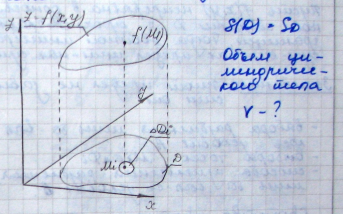
Билет №1

1. Дать определение и вывести свойства двойного интеграла. Геометрический смысл двойного интеграла. Формулировка теорема существование.

Задача объёма цилиндрического тела:



$S(D) = S_D$

Объём цилиндрического тела

V – ?

① Организуем разбиение области D:

$D = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta D_i$, $S(\Delta D_i) = \Delta S_i$

Условие Ⓐ: $\Delta D_i, \Delta D_j$ $(i \neq j)$ не имеют общих внутренних точек.

② Отметим $M_i \in \Delta D_i$

③ Вычислим $f(M_i) = f(x_i; y_i)$

④ Построим интегральную сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\cdot\Delta S_i$$

⑤ Получим двойной интеграл как предел интегральных сумм:

$$\iint_D f(x,y)\,dS = \lim_{\max_i \operatorname{diam} \Delta D_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i .$$

Теорема существования:

Пусть $f(x,y)$ непрерывна в односвязной области D с кусочно-гладкой границей. Тогда двойной интеграл сущ-ет как предел инт-ных сумм.

Замечание: этот предел не зависит от:

- выбора разбиения, лишь бы выполнялось условие A;
- выбора точек $M_i \in \Delta D_i$
- способа измельчения разбиения, лишь бы вып-сь условие B.

Свойства двойного инт-ла:

① Линейность

а) $$\iint_D [f_1(x,y) + f_2(x,y)]\,dS = \iint_D f_1(x,y)\,dS + \iint_D f_2(x,y)\,dS$$

б) $$\iint_D \lambda\cdot f(x,y)\,dS = \lambda\cdot\iint_D f(x,y)\,dS$$

(Д-во – через инт-ные суммы).

② Аддитивность по множеству.

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x,y)\,dS = \iint_{D_1} f(x,y)\,dS + \iint_{D_2} f(x,y)\,dS .$$

③ $$\iint_D dS = S_D$$ – площадь обл. D.

④ Инт-ние неравенства.

Если $f(x,y) \geq \varphi(x,y)$ $\forall (x,y) \in D$, то

$$\iint_D f(x,y)\,dS \geq \iint_D \varphi(x,y)\,dS$$

Д-во: $$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i \geq \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i, y_i)\Delta S_i$$

предельный переход в нер-ве:

$$\iint_D f(x,y)\,dS \geq \iint_D \varphi(x,y)\,dS .$$

⑤ Теорема об оценке.

⑥ Теорема о среднем.

① Теорема об оценке.

Если $\exists\, m, M$: $m \leq f(x,y) \leq M$ $\forall (x,y) \in D$, то:

$$m\cdot S_D \leq \iint_D f(x,y)\,dS \leq M\cdot S_D .$$

Д-во: инт-ние нер-ва.

$$m \leq f(x,y) \leq M$$

$$\iint_D m\,dS \leq \iint_D f(x,y)\,dS \leq \iint_D M\,dS$$

т.е. $$m S_D \leq \iint_D f(x,y)\,dS \leq M\cdot S_D .$$

② Теорема о среднем.

Пусть $f(x,y)$ непр. в обл. D; тогда $\exists\, C(x_c, y_c) \in D$:

$$f(C) = \frac{1}{S_D}\cdot\iint_D f(x,y)\,dS .$$

Д-во: т.к. ф-ция $f(x,y)$ непрерывна на замкнутой огр. обл. D, то сущ-ют:

$$\mu = \inf_D f(x,y)$$
$$m = \sup_D f(x,y)$$

$\forall (x,y) \in D$:

$$\mu \leq f(x,y) \leq m \;;$$

$$\mu S_D \leq \iint_D f(x,y)\,dS \leq m\cdot S_D ;$$

$$\mu \leq \frac{1}{S_D}\cdot\iint_D f(x,y)\,dS \leq \bar{m} \;;$$

тогда сущ-т т. $C(x_c, y_c) \in D$:

$$f(C) = \frac{1}{S_D}\cdot\iint_D f(x,y)\,dS .$$

Билет №1

2. Сформулировать и доказать теоремы о почленном дифференцировании и почленном интегрировании степенного ряда.

Теорема:

При почленном диффер. или интегриров. степенного ряда его рад. сходимости не меняется.

Д-во:

Пусть дан $\sum a_n (x - x_0)^n$

$$\lim \frac{|a_{n+1}|\,|(x - x_0)^{n+1}|}{|a_n|\,|(x - x_0)^n|} = (x - x_0)^n \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$$

$$|x - x_0| < \frac{1}{\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = R.$$

Почленно дифф. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,a_{n+1}\,(x - x_0)^n}{n\,a_n\,(x - x_0)^{n-1}} = |x - x_0| \lim \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{1} \frac{(a_{n+1})}{a_n} =$$

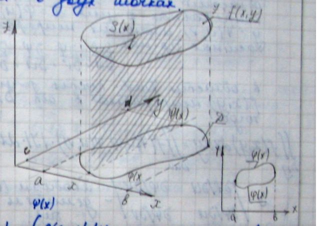
$$\Rightarrow |x - x_0| < \frac{1}{\lim \frac{a_{n+1}}{a_n}} = R .$$

чтд.

Билет №2

1. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах. Сформулировать теорему о замене переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах.

Правильная область – область, которую каждая прямая ∥ оси координат пересекает не более чем в двух точках.



$$S(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$$ – площадь криволинейной трапеции.

Объём цилиндрического тела:

$$V = \iint_D f(x,y)\,dS = \int_a^b S(x)\,dx .$$

Т.О.

$$V = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

аналогично: $$V = \int_c^d \left(\int_{\delta(y)}^{f(y)} f(x,y)\,dx \right) dy .$$

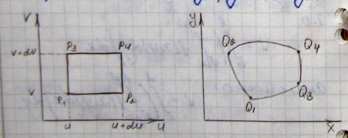
$\boxed{\text{Теорема}}$: пусть установлено взаимнооднозначное соответствие областей D_{uv} и D_{xy} с помощью непрерывных ф-ций $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, имеющих непрерывные частные пр-ные $\frac{\partial\varphi}{\partial u}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}, \frac{\partial\psi}{\partial u}, \frac{\partial\psi}{\partial v}$ в области D_{uv}; пусть ф-ция $f(x,y)$ непрерывна в обл. D_{xy}; тогда:

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_{uv}} f(\varphi(u,v), \psi(u,v))\cdot|J|\cdot du\,dv,$$

$$J = \begin{vmatrix} \partial\varphi/\partial u & \partial\varphi/\partial v \\ \partial\psi/\partial u & \partial\psi/\partial v \end{vmatrix}$$ – якобиан (определитель Якоби).

Д-во (нестрогое):

Рассмотрим элементарную площадку в координатах u, v и её образ при отображении $x = \varphi(x,y)$, $y = \psi(x,y)$.



$Q_1 = (\varphi(u,v), \psi(u,v))$

$Q_2 = (\varphi(u + du, v), \psi(u + du, v)) \approx$
$\approx (\varphi(u,v) + \varphi'_u du, \psi(u,v) + \psi'_u du)$

$Q_3 = (\varphi(u, v + dv), \psi(u, v + dv)) \approx$
$\approx (\varphi(u,v) + \varphi'_v dv, \psi(u,v) + \psi'_v dv)$.

Приближенно будем считать ячейку $Q_1Q_2Q_4Q_3$ п/мом со сторонами

$$\overrightarrow{Q_1Q_2} \approx \{\varphi'_u du, \psi'_u du\}$$
$$\overrightarrow{Q_1Q_3} \approx \{\varphi'_v dv, \psi'_v dv\}$$

Площадь этого п/ма:

$$S = |\overrightarrow{Q_1Q_2} \times \overrightarrow{Q_1Q_3}| = \left| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \varphi'_u du & \psi'_u du & 0 \\ \varphi'_v dv & \psi'_v dv & 0 \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \left| \vec{k}\cdot\begin{vmatrix} \varphi'_u du & \psi'_u dv \\ \varphi'_v dv & \psi'_v dv \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} \varphi'_u du & \psi'_u du \\ \varphi'_v dv & \psi'_v dv \end{vmatrix} \right| =$$

$$= \left| \begin{vmatrix} \varphi'_u & \psi'_u \\ \varphi'_v & \psi'_v \end{vmatrix} \right| du\,dv = |J|\cdot du\,dv$$

$dx\,dy = S$, т.к. считаем п/мом.

Тогда: $$\iint_{D_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_{uv}} f(\varphi(u,v), \psi(u,v))\cdot|J|\cdot du\,dv,$$

7

$|J|$ имеет смысл коэф-та искажения площади.

В полярной системе координат:

$x = \rho\cdot\cos\varphi$, $y = \rho\cdot\sin\varphi$: $$J = \begin{vmatrix} \partial x/\partial\rho & \partial x/\partial\varphi \\ \partial y/\partial\rho & \partial y/\partial\varphi \end{vmatrix} = \rho .$$

Значит:

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_{\rho\varphi}} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\cdot\rho\cdot d\rho\,d\varphi .$$

Билет №2

2. Вывести интегральный признак Коши сходимости знакоположительного ряда. Исследовать ряд Дирихле.

Числовой ряд наз-ся знакоположительным, если все его члены - полож. числа: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$.

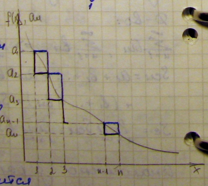
S_n - неубывающая ф-ция отн-но n. Поэтому достаточно установить, что S_n огр. сверху; тогда ряд сход. по т. Вейерштрасса.

<u>Инт-ный признак Коши:</u>

Пусть при $x \geq 1$ опр-на непрерывная, не возрастающая ф-ция $f(x)$ такая, что $f(n) = a_n$, $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.
Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

<u>Д-во:</u>

$$S_n - a_1 < \int_1^n f(x)dx < S_n - a_n$$



$$\left\{ \begin{aligned} S_n - a_1 &= a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\ S_n - a_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \end{aligned} \right\}$$

1) Необходимость

Пусть ряд сходится.

Тогда $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Тогда: $S_n - a_n < S - a_n < S$.

Значит $\int_1^n f(x)dx$ - неубывающая и ограничен. ф-ция.

Тогда по т. Вейерштрасса:

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx = \int_1^{+\infty} f(x)dx,$$

т.е. несобственный инт-л сход-ся.

2) Достаточность

Если инт-л сходится, то

$$S_n < a_1 + \int_1^n f(x)dx < a_1 + \int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

Т.о. послед-ть $\{S_n\}$ - неубывающая и огр. сверху. Тогда по теореме Вейерштрасса $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$.

<u>Следствие:</u> для того, чтобы ряд расходился, необходимо и достаточно, чтобы расходился $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Рассмотрим ряд Дирихле: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-p}dx = \lim_{b\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Bigg|_1^b = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & p>1 \\ \infty & p<1 \end{cases}$$

51

Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расх.

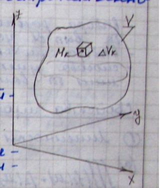
Т.о. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сход. при $p>1$, расх. при $p \leq 1$.

Билет №3

1. Дать определение и вывести свойства тройного интеграла. Физический смысл тройного интеграла. Формулировка теоремы существования.

Задача о массе пространственного тела:

$f(x,y,z)$ - объемная плотность



① Вводим разбиение области V на ячейки ΔV_k:

$$V = \bigcup_{k=1}^{n} \Delta V_k$$

так, что ΔV_k не имеют общих внутренних точек (A).

② Отмечаем $M_k \in \Delta V_k$.

③ Вычисляем $f(M_k)$ и строим инт-ную сумму $\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta V_k$

④ Переходим к пределу при условии $\max_k diam\, \Delta V_k \to 0$ (B)

⑤ Получаем тройной интеграл:

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \lim_{\max_k diam\, \Delta V_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta V_k$$

<u>Теорема сущ-ния:</u>

Пусть V - замкнутая ограниченная пространственно-односвязная область с кусочно-гладкой границей; пусть $f(x,y,z)$ непрерывна в этой 11 области и на ее границе. Тогда тройной инт-л сущ-ет как предел инт-ных сумм.

<u>Замечание:</u> этот предел не зависит от:

- выбора разбиения области V, лишь бы вып-сь условие A;
- выбора точек M_k;
- способа уменьшения разбиения, лишь бы вып-сь условие B.

<u>Свойства тройного инт-ла:</u>

① Линейность

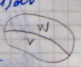
(a) $$\iiint_V (f_1(M) + f_2(M))dV = \iiint_V f_1(M)dV + \iiint_V f_2(M)dV$$

(b) $$\iiint_V \lambda f(M)dV = \lambda \cdot \iiint_V f(M)dV$$

(д-во - через инт-ные суммы)

② Аддитивность

$$\iiint_{V \cup W} f(M)dV = \iiint_V f(M)dV + \iiint_W f(M)dV$$



(д-во: разбиение так, чтобы граница ячеек являлась границей областей; далее через инт-ные суммы).

③ $\iiint_V CdV = C \cdot V$ (V - объем области).

Д-во:

$$\sum_{i=1}^{n} C \cdot \Delta V_i = C \cdot \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = CV$$

далее - предельный переход.

④ Интегрирование нер-ва:

Если $f(x,y,z) \geq g(x,y,z)$, то

$$\iiint_V f(x,y,z)dV \geq \iiint_V g(x,y,z)dV$$

Д-во: $\sum_k f(M_k)\Delta V_k \geq \sum_k g(M_k)\Delta V_k$

переход к пределу в нер-ве:

$$\iiint_V f(M)dV \geq \iiint_V g(M)dV.$$

⑤ Теорема об оценке:

Если $m \leq f(x,y,z) \leq M$ $\forall (x,y,z) \in V$, то

$$mV \leq \iiint_V f(x,y,z)dV \leq MV$$

(д-во: инт-ние нер-ва).

⑥ Теорема об ~~оценке~~ среднем:

пусть выполнены условия теоремы сущ-ния. Тогда сущ-ет $C \in V$:

$$f(C) = \frac{1}{V} \cdot \iiint_V f(x,y,z)dV$$

(Д-во: аналогично двойному инт-лу: $m \leq f(x,y,z) \leq M$).

Билет №3

2. Вывести признаки сравнения знакоположительных числовых рядов.

① <u>Первый признак сравнения рядов.</u>

пусть выполнено нер-во $a_n \leq b_n$ $\forall n$. Тогда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ сход} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ сход}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ расх} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ расх}.$$

<u>Д-во:</u>

1) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

Тогда вып-но: $S_{a_n} \leq S_{b_n} < S_b$

$\{S_{a_n}\}$ - неубывающая ограниченная сверху послед-ть частичных сумм.

Значит по теореме Вейерштрасса:

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_{a_n} = S_a \leq S_b.$$

2) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то по п. 1 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Противоречие.

51

② <u>Второй признак сравнения</u>

Пусть $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C \neq 0$. Тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

<u>Д-во:</u>

раскроем опр-ние предела:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N \quad \left| \frac{a_n}{b_n} - C \right| < \varepsilon;$$

$$C - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < C + \varepsilon$$

$$b_n(C - \varepsilon) < a_n < b_n(C + \varepsilon)$$

1. если $\sum a_n$ сходится, то $\sum b_n(C-\varepsilon)$ сходится; след-но, $\sum b_n$ сходится.

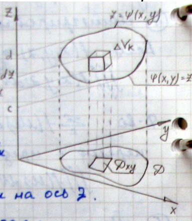
2. если $\sum b_n$ сходится, то $\sum b_n(C+\varepsilon)$ сходится; след-но, $\sum a_n$ сходится.

3. пусть $\sum a_n$ расходится; если $\sum b_n$ сходится, то по п. 2 $\sum a_n$ сходится - противоречие.

4. пусть $\sum b_n$ расходится; если $\sum a_n$ сходится, то по п. 1 $\sum b_n$ сходится - противоречие.

Билет №4

1. Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат. Замена переменных в тройном интеграле. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.



V – правильная область.

cd – проекция области на ось z.

D – проекция V на пл-ть Oxy

D_{xy} – проекция ΔV_k на пл-ть Oxy

dz – проекция ΔV_k на ось z.

Тройной интеграл:

1) берем столбец и перемещаем его по проекции на пл-ть Oxy:

$$\iint_D \left[\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right] dx\,dy$$

2) берем слои и перемещаем их вдоль оси Oz:

$$\int_c^d \left[\iint_{D_z} f(x,y,z)\,dx\,dy \right] dz.$$

И в том и в другом случае тройной интеграл сводится к определенному и двойному интегралам.

$\boxed{\text{Теорема}}$: пусть установлена взаимно-однозначное соответствие областей V_{xyz} и V_{uvw} с помощью ф-ций $x=\varphi(u,v,w)$, $y=\psi(u,v,w)$, $z=\lambda(u,v,w)$, непрерывных в V_{uvw} и имеющих в ней непрерывные частные пр-ные; пусть $f(x,y,z)$ непрерывна в V_{xyz}, тогда:

$$\iiint_{V_{xyz}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{V_{uvw}} f(x,y,z)\cdot|J|\,du\,dv\,dw,$$

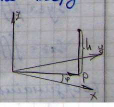
где

$$J = \begin{vmatrix} \partial\varphi/\partial u & \partial\varphi/\partial v & \partial\varphi/\partial w \\ \partial\psi/\partial u & \partial\psi/\partial v & \partial\psi/\partial w \\ \partial\lambda/\partial u & \partial\lambda/\partial v & \partial\lambda/\partial w \end{vmatrix}$$

– якобиан преобразования.

Цилиндрическая система координат:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \\ z=h \end{cases}$$

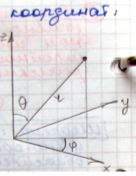


$\Rightarrow J=\rho$

15

Сферическая система координат:

$x = r\sin\theta\cos\varphi$
$y = r\sin\theta\sin\varphi$
$z = r\cdot\cos\theta$



$\Rightarrow J = r^2\sin\theta.$

(10) Вывести формулы

Билет №4

2. Дать определение сходящегося числового ряда. Вывести простейшие свойситва сходящихся числовых рядов.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – это сумма бесконечного количества чисел, выбранных по опр-ному алгоритму.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется сходящимся, если сущ-ет конечный предел последовательности частичных сумм ряда – сумма ряда:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

Необходимый признак сходимости ряда:

если ряд сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Д-во: $a_n = S_n - S_{n-1}$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = S - S = 0.$$

Следствие: если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Критерий Коши сходимости ряда: для того, чтобы ряд сходился необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall n>N,\ \forall p\geq 0\ |S_{n+p}-S_n|<\varepsilon.$$

Отрицание критерия Коши: для того чтобы ряд расходился необходимо и достаточно, чтобы:

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\ \forall n>N,\ \forall p\geq 0\ |S_{n+p}-S_n|>\varepsilon$$

47

Св-ва сход. рядов

(1) Члены сход. ряда можно умножить на одно и то же число k. Полученный ряд будет сходиться, а сумма его будет в k раз больше суммы исходного ряда.

Д-во:

$$S_{2n} = ka_1+\ldots+ka_n = k(a_1+\ldots+a_n) = k\cdot S_{1n};$$

$$S_2 = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = k\cdot\lim_{n\to\infty} S_{1n} = k\cdot S_1$$

(2) Члены сход. ряда можно группировать. Полученный ряд будет сходиться, и сумма его не изменится.

Д-во:

$$\underbrace{a_1+a_2}_{b_1}+\underbrace{a_3+\ldots+a_k}_{b_2}+\underbrace{a_{k+1}+\ldots+a_l}_{b_3}+\underbrace{a_{l+1}+\ldots+a_n}_{b_4}+\ldots$$

$S_{a_2} = S_{b_1};\ S_{a_k} = S_{b_2};\ S_{a_l} = S_{b_3};\ S_{a_n} = S_{b_4}\ldots$

$\{S_{b_n}\}$ – подпослед-ть послед-ти $\{S_{a_n}\}$.

Но $\{S_{a_n}\}\underset{n\to\infty}{\to} S \Rightarrow \{S_{b_n}\}\underset{n\to\infty}{\to} S$

(3) В сходящемся ряде можно отбросить конечное число первых членов $a_1,\ldots,a_k$ $(a_1+\ldots+a_k = B)$; полученный ряд будет сходиться, а его сумма будет меньше суммы исходного ряда на B.

48

Д-во:

$S_{21} = a_{k+1} = S_{1\,k+1} - B$

$S_{22} = a_{k+1}+a_{k+2} = S_{1\,k+2} - B$

$S_{2n} = a_{k+1}+\ldots+a_{k+n} = S_{1\,k+n} - B$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty}(S_{1\,k+n} - B) = S_1 - B.$$

Остаток ряда: $R_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$ – ряд полученный из исходного ряда отбрасыванием 1-ых k членов.

(4) Для того чтобы ряд сходился необходимо и достаточно, чтобы сходился остаток ряда.

(5) Сходящиеся ряды можно складывать (или вычитать), получая сходящийся ряд с суммой равной сумме (или разности) сумм исходных рядов.

Д-во:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n,\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} c_n,\quad c_n = a_n + b_n;$$

$$S_{c_n} = a_1+b_1+\ldots+a_n+b_n = (a_1+\ldots+a_n) + (b_1+\ldots+b_n) = S_{a_n}+S_{b_n}$$

$$S_c = \lim_{n\to\infty} S_{c_n} = \lim_{n\to\infty}(S_{a_n}+S_{b_n}) = S_a + S_b$$

Аналогично д/разности.

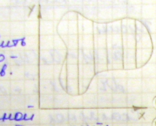
Билет №5

1. Вывести формулу Грина для односвязной области .

Пусть G – плоская односвязная область с кусочно-гладкой границей L. Пусть ф-ции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные пр-ные по своим переменным в обл. G и на L. Тогда справедлива ф-ла Грина:

$$\boxed{\oint_L P\,dx + Q\,dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy}$$

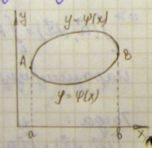
Д-во:



(1) G можно представить как объединение конечного числа прав. областей.

Инт-л по произвольной области можно свести к инт-лам по правильным областям. Т.о. ф-лу Грина можно д-ть д/правильной области.

(2) Т.к. P, Q произвольны, то должно вып-ся:



$$\oint_L P\,dx = -\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

$$\oint_L Q\,dy = \iint_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$$

$$-\iint_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = -\int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right] dx =$$

$$= -\int_a^b P(x,\psi(x))\,dx + \int_a^b P(x,\varphi(x))\,dx =$$

$$= \int_{BkA} P\,dx + \int_{AkB} P\,dx = \oint_L P\,dx$$

Билет №4

2. Доказать теорему о сходимости абсолютно сходящегося знакопеременного числового ряда .

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ наз-ся знакопеременным, если среди членов ряда содержится бесконечное кол-во отрицательных членов и бесконечное кол-во положит. членов.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ наз-ся абсолютно сходящимся, если ряд из модулей членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится.

5

$\boxed{\text{Теорема}}$: если ряд абсолютно сходится, то он сходится.

Д-во:

пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ абсолютно сходится, т.е. сходится $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|+|a_n|$ – сход-ся.

Рассм. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n+|a_n|$; это знакоположительный ряд,

т.к. $0 = -|a_n|+|a_n| \leq a_n+|a_n|$;

$a_n+|a_n| \leq 2|a_n|$.

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n+|a_n|$ сходится, т.к. сходится $\sum_{n=1}^{\infty} 2|a_n|$.

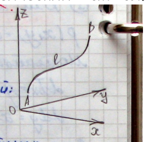
Но $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ сходится, след-но, сходится $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, что и т.д.

Билет №6

1. Дать определение и вывести свойства криволинейного интеграла первого рода. Его вычисление, геометрический и физический смысл.

Задача о массе кривой:

$f(x,y,z)$ - плотность.



① Введем разбиение кривой:

$\breve{AB} = \bigcup_{k=1} \Delta \breve{l}_k$ так,

чтобы $\Delta \breve{l}_k$ не имели общих внутренних точек (усл. А).

② Отметим $M_k \in \Delta \breve{l}_k$, вычислим $f(M_k)$. Будем считать, что масса $\Delta \breve{l}_k$ примерно равна $f(M_k)\cdot\Delta l_k$.

③ Сформируем инт-ную сумму:

$$\sum_{k=1}^{n} f(M_k)\cdot\Delta l_k$$

④ Предельный переход при условии В $\{\max_k \operatorname{diam} \Delta \breve{l}_k \to 0\}$:

$$\int_L f(M)\,dl = \lim_{\max_k \operatorname{diam} \Delta \breve{l}_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(M_k)\Delta l_k .$$

Теорема сущ-ния:

Пусть $f(x,y,z)$ непрерывна в точках кусочно-гладкой дуги l; тогда криволинейный интеграл 1-ого рода сущ-ет как предел инт-ных сумм.

Замечание: этот предел не зависит от:

- выбора разбиения, лишь бы вып-сь условие А;
- выбора точек $M_k \in \Delta \breve{l}_k$.
- способа уменьшения разбиения, лишь бы вып-сь условие В.

Свойства:

① Линейность.

а) $\int_L [f(x,y,z)+g(x,y,z)]\,dl = \int_L f(M)\,dl + \int_L g(M)\,dl$;

б) $\int_L \lambda\cdot f(x,y,z)\,dl = \lambda\cdot\int_L f(x,y,z)\,dl$.

② Аддитивность:

$$\int_{L_1 \cup L_2} f(M)\,dl = \int_{L_1} f(M)\,dl + \int_{L_2} f(M)\,dl$$

③ $\int_L dl = L$ - длина дуги L.

④ Если на L $f(x,y,z) \geq g(x,y,z)$, то

$$\int_L f(x,y,z)\,dl \geq \int_L g(x,y,z)\,dl$$

⑤ Теорема об оценке.

Если сущ-ют m, M: $\forall (x,y,z) \in L$:

$m \leq f(x,y,z) \leq M$, то

$$mL \leq \int_L f(x,y,z)\,dl \leq M\cdot L .$$

⑥ Теорема о среднем.

Сущ-т т. $C(x_c, y_c, z_c)$:

$$f(C) = \frac{1}{L}\cdot\int_L f(x,y,z)\,dl .$$

Параметризуем дугу L: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

$A = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$

$B = (x(t_1), y(t_1), z(t_1))$.

Дифференциал дуги:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\,dt$$

Тогда:

$$\int_L f(x,y,z)\,dl = \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t))\cdot\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\cdot dt$$

Если плоская кривая $y = y(x)$, то

$$dl = \sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx$$

и

$$\int_L f(x,y)\,dl = \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x))\cdot\sqrt{1 + (y'(x))^2}\,dx .$$

Если плоская дуга $\rho = \rho(\varphi)$, то

$$dl = \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi$$

и

$$\int_L f(x,y)\,dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\cdot\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi$$

Билет №6

2. Ряд Тейлора. Вывести условие разложения бесконечно дифференцируемой функции в ряд Тейлора. Ряд Маклорена. Разложить в ряд Маклорена функцию функцию y=sin X.

Ряд Тейлора

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ — ряд Тейлора

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} x^n$ — $(x_0 = 0)$ - ряд Маклорена.

Теорема

Степенной ряд — есть ряд Тейлора для своей суммы.

Д-во:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots$$

$f(x_0) = a_0 + \ldots$

$f'(x_0) = \sum_{n=1} n a_n (x - x_0)^{n-1} = a_1 (x - x_0)^0 + 2a_2(x - x_0)^1 \ldots$

$f'(x_0) = a_1$

$f''(x_0) = \sum_{n=2} n(n-1)(x - x_0)^{n-2} = 2a_2 + 6a_3(x - x_0)$.

$f''(x_0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$

$f'''(x_0) = 6a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f'''(x_0)}{6}$

$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

ч.т.д.

Следствие: разложение ф-ции в степенной ряд единственно.

Разложение в ряд Маклорена основных элемент. ф-ций

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)$$

2. $\sin x$

$(\sin x)' = \cos x \big|_{x=0} = 1.$

$(\sin x)'' = -\sin x \big|_{x=0} = 0.$

$(-\sin x)' = -\cos x \big|_{x=0} = -1.$

$$f(x) = \sin x = 1 - \left(\frac{x^3}{3!}\right) + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Билет №7

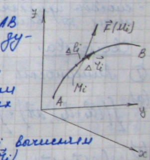
1.Дать определение и вывести свойства криволинейного интеграла второго рода. Его вычисление и физический смысл.

Задача о работе силы:

① Разбиение дуги AB на элементарные дуги:

$\breve{AB} = \breve{L} = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta\breve{l}_i$,

чтобы $\Delta\breve{l}_i$ не имели общих внутренних точек (усл. А).



② Отмечаем $M_i \in \Delta\breve{l}_i$, вычисляем $\vec{F}(M_i)$ и $(\vec{F}(M_i), \Delta\vec{r}_i)$

③ Строим интегральную сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}(M_i), \Delta\vec{r}_i)$$

④ Переходим к пределу при условии В: $\max_i \operatorname{diam} \Delta l_i \to 0$ получаем криволинейный интеграл 2-ого рода:

$$\int_L (\vec{F}, d\vec{r}) = \lim_{\max_i \operatorname{diam} \Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\vec{F}(M_i), \Delta\vec{r}_i).$$

Часто обозначают: $\vec{F}(M) = \vec{a}(M)$

Теорема сущ-ния:

Пусть вектор-ф-ция $\vec{a}(M)$ непрерывна на кусочно-гладкой дуге L. Тогда криволинейный интеграл 2-ого рода сущ-ет как предел инт-ных сумм.

Замечание: этот предел не зависит от:

- способа выбора разбиения, лишь бы вып-сь условие А;
- выбора точек $M_i \in \Delta l_i$;
- способа уменьшения разбиения, лишь бы вып-сь условие В.

Свойства:

① Линейность

(а) $\int_L ((\vec{a}_1 + \vec{a}_2), d\vec{r}) = \int_L (\vec{a}_1, d\vec{r}) + \int_L (\vec{a}_2, d\vec{r})$

(б) $\int_L \lambda(\vec{a}, d\vec{r}) = \lambda\cdot\int_L (\vec{a}, d\vec{r})$

(Д-во - через инт-ные суммы)

② Аддитивность

$$\int_{L_1 \cup L_2} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{L_1} (\vec{a}, d\vec{r}) + \int_{L_2} (\vec{a}, d\vec{r})$$

③ Ориентируемость

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = -\int_{-L} (\vec{a}, d\vec{r})$$

(Д-во: при обходе по дуге $-L$ в инт. сумме вместо $\Delta\vec{r}_i$ стоит $(-\Delta\vec{r}_i)$ - далее по опр-нию).

Вычисление в ДСК:

Пусть:

$\vec{a}(M) = a_x(M)\vec{i} + a_y(M)\vec{j} + a_z(M)\vec{k}$

$d\vec{r} = dx\cdot\vec{i} + dy\cdot\vec{j} + dz\cdot\vec{k}$.

Скалярное произведение:

$$(\vec{a}(M), d\vec{r}) = \underbrace{a_x}_{P(x,y,z)} dx + \underbrace{a_y}_{Q(x,y,z)} dy + \underbrace{a_z}_{R(x,y,z)} dz$$

$$\Rightarrow \int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Параметризуем дугу L: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$

Тогда:

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_{t_0}^{t_1} [P\cdot\dot{x}(t) + Q\cdot\dot{y}(t) + R\cdot\dot{z}(t)]\,dt$$

- обычный опр-ный интеграл.

Билет №7

2. Вывести радикальный признак Коши сходимости знакоположительного числового ряда.

① Конечная форма радикального признака Коши

Пусть $\forall n > N \ \sqrt[n]{a_n} \le q < 1$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть $\forall n > N \ \sqrt[n]{a_n} \ge q > 1$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Д-во:

1. пусть $\forall n > N \ \sqrt[n]{a_n} \le q < 1$; тогда $a_n \le q^n$, $q < 1$; ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по 1-ому признаку сравнения с б/у геометр. прогрессией.

2. пусть $\forall n > N \ \sqrt[n]{a_n} \ge q > 1$; тогда $a_n \ge q^n > 1$; $a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

② Предельная форма радикального признака Коши

Пусть $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$, тогда $\sum a_n$ сходится.

Пусть $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$, тогда $\sum a_n$ расходится.

Д-во:

1. пусть $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$, тогда $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n > N \ |\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon$

$\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon < 1$ при малом ε

$\Rightarrow$ ряд сходится по конечной форме рад. признака Коши.

2. пусть $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$, тогда

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n > N \ |\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon$.

$\sqrt[n]{a_n} > q - \varepsilon > 1$ при малом ε

$\Rightarrow$ ряд расходится по конечной форме рад. признака Коши.

Билет №8

1.Дать определение поверхностного интеграла первого рода. Его вычисление и применение.

Задача о массе пов-ти:

пусть есть кусочно-гладкая пов-ть.

① Разбиение на элементарные площадки т.о., чтобы они не имели общих вн. точек:

$$\sigma = \bigcup_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i.$$

② Отмечаем $M_i \in \Delta\sigma_i$, вычисляем плотность $f(M_i)$ и массу $f(M_i)\cdot\Delta\sigma_i$.

③ Формируем инт-ную сумму:

$$\sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i$$

④ Переходим к пределу при условии $\max_i \operatorname{diam}\Delta\sigma_i \to 0$:

$$\iint_\sigma f(M)\,d\sigma = \lim_{\max_i \operatorname{diam}\Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta\sigma_i.$$

Теорема сущ-ния: пусть ф-ция $f(M) = f(x,y,z)$ непрерывна на кусочно-гладкой ограниченной пов-ти σ. Тогда пов-ный инт-л 1-ого рода существует как предел инт-ных сумм.

Свойства:

① Линейность:

$$\iint_\sigma (\lambda f + \mu g)\,d\sigma = \lambda\iint_\sigma f\,d\sigma + \mu\cdot\iint_\sigma g\,d\sigma$$

② Аддитивность:

$$\iint_{\sigma_1\cup\sigma_2} f\,d\sigma = \iint_{\sigma_1} f\,d\sigma + \iint_{\sigma_2} f\,d\sigma.$$

③ $\iint_\sigma d\sigma = S_\sigma$ – площадь пов-ти.

④ Если $f(x,y,z) \ge g(x,y,z)$, то

$$\iint_\sigma f\,d\sigma \ge \iint_\sigma g\,d\sigma.$$

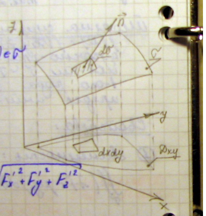
⑤ Если $m \le f(x,y,z) \le M$, то

$$mS_\sigma \le \iint_\sigma f\,d\sigma \le M\cdot S_\sigma$$

⑥ Пусть $f(M) = f(x,y,z)$ непрерывна на кусочно-гладкой огр. пов-ти σ. Тогда $\exists C \in \sigma$:

$$f(C) = \frac{1}{S_\sigma}\cdot\iint_\sigma f\,d\sigma.$$

Вычисление:



$\iint_\sigma f(x,y,z)\,d\sigma$, $(x,y,z) \in \sigma$

σ: $z = \varphi(x,y)$
$F(x,y,z) = 0$

$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \left\{\frac{F'_x}{A}, \frac{F'_y}{A}, \frac{F'_z}{A}\right\}$; $A = \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}$

$dxdy = d\sigma\cdot|\cos\gamma|$.

$$\Rightarrow \iint_\sigma f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z)\cdot\frac{dxdy}{|\cos\gamma|} =$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x,y,z)\cdot\sqrt{1 + \frac{F'^2_x}{F'^2_z} + \frac{F'^2_y}{F'^2_z}}\,dxdy$$

Если σ: $z = \varphi(x,y)$:

$$\iint_\sigma f(x,y,z)\,d\sigma = \iint_{D_{xy}} f(x,y,z)\cdot\sqrt{1 + \varphi'^2_x + \varphi'^2_y}\,dxdy.$$

Билет №8

2. Доказать признак Лейбница сходимости знакочередующегося числового ряда.

Признак Лейбница

Пусть:

1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – знакочередующийся ряд, имеет вид: $v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \ldots$;
2. послед-ть $\{v_n\}$ монотонно убывает.
3. $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$.

Тогда:
1. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится
2. $|S| \le v_1$.

Д-во:

Рассм. послед-ть частичных сумм с чётными номерами.

$S_{2n} = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 + \ldots > 0$;

$S_{2n} = v_1 - (v_2 - v_3) - (v_3 - v_5) - \ldots < v_1$;

Т.о. $\{S_{2n}\}$ ограничена сверху v_1.

$S_{2(n+1)} - S_{2n} = (v_1 - v_2 + \ldots + v_{2n-1} - v_{2n} + v_{2n+1} - v_{2n+2}) - (v_1 - v_2 + \ldots - v_{2n}) = v_{2n+1} - v_{2n+2} > 0$;

Т.о. $\{S_{2n}\}$ монотонно возрастает.

По т. Вейерштрасса: $\exists \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Рассм. послед-ть частичных сумм с нечётными номерами:

$S_{2n+1} = S_{2n} + v_{2n+1}$

$\lim_{n\to\infty} v_n = 0$, т.е. $\lim_{n\to\infty} v_{2n+1} = 0$

и $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Т.о. $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$.

Т.о. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится:

Раскроем опр-ние предела:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n > N \ |S_n - S| < \varepsilon$ – как для чётных n, так и для нечётных, т.е. $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Из доказанного выше:

$0 < S_{2n} < v_1$

Переходя к пределу: $0 \le S \le v_1$, т.е. $|S| \le v_1$.

Следствие: $|R_n| \le |a_{n+1}|$. Остаток ряда оценивается модулем 1-ого отброшенного члена ряда.

Д-во: т.к. остаток знакочередующегося ряда – тоже знакочередующийся ряд, то его сумма по признаку Лейбница оценивается модулем его первого члена.

Т.е. $|R_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_n\right| \le |a_{n+1}|$,

а первый член остатка ряда и есть первый отброшенный член.

Билет №9

1.Дать определение поверхностного интеграла второго рода. Его свойства и вычисление.

Ориентируемая пов-ть: каждой ее точке можно поставить в соответствие непрерывную на пов-ти вектор-ф-цию - в-р нормали.

Односторонняя пов-ть: при обходе по замкнутому контуру вектор нормали меняет свое напр-ние на противоположное.

Двусторонняя пов-ть: вектор нормали своего напр-ния не меняет.

Задача о потоке жидкости через пов-ть:

$\Pi_{d\sigma} = V_{пра} = h \cdot d\sigma =$

$= пр_{\vec{n}}\vec{a} \cdot d\sigma = \vec{a} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma$

$\Rightarrow$

$\Pi_\sigma = \iint\limits_\sigma \vec{a} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma$ - обычный пов-ный инт-л 1-ого рода.

Построение:

1) Разбиение: $\sigma = \bigcup\limits_{i=1}^{n} \Delta\sigma_i$.

2) Отмечаем $M_i \in \Delta\sigma_i$, вычисляем $\vec{a}(M_i)$, $(\vec{a}(M_i) \cdot \vec{n}(M_i))$.

3) Строим инт-ную сумму:

$\sum\limits_{i=1}^{n} \vec{a}(M_i) \cdot \vec{n}(M_i) \cdot \Delta\sigma_i$.

4) Переходим к пределу:

$$\iint\limits_\sigma \vec{a} \cdot \vec{n}\, d\sigma = \lim_{\max_i diam \Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \vec{a}(M_i)\vec{n}(M_i)\Delta\sigma_i;$$

Теорема сущ-ния: пусть вектор-ф-ция $\vec{a}(M)$ непрерывна на кусочно-гладкой ограниченной пов-ти σ. Тогда пов-ный инт-л 2-го рода сущ-ет как предел инт-ных сумм.

Св-ва:

1-6 - аналогично пов-ному инт-лу 1-ого рода.

7) Св-во ориентируемости:

$$\iint\limits_{\sigma+} \vec{a} \cdot \vec{n}\, d\sigma = - \iint\limits_{\sigma-} \vec{a} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma.$$

Запись:

$\vec{a}(M) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$;

$\vec{n}(M) = \cos\alpha \cdot \vec{i} + \cos\beta \cdot \vec{j} + \cos\gamma \cdot \vec{k}$.

Тогда:

$$\iint\limits_\sigma \vec{a} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = \iint\limits_\sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\sigma.$$

Т.к. $d\sigma\cos\alpha = \pm\, dydz$
$d\sigma\cos\beta = \pm\, dxdz$
$d\sigma\cos\gamma = \pm\, dxdy$,

то:

$$\iint\limits_\sigma \vec{a} \cdot \vec{n} \cdot d\sigma = \pm\iint\limits_\sigma P\,dydz \pm \iint\limits_\sigma Q\,dxdz \pm \iint\limits_\sigma R\,dxdy.$$

Билет №9

2.Вывести радикальный признак Коши сходимости знакоположительного числового ряда.

① Конечная форма радикального признака Коши

Пусть $\forall n > N$ $\sqrt[n]{a_n} \le q < 1$,
тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.
Пусть $\forall n > N$ $\sqrt[n]{a_n} \ge q > 1$,
тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Д-во:

1. пусть $\forall n > N$ $\sqrt[n]{a_n} \le q < 1$;
тогда $a_n \le q^n$, $q < 1$;
ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по 1-ому признаку сравнения с б/у геометр. прогрессией.

2. пусть $\forall n > N$ $\sqrt[n]{a_n} \ge q > 1$;
тогда $a_n \ge q^n > 1$;
$a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

② Предельная форма радикального признака Коши

пусть $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$,
тогда $\sum a_n$ сходится.
пусть $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$,
тогда $\sum a_n$ расходится.

Д-во:

1. пусть $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q < 1$, тогда
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N : \forall n > N$ $|\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon$
$\sqrt[n]{a_n} < q + \varepsilon < 1$ при малом ε
$\Rightarrow$ ряд сходится по конечной форме рад. признака Коши.

2. пусть $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q > 1$, тогда
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N : \forall n > N$ $|\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon$.
$\sqrt[n]{a_n} > q - \varepsilon > 1$ при малом ε
$\Rightarrow$ ряд расходится по конечной форме рад. признака Коши.

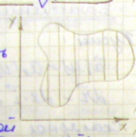
Билет №10

1.Вывести формулу Грина для односвязной области.

Пусть G - плоская односвязная область с кусочно-гладкой границей L. Пусть ф-ции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные пр-ные по своим переменным в обл. G и на L.
Тогда справедлива ф-ла Грина:

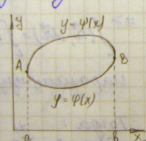
$$\boxed{\oint\limits_L P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy}$$

Д-во:



① G можно представить как объединение конечного числа прав. областей.

Инт-л по произвольной области можно свести к инт-лам по правильным областям. Т.о. ф-лу Грина можно д-ть д/правильной области.



② Т.к. P, Q произвольны, то должно вып-ся:

$$\oint\limits_L P\,dx = -\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy$$

$$\oint\limits_L Q\,dy = \iint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy$$

$$-\iint\limits_G \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy = -\int\limits_a^b \left[\int\limits_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy\right] dx =$$

$$= -\int\limits_a^b P(x,\psi(x))\,dx + \int\limits_a^b P(x,\varphi(x))\,dx =$$

$$= \int\limits_{BkA} P\,dx + \int\limits_{AkB} P\,dx = \oint\limits_L P\,dx$$

Билет №10

2.Вывести признаки сравнения знакоположительных числовых рядов.

① Первый признак сравнения рядов.

пусть выполнено нер-во $a_n \le b_n$ $\forall n$. Тогда:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сход $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сход.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расх $\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расх.

Д-во:

1) Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.
Тогда вып-но: $S_{a_n} \le S_{b_n} < S_b$
$\{S_{a_n}\}$ - неубывающая ограниченная сверху послед-ть частичных сумм.
значит по теореме Вейерштрасса:
$\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_{a_n} = S_a \le S_b$.

2) пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.
Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то по п. 1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Противоречие.

② Второй признак сравнения

пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C \ne 0$. тогда ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

Д-во:

раскроем опр-ние предела:
$\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$ $\forall n > N$ $\left|\frac{a_n}{b_n} - C\right| < \varepsilon$;

$C - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < C + \varepsilon$
$b_n(C - \varepsilon) < a_n < b_n(C + \varepsilon)$

1. если $\sum a_n$ сходится, то $\sum b_n(C-\varepsilon)$ сходится; след-но, $\sum b_n$ сходится.

2. если $\sum b_n$ сходится, то $\sum b_n(C+\varepsilon)$ сходится; след-но, $\sum a_n$ сходится.

3. пусть $\sum a_n$ расходится; если $\sum b_n$ сходится, то по п. 2 $\sum a_n$ сходится - противоречие.

4. пусть $\sum b_n$ расходится; если $\sum a_n$ сходится, то по п. 1 $\sum b_n$ сходится - противоречие.

Билет №11

1.Поток векторного поля. Вывести формулу Остроградского-Гаусса.

Векторное поле: каждой точке области поставлен в соответствие вектор $a(M)$.

Ф-ла О-Г:

Пусть компоненты вект. поля $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывна и имеют непрерывные частные пр-ные в пространственно односвязной замкнутой области V и на ее кусочно гладкой границе σ.
Тогда:

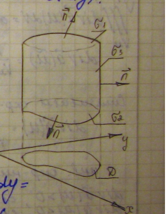
$$\oiint\limits_\sigma P\,dydz + Q\,dxdz + R\,dxdy =$$
$$= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV.$$

Д-во:

(1) Т.к. P, Q, R - произвольны, то можно доказывать отдельно ф-лу для P, для Q и для R.
Докажем: $\oiint\limits_\sigma R\,dxdy = \iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dV$

(2) Д-во можно проводить для цилиндрического тела с образующими, // оси Oz.

(3) $\sigma_1 : z = \varphi_1(x,y)$ $\sigma_2 : z = \varphi_2(x,y)$.



$$\iiint\limits_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dV =$$

$$= \iint\limits_D \left(\int\limits_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz\right) dxdy =$$

$$= \iint\limits_D [R(x,y,\varphi_1(x,y)) - R(x,y,\varphi_2(x,y))]\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_D R(x,y,\varphi_1)\,dxdy - \iint\limits_D R(x,y,\varphi_2)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\sigma_1} R\,dxdy + \iint\limits_{\sigma_2} R\,dxdy + \iint\limits_{\sigma_3} R\,dxdy = \oiint\limits_\sigma R\,dxdy,$$

что и т.д.

Билет №11

2.Вывести признак Даламбера сходимости знакоположительного числового ряда.

① Конечная форма признака Даламбера

Пусть $\forall n>N$ $a_{n+1}/a_n \le q<1$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть $\forall n>N$ $a_{n+1}/a_n \ge q>1$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Д-во:

1. пусть $\forall n$ $a_{n+1}/a_n \le q<1$.
тогда $a_{n+1} \le q a_n \le q^2 a_{n-1} \le \ldots \le q^n a_1$.
Все члены ряда не превосходят членов б/у геометр. прогрессии $a_1, qa_1, q^2a_1, \ldots$. След-но, ряд сход. по 1-ому признаку сравнения.

2. пусть $\forall n$ $a_{n+1}/a_n \ge q>1$
тогда $a_2 \ge qa_1 > a_1$; $a_3 \ge qa_2 > q^2a_1$
$a_n \ge q^{n-1}a_1 > a_1$
Т.о. $a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ т.е. не выполнен необходимый признак сходимости, и ряд расходится.

② Предельная форма признака Даламбера

Пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q<1$; тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q>1$; тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q = 1$, то признак не позволяет сделать вывод о сходимости или расходимости ряда.

Д-во:

1. Пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q<1$; тогда
$\forall \varepsilon>0$ $\exists N(\varepsilon)$: $\forall n>N$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - q\right| < \varepsilon$
$$q-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q+\varepsilon$$
Выберем малое ε: $q+\varepsilon = \tilde{q} < 1$
Тогда $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q+\varepsilon < 1$ –
– по конечной форме признака Даламбера ряд сходится.

2. Пусть $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q>1$; тогда
$\forall \varepsilon>0$ $\exists N(\varepsilon)$: $\forall n>N$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - q\right| < \varepsilon$.
Выберем малое ε: $q-\varepsilon>1$.
Тогда: $a_{n+1} > a_n$ $\forall n$, т.е. $a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$,
т.е. ряд расходится.

55

Билет №12

1.Циркуляция векторного поля. Сформулировать теорему Стокса.

Циркуляция векторного поля:
$$Ц_L(\bar{a}) = \oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Теорема Стокса:

Пусть пространственно односвязная область V содержит кусочно гладкую пов-ть σ с кусочно гладкой границей ∂.
Пусть компоненты векторного поля P, Q, R непрерывны и имеют непрерывные частные пр-ные по своим аргументам в V.
Тогда справедлива ф-ла Стокса:
$$\iint_\sigma \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx\,dz = \oint_\partial P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$
или:
$$\boxed{П_\sigma(\overrightarrow{rot}\,\vec{a}) = Ц_\partial(\vec{a}).}$$

Билет №12

2.Вывести радикальный признак Коши сходимости знакоположительного числового ряда.

① Конечная форма радикального признака Коши

Пусть $\forall n>N$ $\sqrt[n]{a_n} \le q<1$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть $\forall n>N$ $\sqrt[n]{a_n} \ge q>1$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Д-во:

1. пусть $\forall n>N$ $\sqrt[n]{a_n} \le q<1$;
тогда $a_n \le q^n$, $q<1$;
ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится по 1-ому признаку сравнения с б/у геометр. прогрессией.

2. пусть $\forall n>N$ $\sqrt[n]{a_n} \ge q>1$;
тогда $a_n \ge q^n > 1$;
$a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

② Предельная форма радикального признака Коши

Пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q<1$, тогда $\sum a_n$ сходится.

Пусть $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q>1$, тогда $\sum a_n$ расходится.

Д-во:

1. пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q<1$, тогда
$\forall \varepsilon>0$ $\exists N$: $\forall n>N$ $|\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon$
$\sqrt[n]{a_n} < q+\varepsilon < 1$ при малом ε
$\Rightarrow$ ряд сходится по конечной форме рад. признака Коши.

2. пусть $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} = q>1$, тогда
$\forall \varepsilon>0$ $\exists N$: $\forall n>N$ $|\sqrt[n]{a_n} - q| < \varepsilon$.
$\sqrt[n]{a_n} > q-\varepsilon > 1$ при малом ε
$\Rightarrow$ ряд расходится по конечной форме рад. признака Коши.

Билет №13

1.Вывести условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.

Билет №13

2.Вывести признак Даламбера сходимости знакоположительного числового ряда.

① Конечная форма признака Даламбера

Пусть $\forall n>N$ $a_{n+1}/a_n \le q<1$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть $\forall n>N$ $a_{n+1}/a_n \ge q>1$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Д-во:

1. пусть $\forall n$ $a_{n+1}/a_n \le q<1$.
тогда $a_{n+1} \le q a_n \le q^2 a_{n-1} \le \ldots \le q^n a_1$.
Все члены ряда не превосходят членов б/у геометр. прогрессии $a_1, qa_1, q^2a_1, \ldots$. След-но, ряд сход. по 1-ому признаку сравнения.

2. пусть $\forall n$ $a_{n+1}/a_n \ge q>1$
тогда $a_2 \ge qa_1 > a_1$; $a_3 \ge qa_2 > q^2a_1$
$a_n \ge q^{n-1}a_1 > a_1$
Т.о. $a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$ т.е. не выполнен необходимый признак сходимости, и ряд расходится.

② Предельная форма признака Даламбера

Пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q<1$; тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q>1$; тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q = 1$, то признак не позволяет сделать вывод о сходимости или расходимости ряда.

Д-во:

1. Пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q<1$; тогда
$\forall \varepsilon>0$ $\exists N(\varepsilon)$: $\forall n>N$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - q\right| < \varepsilon$
$$q-\varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q+\varepsilon$$
Выберем малое ε: $q+\varepsilon = \tilde{q} < 1$
Тогда $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q+\varepsilon < 1$ –
– по конечной форме признака Даламбера ряд сходится.

2. Пусть $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q>1$; тогда
$\forall \varepsilon>0$ $\exists N(\varepsilon)$: $\forall n>N$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - q\right| < \varepsilon$.
Выберем малое ε: $q-\varepsilon>1$.
Тогда: $a_{n+1} > a_n$ $\forall n$, т.е. $a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$,
т.е. ряд расходится.

55

Билет №14

1.Вывести формулу Ньютона-Лейбница для криволинейного интеграла от полного дифференциала в односвязной области.

① Теорема (о полном диф-ле).

Для того чтобы выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = dV(x,y)$ было полным диф-лом некоторой ф-ции $V(x,y)$ - потенциала, необходимо и достаточно, чтобы в условиях ф-лы Грина было выполнено одно из след. условий (экв. усл. полного диф-ла):

(1) $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ не зависит от формы дуги а зависит только от ее нач. и кон. точек.

(2) Д/любого кусочно-гладкого контура γ: $\oint\limits_{\gamma} Pdx + Qdy = 0$

(3) $\forall (x,y)$: $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

(4) $Pdx + Qdy = dV = \frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy$.

Д-во: по цепочке $4 \to 3 \to 2 \to 1 \to 4$.

$\boxed{4 \to 3}$ Предположим дополнительно сущ-ние и непрерывность смешанных вторых пр-ных ф-ции V.

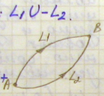
Тогда:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

$\boxed{3 \to 2}$ по ф-ле Грина:

$$\oint\limits_{\gamma} Pdx + Qdy = \iint\limits_{G}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = 0$$

$\boxed{2 \to 1}$ образуем контур $\gamma: L_1 \cup -L_2$.



$$0 = \oint\limits_{\gamma} Pdx + Qdy =$$

$$= \int\limits_{L_1 \cup -L_2} Pdx + Qdy = \int\limits_{L_1} Pdx + Qdy + \int\limits_{-L_2} Pdx + Qdy = \int\limits_{L_1} Pdx + Qdy - \int\limits_{L_2} Pdx + Qdy.$$

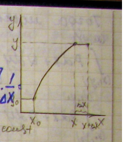
Т.о. $\int\limits_{L_1} Pdx + Qdy = \int\limits_{L_2} Pdx + Qdy$.

$\boxed{1 \to 4}$ докажем, что $V(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy$ - потенциал, т.е. $\partial V/\partial x = P$; $\partial V/\partial y = Q$.

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x}.$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx + Qdy - \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy\right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy + \int\limits_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx + Qdy - \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy\right] \cdot \frac{1}{\Delta x} =$$



$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \int\limits_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} Pdx + \cancel{Qdy} =$$

0, т.к. $y = const$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(x,y)dx = \{\text{по теореме о среднем для опр. инт-ла}\}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} \cdot P(x + \theta \cdot \Delta x, y) = P(x,y). \quad 0 \le \theta \le 1$$

аналогично доказывается второе утверждение.

② Ф-ла Ньютона-Лейбница

Пусть выполнены условия теоремы о полном диф-ле и пусть выражение $Pdx + Qdy = dV$ - полный диф-л, а ф-ция $V(x,y)$ - потенциал. Тогда справедлива ф-ла Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} Pdx + Qdy = V(x_2,y_2) - V(x_1,y_1).$$

Д-во: в теореме о полном диф-ле доказано, что

$$V(x,y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx + Qdy.$$

Тогда можно записать:

$$\int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} Pdx + Qdy = \int\limits_{(x_1,y_1)}^{(x_0,y_0)} Pdx + Qdy + \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_2,y_2)} Pdx + Qdy =$$

$$= \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_2,y_2)} Pdx + Qdy - \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} Pdx + Qdy = V(x_2,y_2) - V(x_1,y_1).$$

③ Теорема о полном диф-ле д/простр-ной кривой.

Пусть дуга AB лежит на кусочно гладкой пов-ти S пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные на S. Тогда следующие 4 утв. экв.:

1) $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$ не зависит от формы дуги.

2) для $\forall \gamma \in S$: $\oint\limits_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz = 0$

3) $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$; $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}$; $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$

4) $Pdx + Qdy + Rdz = dV(x,y,z)$ - полный диф-л.

Д-во: $4 \to 3 \to 2 \to 1 \to 4$.

$\boxed{4 \to 3}$: также по теореме о смешанных производных.

$\boxed{3 \to 2}$: по теореме Стокса.

$\boxed{2 \to 1}$; $\boxed{1 \to 4}$ - аналогично двумерному случаю.

④ Вычисление криволинейного инт-ла от полного диф-ла

Криволинейный интеграл от полного диф-ла можно вычислять двумя способами:

1) выбор удобного пути инт-ния.
2) восстановление потенциала и применение ф-ла Ньютона-Лейбница.

Билет №14

2.Степенной ряд. Доказать теорему Абеля.

Степенные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$$

Степенной ряд - это функцион. ряд члены кот-го произвед. постоянных a_n на степенные ф-ции с целым показат. степени ≥ 1 от разности $(x-x_0)$

Теорема Абеля

1. Пусть степенной ряд сход. в $x_1 \ne x_0$, тогда он абсол. сход. при $|x-x_0| < |x_1-x_0|$.
2. если степ. ряд расход. в $x_1 \ne x_0$, то он расх. при $|x-x_0| > |x_1-x_0|$.

Док-во:

1. ряд сход. в x_1 по условию, тогда для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N$, $\forall n > N$ $|a_n(x_1-x_0)^n| < \varepsilon$ (необх. призн. сх. ряда) ($\lim\limits_{n \to \infty} a_n(x_1-x_0)^n = 0$).

Оценим при $|x-x_0| < |x_1-x_0|$ члены ряда

$$|a_n(x-x_0)^n| = \left|\frac{(x-x_0)^n}{(x_1-x_0)^n} a_1(x_1-x_0)^n\right| \le$$

$$\le \frac{|x-x_0|^n}{|x_1-x_0|^n} |a_1(x_1-x_0)^n| <$$

$$< \varepsilon(q(x))^n, \text{ где } 0 < q(x) < 1 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{|x-x_0|}{|x_1-x_0|} = q(x) < 1\right]$$

$\Rightarrow$ по признаку сравнения рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n| \text{ - сходится}$$

2. пусть в x_1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)$ расх. и $|x-x_0| > |x_1-x_0|$

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)$ - сход. при $|x-x_0| > |x_1-x_0|$ тогда по п. 1 степ. ряд сход. в т. x_1 $(x = x_1)$ - противор.

Билет №15

1.Дать определение потенциального векторного поля, вывести его свойства.

Векторное поле $\vec{a}(M)$ наз-ся потенциальным, если сущ-ет такое скалярное поле $\varphi(x,y,z)$, что

$$\vec{a}(M) = \overrightarrow{grad}\,\varphi.$$

Если поле $\bar{a}(M)$ потенциально, то:

$$\bar{a}(M) \cdot d\vec{r} = \overrightarrow{grad}\,\varphi \cdot d\vec{r} = d\varphi;$$

$Pdx + Qdy + Rdz = d\varphi$ - полный диф-л.

Свойства:

① Линейный интеграл потенциального поля $\int\limits_{L} \vec{a} \cdot d\vec{r}$ не зависит от форма дуги L, а зависит только от начальной и конечной точек дуги.

$$\int\limits_{L} \bar{a}\,d\bar{r} = \int\limits_{L} grad\,\varphi \cdot d\bar{r} = \int\limits_{L} d\varphi = \varphi(B) - \varphi(A)$$

② Циркуляция потенциального поля равна нулю.

$$\oint\limits_{L} \vec{a} \cdot d\vec{r} = \oint\limits_{L} d\varphi = \varphi(A) - \varphi(A) = 0.$$

③ Потенциальное поле явл-ся безвихревым, т.е. $rot\,\vec{a} = 0$.

$$rot\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \partial\varphi/\partial x & \partial\varphi/\partial y & \partial\varphi/\partial z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial z \partial y}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial z}\right) \cdot \vec{j} + \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y \partial x}\right)\bar{k} = 0.$$

Билет №15

2.Вывести интегральный признак Коши сходимости знакоположительного числового ряда. Исследовать ряд Дирихле

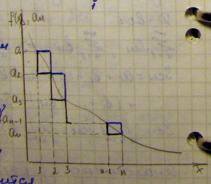
Числовой ряд наз-ся знакоположительным, если все его члены - полож. числа: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$.

S_n - неубывающая ф-ция отн-но n. Поэтому достаточно установить, что S_n огр. сверху; тогда ряд сход. по т. Вейерштрасса.

<u>Инт-ный признак Коши:</u>

Пусть при $x \geq 1$ опр-на непрерывная, невозрастающая ф-ция $f(x)$ такая, что $f(n)=a_n$, $f(x)\to 0$ при $x\to+\infty$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

<u>Д-во:</u>



$$S_n - a_1 < \int_1^n f(x)dx < S_n - a_n$$

$$\begin{cases} S_n - a_1 = a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\ S_n - a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \end{cases}$$

1) Необходимость

Пусть ряд сходится.

Тогда $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Тогда: $S_n - a_n < S - a_n < S$.

Значит $\int_1^n f(x)dx$ - неубывающая и огранич. ф-ция.

Тогда по т. Вейерштрасса:

$\exists \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx = \int_1^{+\infty} f(x)dx$,

т.е. несобственный инт-л сход-ся.

2) Достаточность

Если инт-л сходится, то

$$S_n < a_1 + \int_1^n f(x)dx < a_1 + \int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

Т.о. послед-ть $\{S_n\}$ - неубывающая и огр. сверху. Тогда по теореме Вейерштрасса $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$.

<u>Следствие</u>: для того чтобы ряд расходился, необходимо и достаточно, чтобы расходился $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Рассмотрим ряды Дирихле: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-p}dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^b = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & p>1 \\ \infty & p<1 \end{cases}$$

51

Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расх.

Т.о. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сход. при $p>1$, расх. при $p\leq 1$.

Билет №16

1.Дать определение соленоидального векторного поля, вывести его свойства.

Векторное поле $\bar{a}(M)$ наз-ся соленоидальным в области V, если в любой точке M этой области $div\, \bar{a}(M) = 0$.

<u>Свойства:</u>

1) Для того, чтобы поле было соленоидальным, необходимо и достаточно, чтобы поток через любую замкнутую пов-ть равнялся нулю.

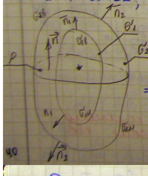
необх-ть: по формуле О-Г:

$$\Pi_\sigma(\bar{a}) = \iiint_V div\, \vec{a}\, dV = 0.$$

дост-ть: по инв. опр-нию дивергенции:

$$div\, \vec{a} = \lim_{V_M\to M} \frac{\Pi_{\sigma_M}(\bar{a})}{V_M} = 0, \text{ т.к. } \Pi_{\sigma_M}(\bar{a}) = 0.$$

2) Поток соленоидального поля через любую пов-ть, окружающую изолированный источник или сток, один и тот же.



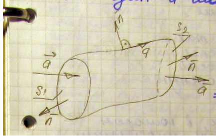
$$\left.\begin{aligned} \Pi_в &= \Pi_{2в} - \Pi_p - \Pi_{1в} = 0 \\ \Pi_н &= \Pi_{2н} + \Pi_p - \Pi_{1н} = 0 \end{aligned}\right\} +$$

$\Rightarrow$

$$\Pi_1 = \Pi_{1в} + \Pi_{1н} = \Pi_{2в} + \Pi_{2н} = \Pi_2$$

40

3) Поток соленоидального поля через произв. сечение вект. трубки один и тот же.



$$-\Pi_{S_1}(\bar{a}) + \Pi_{бок.\,п-ть}(\bar{a}) + \Pi_{S_2}(\bar{a}) = 0$$

$$\Rightarrow \Pi_{S_1}(\bar{a}) = \Pi_{S_2}(\bar{a}).$$

Билет №16

2.Вывести признаки сравнения знакоположительных числовых рядов.

1) <u>Первый признак сравнения рядов.</u>

Пусть выполнено нер-во $a_n \leq b_n$ $\forall n$. Тогда:

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сход $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сход.

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расх $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ расх.

<u>Д-во:</u>

1) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

Тогда вып-но: $S_{a_n} \leq S_{b_n} < S_b$

$\{S_{a_n}\}$ - неубывающая ограниченная сверху послед-ть частичных сумм.

Значит по теореме Вейерштрасса:

$\exists \lim_{n\to\infty} S_{a_n} = S_a \leq S_b$.

2) Пусть $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то по п. 1 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Противоречие.

2) <u>Второй признак сравнения</u>

Пусть $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = C \neq 0$. Тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся или расходятся одновременно.

<u>Д-во:</u>

раскроем опр-ние предела:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ \forall n > N\ \left|\frac{a_n}{b_n} - C\right| < \varepsilon;$$

$$C - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < C + \varepsilon$$

$$b_n(C-\varepsilon) < a_n < b_n(C+\varepsilon)$$

1. если $\sum a_n$ сходится, то $\sum b_n(C-\varepsilon)$ сходится; след-но, $\sum b_n$ сходится.
2. если $\sum b_n$ сходится, то $\sum b_n(C+\varepsilon)$ сходится; след-но, $\sum a_n$ сходится.
3. пусть $\sum a_n$ расходится; если $\sum b_n$ сходится, то по п. 2 $\sum a_n$ сходится - противоречие.
4. пусть $\sum b_n$ расходится; если $\sum a_n$ сходится, то по п. 1 $\sum b_n$ сходится - противоречие.

Билет №17

1.Дать определение гармонического поля, вывести его свойства.

Оператор Лапласа:

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Скалярное поле наз-ся гармоническим, если:

$$\nabla^2 \varphi = \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

Векторное поле наз-ся гармоническим, если оно потенциальное, а потенциал φ - скалярное гармоническое поле.

$\boxed{\text{Теорема}}$: для того, чтобы вект. поле $\bar{a}(M)$ было гармоническим, необходимо и достаточно, чтобы оно было соленоидальным и потенциальным.

Необходимость:

если $\bar{a}(M)$ - гармоническое, то оно потенциальное, т.е. $\bar{a}(M) = grad\,\varphi$; тогда оно соленоидальное, т.к.

$$div\,\bar{a} = div(grad\,\varphi) = div\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\bar{k}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \nabla^2\varphi = 0.$$

Достаточность:

если $\bar{a}(M)$ потенциально, то $\bar{a} = grad\,\varphi$; т.к. оно соленоидальное, то

$$div\,\bar{a} = 0 = div(grad\,\varphi) = \nabla^2\varphi;$$

Т.о. поле потенциально и его потенциал удовлетв. ур-нию Лапласа, поэтому оно гармоническое.

Т.к. гармоническое поле потенциально и соленоидально, то его св-ва - св-ва соленоидального поля и св-ва потенциального поля.

Билет №17

2.Доказать признак Лейбница сходимости знакочередующегося числового ряда.

<u>Признак Лейбница</u>

Пусть:

1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ - знакочередующийся ряд, имеет вид: $V_1 - V_2 + V_3 - V_4 + \ldots$;
2. послед-ть $\{V_n\}$ монотонно убывает.
3. $\lim_{n\to\infty} V_n = 0$.

Тогда: 1. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится
2. $|S| \leq V_1$.

<u>Д-во:</u>

Рассм. послед-ть частичных сумм с четными номерами.

$$S_{2n} = V_1 - V_2 + V_3 - V_4 + \ldots > 0;$$

$$S_{2n} = V_1 - (V_2 - V_3) - (V_3 - V_5) - \ldots < V_1;$$

Т.о. $\{S_n\}$ ограничена сверху V_1.

$$S_{2(n+1)} - S_{2n} = (V_1 - V_2 + \ldots + V_{2n-1} - V_{2n} + V_{2n+1} - V_{2n+2}) - (V_1 - V_2 + \ldots - V_{2n}) = V_{2n+1} - V_{2n+2} > 0;$$

Т.о. $\{S_{2n}\}$ монотонно возрастает.

По т. Вейерштрасса: $\exists \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S$.

Рассм. послед-ть частичных сумм с нечетными номерами:

$$S_{2n+1} = S_{2n} + V_{2n+1}$$

$\lim_{n\to\infty} V_n = 0$, т.е. $\lim_{n\to\infty} V_{2n+1} = 0$

и $\lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Т.о. $\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$.

Т.о. ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится:

Раскроем опр-ние предела:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \forall n > N\ |S_n - S| < \varepsilon$ - как для четных n, так и для нечетных, т.е. $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Из доказанного выше:

$$0 < S_{2n} < V_1$$

Переходя к пределу: $0 \leq S \leq V_1$, т.е. $|S| \leq V_1$.

<u>Следствие</u>: $|R_n| \leq |a_{n+1}|$. Остаток ряда оценивается модулем 1-ого отброшенного члена ряда.

Д-во: т.к. остаток знакочередующегося ряда - тоже знакочередующийся ряд, то его сумма по признаку Лейбница оценивается модулем его первого члена.

Т.е. $|R_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_n\right| \leq |a_{n+1}|$,

а первый член остатка ряда и есть первый отброшенный член.

Билет №18

1.Оператор Гамильтона. Вычислить с помощью этого оператора div(rot a) и rot(grad Ф)

Оператор Гамильтона:

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k} \right\}$$

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi;$$

аналогично:

$$\nabla\cdot\vec{a} = \mathrm{div}\,\vec{a}$$

$$\nabla\times\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}$$

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}) = \nabla\cdot(\nabla\times\vec{a}) = 0 = \nabla\times\nabla\cdot\vec{a} = 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi) = \nabla\times(\nabla\varphi) = 0 = (\nabla\times\nabla)\varphi = 0$$

Билет №18

2.Доказать теорему о равномерной сходимости степенного ряда внутри его интервала ходимости.

Теорема: степенной ряд сходится равномерно внутри интервала сходимости.

Д-во:

Пусть интервал сход. $|x - x_0| < R$ $(x_0 - R,\ x_0 + R)$

док-ть что ряд равном. сход при $|x_1 - x_0| < R_1 < R$.

$\exists R_2,\quad R_1 < R_2 < R,\quad \left(R_2 = \frac{R_1 + R}{2}\right)$

по т. Абеля ряд абсолютно сход. при $|x - x_0| \le R_2$

например в т. x_1, $x_1 - x_0 = R_2$ – ряд сход

т.к. в x_1 – ряд сход $\Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N,\ \forall n > N$ $|a_n(x_1 - x_0)^n| < \varepsilon$

Оценим:

$|a_n(x - x_0)^n| = \left|a_n \frac{(x - x_0)^n}{(x_1 - x_0)^n}(x_1 - x_0)^n\right| =$

при $|x - x_0| < R_1$

$= |a_n| \left|\frac{\overbrace{x - x_0}^{R_1}}{\underbrace{x_1 - x_0}_{R_2}}\right|^n |x_1 - x_0|^n < q^n\varepsilon$

$q = \frac{R_1}{R_2} < 1$.

По признаку Вейерштрасса степен. ряд сходится равномерно в $|x - x_0| < R_1 < R$

Следствие:

для степенных рядов выполняются теоремы для сход рядов, поэтому при выполнении или условий этих теорем ... внутр. интерв. сход степен. ряда

1. сумма ряда непрерывна
2. можно почленно дифф. и интегрировать.

74

Билет №19

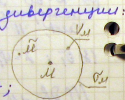
1.Дивергенция векторного поля. Свойства дивергенции. Вывести формлу для вычисления дивергенции в декартовой системе координат.

Дивергенция – хар-ка вект. поля:

$$\mathrm{div}\,\vec{a}(M) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

инвариантное опр-ние дивергенции:

по теореме о среднем д/тройного инт-ла:



$$\iiint\limits_{V_M} \mathrm{div}\,\vec{a}(M)\,dV = \mathrm{div}\,\vec{a}(\tilde{M})\cdot V_M;$$

$$\mathrm{div}\,\vec{a}(\tilde{M}) = \frac{1}{V_M}\cdot\iiint\limits_{V_M}\mathrm{div}\,\vec{a}(M)\,dV;$$

Стягиваем окр-ть к точке M:

$$\mathrm{div}\,\vec{a}(M) = \lim_{V_M\to M}\frac{1}{V_M}\cdot\iiint\limits_{V_M}\mathrm{div}\,\vec{a}(M)\,dV. -$$

– инв. опр-ние дивергенции.

$\mathrm{div}\,\vec{a}(M) > 0$, след. M – источник

$\mathrm{div}\,\vec{a}(M) < 0$, след. M – сток.

Свойства:

(1) линейность:

$$\boxed{\mathrm{div}(\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2) = \lambda_1\mathrm{div}\,\vec{a}_1 + \lambda_2\mathrm{div}\,\vec{a}_2}$$

Д-во:

38

$$\mathrm{div}(\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2) = \mathrm{div}\left[(\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2)\vec{i} + (\lambda_1Q_1 + \lambda_2Q_2)\vec{j} + (\lambda_1R_1 + \lambda_2R_2)\vec{k}\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\lambda_1P_1 + \lambda_2P_2) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda_1Q_1 + \lambda_2Q_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda_1R_1 + \lambda_2R_2) = \lambda_1\left(\frac{\partial P_1}{\partial x} + \frac{\partial Q_1}{\partial y} + \frac{\partial R_1}{\partial z}\right) +$$

$$+ \lambda_2\left(\frac{\partial R_2}{\partial x} + \frac{\partial Q_2}{\partial y} + \frac{\partial R_2}{\partial z}\right) = \lambda_1\mathrm{div}\,\vec{a}_1 + \lambda_2\mathrm{div}\,\vec{a}_2.$$

(2) $\boxed{\mathrm{div}\,\vec{c} = 0,\ \vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k} \text{ – пост. вект. поле}}$

Д-во: $\mathrm{div}\,\vec{c} = \frac{\partial c_1}{\partial x} + \frac{\partial c_2}{\partial y} + \frac{\partial c_3}{\partial z} = 0.$

(3) $\boxed{\mathrm{div}(\varphi\vec{a}) = \varphi\cdot\mathrm{div}\,\vec{a} + \vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi}$

Д-во:

$$\mathrm{div}(\varphi\vec{a}) = \mathrm{div}\left[\varphi P\vec{i} + \varphi Q\vec{j} + \varphi R\vec{k}\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\varphi P) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi Q) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi R) = \varphi\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) + \left(P\frac{\partial\varphi}{\partial x} + Q\frac{\partial\varphi}{\partial y} + R\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) =$$

$$= \varphi\cdot\mathrm{div}\,\vec{a} + \vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi.$$

Билет №19

2. Степенной ряд. Доказать теорему Абеля.

Степенные ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots$$

Степенной ряд – это функцион. ряд члены кот-го произвед. постоянных a_n на степенные функции с целыми показат. степени от разности $(x - x_0)$

Теорема Абеля

1. Пусть степенной ряд сход. в $x_1 \ne x_0$, тогда он абсол. сход. при $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$.
2. если степ. ряд расход. в $x_1 \ne x_0$, то он расх. при $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$.

Док-во:

1. ряд сход. в x_1 по условию, тогда для $\forall\varepsilon > 0\ \exists N,\ \forall n > N$ $|a_n(x_1 - x_0)^n| < \varepsilon$ (необх. призн. сх. ряда) $\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n(x_1 - x_0)^n = 0\right)$.

Оценим при $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ члены ряда

$$|a_n(x - x_0)^n| = \left|\frac{(x - x_0)^n}{(x_1 - x_0)^n}a_n(x_1 - x_0)^n\right| \le$$

$$\le \frac{|x - x_0|^n}{|x_1 - x_0|^n}|a_n(x_1 - x_0)^n| <$$

$$< \varepsilon(q(x))^n, \text{ где } 0 < q(x) < 1 \Rightarrow$$

$$\left[\frac{|x - x_0|}{|x_1 - x_0|} = q(x) < 1\right]$$

$\Rightarrow$ по признаку сравнения рядов

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n(x - x_0)^n|$ – сходится.

2. пусть в x_1 ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x - x_0)$ расх. и $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$

Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x - x_0)$ – сход. при $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$ тогда по п. 1 степ. ряд сход. в т. x_1 $(x = x_1)$ – противор.

Билет №20

1.Ротор векторного поля. Свойства ротора. Вычисление ротора векторного поля в ?????? системе координат.

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Инвариантное опр-ние ротора:

$$\iint\limits_{\sigma}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \oint\limits_{\partial}\vec{a}\cdot d\vec{r} \text{ – т. Стокса.}$$

применим к левой части рав-ва теорему о среднем:

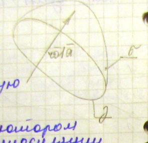
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}(\tilde{M})\cdot\vec{n}(\tilde{M})\cdot\sigma = \oint\limits_{\partial}\vec{a}\cdot d\vec{r}.$$

41

или:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}(M)\cdot\vec{n}(M) = \lim_{\partial\to M}\frac{1}{\sigma}\cdot\oint\limits_{\partial}\vec{a}\cdot d\vec{r}. -$$

– инв. опр-ние.



Чтобы получить max. пов-ную плотность циркуляции, нужно взять нормаль, соосную с ротором.

Ротор – напр-ние, в котором пов-ная плотность циркуляции максимальна.

Св-ва:

① линейность

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2) = \lambda_1\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}_1 + \lambda_2\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a}_2$$

② $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{c} = 0$, $\vec{c}$ – пост. вект. поле.

③ $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\varphi\cdot\vec{a}) = \varphi\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a} + [\vec{a}\times\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\varphi]$.

(Д-во св-во – из опр-ния ротора).

Билет №20

2.Дать определение равномерной сходимости функционального ряда. Доказать признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

Ф-ный ряд – это ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, члены которого – ф-ции $u_n(x)$ опр-ные в некоторой области V.

Поточечная сходимость: ф-ный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ наз-ся сходящимся в т. x, если $\{S_n(x)\}$ сходится к $S(x)$ или

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon, x) : \forall n > N\ |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

Критерий Коши поточечной сходимости ряда:

Для того, чтобы $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходился в т. x, необходимо и достаточно, чтобы

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon, x)\ \forall n > N,\ \forall p \geq 0$

$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = |u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$.

Все точки, в которых ряд сходится, сост. область сход-ти ряда.

Равномерная сходимость: ф-ный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ наз-ся равномерно сходящимся в области V, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n > N\ \forall x \in V\ |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$

Критерий Коши равномерной сходимости ряда:

Для того, чтобы $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходился в области V, необходимо и достаточно, чтобы

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall x \in V,\ \forall n > N,\ \forall p \geq 0$

$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = |u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$.

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда:

пусть члены ф-ного ряда $u_n(x)$ можно ограничить по модулю в области V членами сходящегося числового знакоположительного ряда, $|u_n(x)| < c_n,\ \forall x \in V,\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n = C$.

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится в области V.

Д-во:

Т.к. числовой ряд сходится, то для него выполнен критерий Коши:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n > N,\ \forall p \geq 0$

$|c_{n+1} + \ldots + c_{n+p}| = c_{n+1} + \ldots + c_{n+p} < \varepsilon$.

Тогда:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) > 0\ \forall x \in V,\ \forall n > N,\ \forall p \geq 0$

$|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < |u_{n+1}(x)| + \ldots + |u_{n+p}(x)| < c_{n+1} + \ldots + c_{n+p} < \varepsilon$.

Т.о. выполнен критерий Коши равномерной сходимости ряда, и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в области V равномерно.

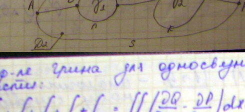
Билет №21

1.Вывести формулу Грина для многосвязной области.

Пусть кусочно-гладкие контуры $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ лежат внутри контура γ и вне друг друга. Пусть $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные пр-ные по переменным x, y в области м/у контурами и на самих этих контурах. Тогда:

$$\oint_{\gamma} P\,dx + Q\,dy - \sum_{k=1}^{n} \oint_{\gamma_k} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Д-во:



29

По ф-ле Грина для односвязной области:

$$\int_{AB} + \int_{BmC} + \int_{CD} + \int_{DeE} + \int_{EF} + \int_{FtA} = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$\int_{FE} + \int_{EkD} + \int_{DC} + \int_{CnB} + \int_{BA} + \int_{AsF} = \iint_{D_2} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$\Rightarrow \int_{FtAsF} + \int_{BmCnB} + \int_{DeEkD} = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy;$$

$$\oint_{\gamma} P\,dx + Q\,dy - \oint_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy - \oint_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

Теорема д-на для $n=2$. Для $n>2$ – д-во аналогичное.

Билет №21

2.Вывести признак Даламбера сходимости знакоположительного числового ряда.

① Конечная форма признака Даламбера

Пусть $\forall n > N\ a_{n+1}/a_n \leq q < 1$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть $\forall n > N\ a_{n+1}/a_n \geq q > 1$, тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Д-во:

1. пусть $\forall n\ a_{n+1}/a_n \leq q < 1$.

тогда $a_{n+1} \leq q a_n \leq q^2 a_{n-1} \leq \ldots \leq q^n a_1$.

Все члены ряда не превосходят членов б/у геометр. прогрессии $a_1, q a_1, q^2 a_1, \ldots$. След-но, ряд сход. по 1-ому признаку сравнения.

2. пусть $\forall n\ a_{n+1}/a_n \geq q > 1$

тогда $a_2 \geq q a_1 > a_1;\ a_3 \geq q a_2 > q^2 a_1$

$a_n \geq q^{n-1} a_1 > a_1$

Т.о. $a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$, т.е. не выполнен необходимый признак сходимости, и ряд расходится.

② Предельная форма признака Даламбера

Пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$; тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится.

Пусть $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$; тогда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q = 1$, то признак не позволяет сделать вывод о сходимости или расходимости ряда.

Д-во:

1. Пусть $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$; тогда

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n > N\ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - q\right| < \varepsilon$

$q - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon$

Выберем малое ε: $q + \varepsilon = \tilde{q} < 1$

Тогда $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q + \varepsilon < 1$ –

– по конечной форме признака Даламбера ряд сходится.

2. Пусть $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q > 1$; тогда

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n > N\ \left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - q\right| < \varepsilon$.

Выберем малое ε: $q - \varepsilon > 1$.

Тогда: $a_{n+1} > a_n\ \forall n$, т.е. $a_n \underset{n\to\infty}{\not\to} 0$,

т.е. ряд расходится.

55

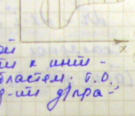
Билет №22

1.Вывести формулу Грина для односвязной области.

Пусть G – плоская односвязная область с кусочно-гладкой границей L. Пусть ф-ции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные пр-ные по своим переменным в обл. G и на L. Тогда справедлива ф-ла Грина:

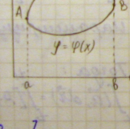
$$\boxed{\oint_L P\,dx + Q\,dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy}$$

Д-во:



① G можно представить как объединение конечного числа прав. областей.

Инт-л по произвольной области можно свести к инт-лам по правильным областям. Т.о. ф-лу Грина можно д-ть д/правильной области.



② Т.к. P, Q произвольны, то должно вып-ся:

$\oint_L P\,dx = -\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy$

$\oint_L Q\,dy = \iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} dx\,dy$

$$-\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy = -\int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy\right] dx =$$

$$= -\int_a^b P(x, \psi(x))\,dx + \int_a^b P(x, \varphi(x))\,dx =$$

$$= \int_{BkA} P\,dx + \int_{AkB} P\,dx = \oint_L P\,dx$$

Билет №22

2.Дать определение равномерной сходимости функционального ряда. Доказать признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

Ф-ный ряд – это ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, члены которого – ф-ции $u_n(x)$ опр-ные в некоторой области V.

Поточечная сходимость: ф-ный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ наз-ся сходящимся в т. x, если $\{S_n(x)\}$ сходится к $S(x)$ или

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon, x) : \forall n > N\ |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$.

Критерий Коши поточечной сходимости ряда:

Для того, чтобы $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходился в т. x, необходимо и достаточно, чтобы

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon, x)\ \forall n > N,\ \forall p \geq 0$

$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = |u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$.

Все точки, в которых ряд сходится, сост. область сход-ти ряда.

Равномерная сходимость: ф-ный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ наз-ся равномерно сходящимся в области V, если

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n > N\ \forall x \in V\ |S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$

Критерий Коши равномерной сходимости ряда:

Для того, чтобы $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходился в области V, необходимо и достаточно, чтобы

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall x \in V,\ \forall n > N,\ \forall p \geq 0$

$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = |u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$.

Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда:

пусть члены ф-ного ряда $u_n(x)$ можно ограничить по модулю в области V членами сходящегося числового знакоположительного ряда, $|u_n(x)| < c_n,\ \forall x \in V,\ \sum_{n=1}^{\infty} c_n = C$.

Тогда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится в области V.

Д-во:

Т.к. числовой ряд сходится, то для него выполнен критерий Коши:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) : \forall n > N,\ \forall p \geq 0$

$|c_{n+1} + \ldots + c_{n+p}| = c_{n+1} + \ldots + c_{n+p} < \varepsilon$.

Тогда:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) > 0\ \forall x \in V,\ \forall n > N,\ \forall p \geq 0$

$|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < |u_{n+1}(x)| + \ldots + |u_{n+p}(x)| < c_{n+1} + \ldots + c_{n+p} < \varepsilon$.

Т.о. выполнен критерий Коши равномерной сходимости ряда, и $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится в области V равномерно.

Билет №23

1.Циркуляция векторного поля. Сформулировать теорему Стокса.

Циркуляция векторного поля:

$$Ц_L(\bar{a}) = \oint_L P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Теорема Стокса:

Пусть пространственно односвязная область V содержит кусочно гладкую пов-ть σ с кусочно гладкой границей γ. Пусть компоненты векторного поля P, Q, R непрерывны и имеют непрерывные частные пр-ные по своим аргументам в V. Тогда справедлива ф-ла Стокса:

$$\iint_{\sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dx\,dz = \oint_{\gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

или: $\boxed{П_{\sigma}(\overrightarrow{rot}\,\vec{a}) = Ц_{\gamma}(\vec{a})}$.

Билет №23

2. Вывести интегральный признак Коши сходимости знакоположительного ряда. Исследовать ряд Дирихле.

Числовой ряд наз-ся знакоположительным, если все его члены - полож. числа: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$.

S_n - неубывающая ф-ция отн-но n. Поэтому достаточно установить что S_n огр. сверху; тогда ряд сход. по т. Вейерштрасса.

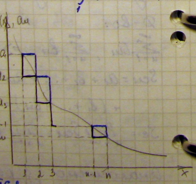
Инт-ный признак Коши:

Пусть при $x \geq 1$ опр-на непрерывная, невозрастающая ф-ция $f(x)$, такая, что $f(n) = a_n$, $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда сходится несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Д-во:

$$S_n - a_1 < \int_1^n f(x)dx < S_n - a_n$$

$$\begin{cases} S_n - a_1 = a_2 + a_3 + \ldots + a_n \\ S_n - a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} \end{cases}$$



1) Необходимость

Пусть ряд сходится.

Тогда $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Тогда: $S_n - a_n < S - a_n < S$.

Значит $\int_1^n f(x)dx$ - неубывающая и огранич. ф-ция.

Тогда по т. Вейерштрасса:

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int_1^n f(x)dx = \int_1^{+\infty} f(x)dx,$$

т.е. несобственный инт-л сход-ся.

2) Достаточность

Если инт-л сходится, то

$$S_n < a_1 + \int_1^n f(x)dx < a_1 + \int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

Т.о. послед-ть $\{S_n\}$ - неубывающая и огр. сверху. Тогда по теореме Вейерштрасса $\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Следствие: для того чтобы ряд расходился, необходимо и достаточно, чтобы расходился $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

Рассмотрим ряды Дирихле: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b x^{-p}dx =$$

$$= \lim_{b\to\infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^b = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & p > 1 \\ \infty & p < 1 \end{cases}$$

51

Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расх.

Т.о. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ сход. при $p > 1$, расх. при $p \leq 1$.

Билет №24

1.Поток векторного поля. Вывести формулу Остроградского-Гаусса.

Векторное поле: каждой точке области поставлен в соответствие вектор $\vec{a}(M)$.

Ф-ла О-Г:

Пусть компоненты вект. поля $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывна и имеют непрерывные частные пр-ные в пространственно односвязной замкнутой области V и на ее кусочно гладкой границе σ. Тогда:

$$\oint\!\!\oint_\sigma P dydz + Q dxdz + R dxdy =$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV.$$

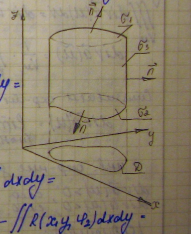
Д-во:

(1) Т.к. P, Q, R - произвольны, то можно доказывать отдельно ф-лу для P, для Q и для R.

Докажем: $\oint\!\!\oint_\sigma R dxdy = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dV$

(2) Д-во можно проводить для цилиндрического тела с образующими, $\parallel$ оси Oz.

(3) $\sigma_1: z = \varphi_1(x,y)$ $\quad \sigma_2: z = \varphi_2(x,y)$.



$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dV =$$

$$= \iint_D \left(\int_{\varphi_2}^{\varphi_1} \frac{\partial R}{\partial z} dz\right) dxdy =$$

$$= \iint_D [R(x,y,\varphi_1(x,y)) -$$

$$- R(x,y,\varphi_2(x,y))] dxdy =$$

$$= \iint_D R(x,y,\varphi_1) dxdy - \iint_D R(x,y,\varphi_2) dxdy =$$

$$= \iint_{\sigma_1} R dxdy + \iint_{\sigma_2} R dxdy + \iint_{\sigma_3} R dxdy = \oint\!\!\oint_\sigma R dxdy,$$

что и т.д.

Билет №24

2. Ряд Тейлора. Вывести условие разложения бесконечно дифференцируемой функции в ряд Тейлора. Ряд Маклорена. Разложить в ряд Маклорена функцию функцию $y=e^x$

Ряд Тейлора

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ - ряд Тейлора

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} x^n$ - $(x_0=0)$ - ряд Маклорена.

Теорема

Степенной ряд - есть ряд Тейлора для своей суммы.

Д-во:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n =$$

$$= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$$

$f(x_0) = a_0 + \ldots$

$$f'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} = a_1(x-x_0)^0 + 2a_2(x-x_0)^1 \ldots$$

$f'(x_0) = a_1$

$$f''(x_0) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(x-x_0)^{n-2} = 2a_2 + 6a_3(x-x_0).$$

$f''(x_0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$

$f'''(x_0) = 6a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f'''(x_0)}{6}$

$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

ч.т.д.

Следствие: разложение ф-ции в степенной ряд единственно.

Разложение в ряд Маклорена основных элемент. ф-ций

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)$$

1. e^x

$(e^x)' = xe^x$

$(xe^x)'' = x^2 e^x$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Билет №25

1.Вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат. Замена переменных в троном интеграле. Тройной интеграл с сферической системе координат.

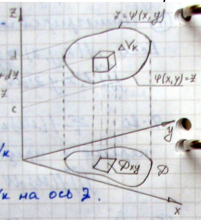
V - правильная область.

cd - проекция области на ось z.

D - проекция V на пл-ть Oxy

Dxy - проекция ΔV_k на пл-ть Oxy

dz - проекция ΔV_k на ось z.



Тройной интеграл:

1) берем столбец и перемещаем его по проекции на пл-ти Oxy:

$$\iint_D \left[\int_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} f(x,y,z)dz\right] dxdy$$

2) берем слои и перемещаем их вдоль оси Oz:

$$\int_c^d \left[\iint_{D_z} f(x,y,z) dxdy\right] dz.$$

И в том и в другом случае тройной интеграл сводится к определенному и двойному интегралам.

Теорема: пусть установлена взаимно-однозначное соответствие областей V_{xyz} и V_{uvw} с помощью ф-ций $x = \varphi(u,v,w)$, $y = \psi(u,v,w)$, $z = \lambda(u,v,w)$, непрерывных в V_{uvw} и имеющих в ней непрерывные частные пр-ные; пусть $f(x,y,z)$ непрерывна в V_{xyz}, тогда:

$$\iiint_{V_{xyz}} f(x,y,z)dxdydz =$$

$$= \iiint_{V_{uvw}} f(x,y,z)\cdot|J|\,dudvdw,$$

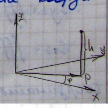
где

$$J = \begin{vmatrix} \partial\varphi/\partial u & \partial\varphi/\partial v & \partial\varphi/\partial w \\ \partial\psi/\partial u & \partial\psi/\partial v & \partial\psi/\partial w \\ \partial\lambda/\partial u & \partial\lambda/\partial v & \partial\lambda/\partial w \end{vmatrix}$$

- якобиан преобразования.

Цилиндрическая система координат:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = h \end{cases}$$



$\Rightarrow J = \rho$

15

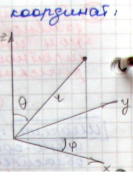
Сферическая система координат:

$x = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\sin\varphi$

$z = r\cdot\cos\theta$

$\Rightarrow J = r^2\sin\theta$.



10 Вывести формулы

Билет №25

2.Доказать, что степенной ряд является рядом Тейлора для своей суммы.

Теорема

Степенной ряд - есть ряд Тейлора для своей суммы.

Д-во:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n =$$

$$= a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$$

$f(x_0) = a_0 + \ldots$

$$f'(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1} = a_1(x-x_0)^0 + 2a_2(x-x_0)^1 \ldots$$

$f'(x_0) = a_1$

$$f''(x_0) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(x-x_0)^{n-2} = 2a_2 + 6a_3(x-x_0).$$

$f''(x_0) = 2a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$

$f'''(x_0) = 6a_3 \Rightarrow a_3 = \frac{f'''(x_0)}{6}$

$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$

ч.т.д.

Следствие: разложение ф-ции в степенной ряд единственно.