-x)dx + xdy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(R\sin t - R\cos t)R\sin t + R^2\cos^2 t\right]dt =$$

$$= R^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 t - \cos t\sin t + \cos^2 t\right)dt = R^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{\sin 2t}{2}\right)dt =$$

$$= R^2\left(t + \frac{\cos 2t}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = R^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\cos\pi}{4} - \frac{\cos 0}{4}\right) = R^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) =$$

$$= \frac{R^2}{2}(\pi - 1).$$

<u>Пример 2</u>. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L \frac{x^3}{y}dx + \frac{dy}{2x^2}$ по дуге параболы $y = x^2$ от точки A(1,1) до точки B(3,9).

<u>Решение</u>. Найдем $dy = \left(x^2\right)' dx \Leftrightarrow dy = 2xdx$. Используя формулу (2.1), вычислим криволинейный интеграл

$$\int\limits_L \frac{x^3}{y}dx + \frac{dy}{2x^2} = \int\limits_1^3 \left(\frac{x^3}{x^2} + \frac{2x}{2x^2}\right) dx = \int\limits_1^3 \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \ln|x|\right)\Bigg|_1^3 =$$

$$=\frac{9}{2}+\ln 3-\frac{1}{2}-\ln 1=4+\ln 3 .$$

Пример 3. Вычислить криволинейный интеграл

$\int\limits_L \left(ye^{xy}+e^x\right)dx+\left(xe^{xy}+y\right)dy$ по пути L, где L – некоторый путь, соединяющий точки A(1;0) и B(2;1).

Решение. Имеем

$$P(x,y)=ye^{xy}+e^x,\qquad Q(x,y)=xe^{xy}+y$$

Найдем частные производные

$$\frac{\partial P}{\partial y}=e^{xy}+xye^{xy},\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=e^{xy}+xye^{xy}.$$

Они непрерывны и равны, следовательно интеграл не зависит от пути интегрирования, то есть его можно вычислять по любому пути, соединяющему точки A и B. В качестве пути интегрирования выберем ломаную ACB (рис.11). Где на отрезке AC имеем $y=0$, $dy=0$, $1\le x\le 2$, а на отрезке CB имеем $x=2$, $dx=0$, $0\le y\le 1$. Подставляя всё это в наш интеграл,

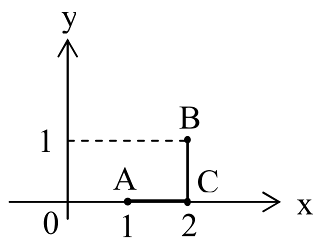

Рис. 11

получим

$$\int\limits_L \left(ye^{xy}+e^x\right)\,dx+\left(xe^{xy}+y\right)\,dy=\int\limits_{AC}\left(ye^{xy}+e^x\right)\,dx+\left(xe^{xy}+y\right)\,dy+$$

$$+\int\limits_{CB}\left(ye^{xy}+e^x\right)\,dx+\left(xe^{xy}+y\right)\,dy=$$

$$=\int\limits_1^2 e^x dx+\int\limits_0^1\left(2e^{2y}+y\right)\,dy=e^x\Big|_1^2+\left(e^{2y}+\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=e^2-e+e^2+\frac{1}{2}-1=$$

$$=2e^2-e-\frac{1}{2}.$$

Примеры 1-3 можно использовать при выполнении заданий 391-400.

<u>Пример 4</u>. Используя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл

$\oint\limits_L \left(x\cos y-3y\right)\,dx+\left(4y-\dfrac{x^2}{2}\sin y\right)\,dy$, по замкнутому контуру $L:\ x^2+y^2=4$.

<u>Решение</u>. Имеем

$$P(x,y)=x\cos y-3y,\qquad Q(x,y)=4y-\frac{x^2}{2}\sin y.$$

Найдем частные производные $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-x\sin y-3,\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=-x\sin y,$

они непрерывны для любых значений x и y. Контур L – замкнутый; область D, ограниченная контуром L, является кругом радиуса 2 с центром в начале координат. Применяя формулу Грина (2.2), получим

$$\oint_L (x\cos y - 3y)\ dx + \left(4y - \frac{x^2}{2}\sin y\right)\ dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\ dxdy = \iint_D 3dxdy =$$

$= 3\iint_D dxdy = 3 \cdot S_D = 12\pi,$ где S_D - площадь круга D, равная 4π.

Пример 4 можно использовать при выполнении заданий 401-410.

Контрольные задания

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

371-380. Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными уравнениями в декартовых координатах.

371. $x^2+y^2-2y=0$, $x^2+y^2-4y=0$, $y=x$, $y=-x$;
372. $x^2+y^2-2x=0$, $x^2+y^2-6x=0$, $y=x$, $y=-x$;
373. $x^2+y^2+2y=0$, $x^2+y^2+4y=0$, $y=x$, $y=-x$;
374. $x^2+y^2+2x=0$, $x^2+y^2+6x=0$, $y=x$, $y=-x$;
375. $x^2+y^2-4y=0$, $x^2+y^2-6y=0$, $y=x$, $x=0$;
376. $x^2+y^2-2x=0$, $x^2+y^2-4x=0$, $y=\sqrt{3}\,x$, $y=0$;
377. $x^2+y^2-2y=0$, $x^2+y^2-2x=0$;
378. $x^2+y^2-2y=0$, $x^2+y^2+2x=0$;
379. $x^2+y^2+2y=0$, $x^2+y^2+2x=0$;
380. $x^2+y^2+2y=0$, $x^2+y^2-2x=0$.

381-390. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями.

381. $z=4-y^2$, $z=y^2+2$, $x=-1$, $x=2$;
382. $z= x^2+y^2$, $z= 2x^2+2y^2$, $y= x^2$, $y=1$;
383. $z=y$, $z=2y$, $y= x^2$, $y=1$;
384. $z=x$, $z=2x$, $y^2=x$, $x=1$;
385. $z=x^2+y^2$, $z=3x^2+3y^2$, $y= x^2$, $y^2=x$;
386. $x^2+y=3$, $2y-z=0$, $z=0$;
387. $z=\sqrt{1-y}$, $y= x^2$, $z=0$;
388. $z=2-x$, $z=0$, $y=\frac{1}{4}x^2$, $y=2\sqrt{x}$;

389. z=0, x=0, y=0, z= y^2+1, y+x=1;
390. z=0, x=0, z=y^2, 2x+3y=6.

391-400. Вычислить криволинейные интегралы.

391. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L e^{x+y}dx + ydy$ по контуру L, где L - ломаная OAB: O(0;0); A(4;0); B(0;2).

392. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L x\ln y dx + \frac{x^2}{2y}dy$ по пути L, где L- некоторый путь, соединяющий точки A(1;e), B(2;e^2).

393. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L xe^y dx + xydy$ по дуге параболы y=x^2 , от точки A(1;1) до точки B(2;4).

394. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L x\sin 2y dx + x^2\cos 2y dy$ по пути, соединяющему точку A(1;π/6) с точкой B(0;π/4).

395. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L (x + y)dx - (x - y)dy$ по контуру L: x=4cost, y=4sint, $\frac{\pi}{2} \le t \le \pi$.

396. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L y\cos x dx + x^2 dy$ по дуге параболы y=x^2 ,от точки A(0;0) до точки B(π/4; π^2/16).

397. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L \frac{xdx - ydy}{x^2 + y^2}$ по контуру L: x=2cost, y=2sint, $\pi \le t \le \frac{3\pi}{2}$.

398. Вычислить криволинейный интеграл
$\int\limits_L (2x-3y)dx+(x+y)dy$ по контуру L, где L - ломаная OAB: O(0;0); A(2;0); B(0;4).

399. Вычислить криволинейный интеграл
$\int\limits_L (e^x+yx)dx+(e^y - x)dy$ по отрезку прямой, соединяющей точки A(2;1), B(-2;2).

400. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L \cos y dx - \sin x dy$, взятый вдоль отрезка прямой, соединяющей точки A(2;-2), B(-2;2).

401-410. Вычислить криволинейные интегралы по замкнутому контуру с помощью формулы Грина.

401. По формуле Грина вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_L x\ln y dx + xydy$, взятый по замкнутому контуру L: y=1, y=2, x=0, xy=1.

402. По формуле Грина вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_L (x+y^2)dx - (2x^2-y)dy$, где L- контур прямоугольника с вершинами: A(1;1), B(2;2), C(2;-1), D(1;-2).

403. По формуле Грина вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_L xe^y dx + 2x^2 ydy$, взятый по замкнутому контуру L: $y=x^2$, y=3.

404. По формуле Грина вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_L 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2 dy$, где L- контур треугольника с вершинами: A(1;1), B(2;2), C(1;2).

405. По формуле Грина вычислить криволинейный интеграл $\oint_L xydx+(x-2y)dy$, взятый по замкнутому контуру L: $y^2+x^2=1$.

406. По формуле Грина вычислить криволинейный интеграл $\oint_L x\sin ydx+x^2dy$, взятый по замкнутому контуру L: $y=x^2$, $y=2$, $x=0$ $(x\geq 0)$.

407. По формуле Грина вычислить криволинейный интеграл $\oint_L x^2ydx+xy^2dy$, взятый по замкнутому контуру L: $y-x=0$, $y+x=0$, $x=\sqrt{4-y^2}$.

408. По формуле Грина вычислить криволинейный интеграл $\oint_L\left(e^{x^2}-\frac{y^2}{2}\right)dx+\left(\frac{x^2}{2}+\sin^2 y\right)dy$, где L- контур, ограниченный линиями: $y=x$, $y=-1$, $x=-\sqrt{y}$.

409. По формуле Грина вычислить криволинейный интеграл $\oint_L(y^2+\sin^3 y)dx+(e^{\cos y}-x^2)dy$, взятый по замкнутому контуру L: $y=-\sqrt{x}$, $x=1$, $x=\sqrt{y}$.

410. По формуле Грина вычислить криволинейный интеграл $\oint_L(xy-e^{2x})dx+(2x^2+\mathrm{tg}y)dy$, взятый по замкнутому контуру L: $y+x=1$, $y=0$, $y=\sqrt{x+1}$.