

Глава 6. ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН (СВЕТА).

6.1. ПРИНЦИП ГЮЙГЕНСА-ФРЕНЕЛЯ.

6.1.1. Определение.

Дифракцией электромагнитных волн называется совокупность явлений, наблюдаемых при их распространении в среде с резко выраженными неоднородностями, которые приводят к перераспределению энергии волнового поля.

Явление дифракции, как и интерференции, присуще электромагнитным волнам любой частоты, но непосредственно наблюдать их мы можем только для света. В остальных случаях приходится использовать специальные приборы, регистрирующие интенсивность волны.

Исторически первые представления о дифракции связывались с явлением огибания светом препятствий, т.е. его проникновением в область геометрической тени прямых лучей, проведенных от источника через границы препятствия. Огибание звуковыми волнами различных препятствий постоянно встречается в повседневной жизни. Простейшие опыты позволяют также легко установить, что явление огибания сопровождается интерференцией волн вблизи геометрической тени.

Отсюда следует, что между дифракцией и интерференцией нет существенного различия. Оба явления - результат перераспределения интенсивности волнового поля вследствие суперпозиции волн.

Как известно, свет из-за малой длины волны во многих оптических устройствах можно приближенно считать распространяющимся вдоль некоторых геометрических линий. В однородной среде это прямые линии. Дифракция приводит к отклонению процесса распространения света от законов геометрической оптики, демонстрирующему его волновую природу.

Всякая дифракционная задача при строгом анализе сводится к решению соответствующих волновых уравнений (например, уравнений Максвелла) с использованием физически обоснованных условий определения волн на поверхностях неоднородностей (граничных условий). Однако в большинстве случаев из-за сложности дифракционных задач точные решения получить не удастся. Анализ приходится проводить различными приближенными методами.

Первая волновая трактовка дифракции дана Т. Юнгом (1800г.), вторая – О. Френелем (1815г.).

6.1.2. Принцип Гюйгенса – Френеля.

Принцип Гюйгенса – Френеля составляет основу для простейшего построения приближенных решений в случае целого ряда дифракционных задач. Строгий анализ выявляет целый ряд недостатков гипотезы. Однако во многих случаях она в основном дает правильные ответы, причем легко устанавливается физический механизм явления. Поэтому в дальнейшем изложении этот принцип будет основным.

Принцип содержит ряд положений:

1. Все точки волновой поверхности S_t (рис.6.1) в момент времени t (от источника S_0) являются элементарными источниками вторичных волн, а огибающая этих волн $S_{t+\Delta t}$ – волновая поверхность в следующий момент времени $t + \Delta t$ (принцип Гюйгенса, 1648г.). При этом постулируется, что в однородной среде вторичные сферические волны излучаются только вперед, как указано стрелками на рис. 6.1.

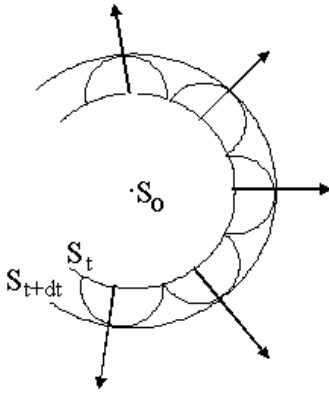


Рис. 6.1. Схема, поясняющая принцип Гюйгенса

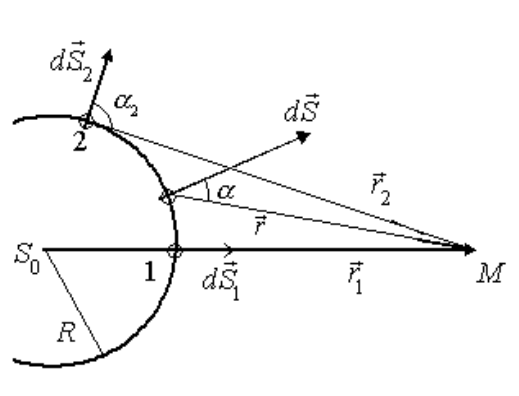


Рис. 6.2. Схема, поясняющая принцип Гюйгенса - Френеля.

2. Все элементарные источники когерентны между собой, а испускаемые ими вторичные волны интерферируют (Френель, 1818г.).

Согласно этому принципу, в некоторый момент t источник S_0 можно заменить эквивалентной ему системой вторичных источников на волновой поверхности S_t . Вторичные источники dS – бесконечно малые элементы поверхности, положение которых характеризуется вектором \vec{dS} , направленным по нормали к площадке dS (рис. 6.2). В точке наблюдения M интерферируют волны от всех элементарных источников. Амплитуда dE_m каждой элементарной волны, дошедшей до точки M , зависит от величины самой площадки dS , расстояний от нее до источника (R) и до точки $M(r)$, и угла α между \vec{dS} и \vec{r} (рис.6.2):

$$dE_m = \frac{A(R)}{r} \cdot f(\alpha) \cdot dS \quad (6.1)$$

где $A(R)$ – амплитуда колебаний, соответствующая единичной поверхности, которая зависит от R ; $f(\alpha)$ – функция от угла α , которая монотонно убывает от 1 при $\alpha = 0$ до 0 при $\alpha \geq \pi/2$ (см. рис. 6.2, соответственно площадки 1 и 2).

Результат, наблюдаемый в точке M – интерференция от множества когерентных источников (элементов dS), непрерывно распределенных по поверхности S_t .

Элементарная волна, пришедшая в точку наблюдения M с учетом (6.1) имеет вид:

$$dE(\vec{r}, t) = \frac{A(R)}{r} \cdot f(\alpha) \cdot dS \cdot e^{i(\omega t - k\vec{r} - \varphi(R))}, \quad (6.2)$$

где $\varphi(R)$ – фаза поля на поверхности S_t с координатой R . Выражение для результирующей волны (полного поля) в т. M , учитывая непрерывность элементарных источников, записывают в виде:

$$E(\vec{r}, t) = \int_s \frac{A(R)}{r} \cdot f(\alpha) \cdot e^{i(\omega t - k\vec{r} - \varphi(R))} \cdot dS \quad (6.3)$$

смысл $E(\vec{r}, t)$ - закон колебаний электрического поля электромагнитной волны в точке M .

6.1.3. Метод зон Френеля – качественный расчет поля.

В общем случае расчет полей с помощью (6.3) достаточно сложен. Однако, в целом ряде задач конечный результат легко получить, не применяя формулу (6.3). Такой качественный расчет был предложен Френелем. Суть метода заключается в том, что волновую поверхность разбивают на кольцевые участки – зоны рис. (6.3).

Для этого из точки наблюдения M проводят вспомогательные сферические поверхности, пересекающие поверхность S_t . Первую сферу проводят радиусом $r_0 + \lambda/2$, радиус каждой последующей сферы отличается от предыдущей также на $\lambda/2$. При таком построении колебания, возбуждаемые в точке M двумя соседними зонами,

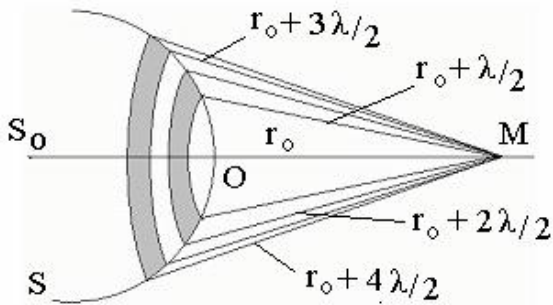


Рис.6.3. Разбиение волновой поверхности на зоны Френеля

противоположны по фазе, так как разность от сходственных точек этих зон равна $\lambda/2$. Например, каждой точке в первой зоне найдется такая сходственная точка во второй зоне, расстояние от которых до точки М, отличаются на $\lambda/2$. Следовательно, волны от двух соседних зон придут в точку М в противофазе, амплитуда результирующей волны окажется равной разности амплитуд, и в этой точке будет наблюдаться минимум.

От всей волновой поверхности амплитуда результирующей волны в точке М будет равна

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 \dots \pm A_i, \quad (6.4)$$

где А – амплитуда колебаний в точке М, возбуждаемая всеми вторичными источниками находящимися в пределах i-ой зоны. В (6.4) для удобства, амплитуды обозначены буквой А, вместо E_m .

Можно доказать, что при таком построении зон, их площадки при $r_0 \gg m\lambda$ примерно равны. Расстояние r_i (рис. 6.2) с увеличением номера зоны растут, поэтому соответствующие амплитуды монотонно уменьшаются ($A_1 > A_2 > A_3 \dots > A_i$).

Т. к. амплитуды от соседних зон имеют близкие значения, то приближенно можно считать, что $A_i = \frac{1}{2}(A_{i-1} + A_{i+1})$ и т.д.

Заменяв все четные амплитуды на $A_2 = \frac{1}{2}(A_1 + A_3)$ и $A_4 = \frac{1}{2}(A_3 + A_5)$ и т. д., представим (6.4) в виде:

$$A = A_1 - \frac{A_1}{2} - \frac{A_3}{2} + A_3 - \frac{A_3}{2} - \frac{A_5}{2} + A_5 - \frac{A_5}{2} - \frac{A_7}{2} + \dots \cong \frac{A_1 \pm A_N}{2}, \quad (6.5)$$

где минус для четного, а плюс для нечетного N числа зон.

При $N \gg 1$

$$A; \frac{1}{2} A_1 \quad I = \frac{I_1}{4} \quad (6.6)$$

Из (6.6) следует, что результирующая амплитуда и интенсивность в точке М от полного открытого фронта волны $N \gg 1$ составляют соответственно половину амплитуды и четверть интенсивности при открытой только первой зоне.

Для света практически всегда $R + r_0 \gg \lambda$ и, соответственно, размер центральной зоны очень мал. Это является основанием для использования в геометрической оптике предположения о прямолинейном распространении света (в виде лучей).

6.1.4. Метод графического сложения амплитуд.

Приближенно решить задачу о распространении света от источника до точки наблюдения можно методом графического сложения амплитуд. Для этого каждую зону Френеля мысленно разбивают на одинаковое число равных бесконечно тонких кольцевых подзон. Учитывая предыдущие рассуждения, очевидно, что амплитуды колебаний, создаваемых такими подзонами в точке наблюдения М, медленно убывают, при переходе от зоны к зоне, а каждое следующее колебание отстает по фазе от предыдущего на одну и ту же величину.

Векторная диаграмма, качественно построенная для подзон первой и второй зон Френеля показана на рис. 6.4а. От точки О до A_1 сложены амплитуды ΔA_1 всех подзон, принадлежащих первой зоне. Все векторы ΔA_1 одинаковы по модулю, угол между ними

равен δ - сдвигу по фазе между подзонами. Разность фаз между центральной (первой) и последней подзонами первой зоны Френеля равен π , поэтому вектор OA_1 – результат векторного сложения амплитуд всех подзон. Он равен по модулю амплитуде колебаний в точке M , возбуждаемых первой зоной Френеля. Начиная от точки A_1 , отложены векторы амплитуд подзон второй зоны Френеля. Поскольку величина этих амплитуд меньше, в точке O диаграмма не замкнется, а закончится в точке A_2 . Модуль вектора A_1A_2 (серый цвет) равен амплитуде, которая была бы, если открыта только вторая зона Френеля.

Модуль вектора OA_2 равен амплитуде колебаний в точке M при двух открытых зонах.

В пределе, при стремлении амплитуд кольцевых подзон к нулю, количество их будет неограниченно возрастать и векторная диаграмма примет вид спирали (рис. 6.4.б)

заканчивающейся в точке C . Модуль вектора OC равен результирующей амплитуде колебаний в точке M , возбуждаемой всей волновой поверхностью. Такая спиральная диаграмма позволяет вычислить значение амплитуды поля при любом числе открытых зон. Например, длина вектора OM на рис. 6.4б дает амплитуду поля в M для 3,5 открытых зон Френеля и т.д. Однако определение шага спирали требует точных расчетов.

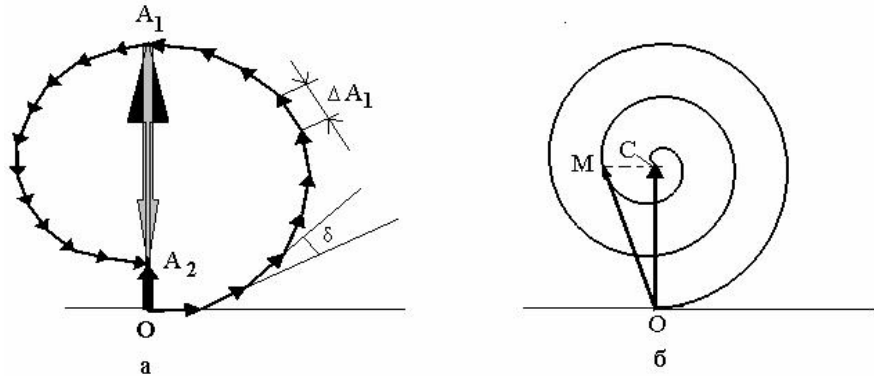


Рис. 6.4. Построение векторной диаграммы: а) – для двух первых зон Френеля; б) – для всей волновой поверхности.

6.1.5. Виды дифракции.

Различают два случая дифракции света: дифракцию Френеля, или дифракцию в сходящихся лучах, и дифракцию Фраунгофера, или дифракцию в параллельных лучах. В первом случае на препятствие падает сферическая или плоская волна, а дифракционная картина наблюдается на экране на конечном расстоянии от препятствия. Во втором случае на препятствие падает плоская волна, а дифракционная картина должна наблюдаться в бесконечности, т. е. в параллельных лучах. Для того, чтобы фиксировать результат на конечном расстоянии, после препятствия на пути света устанавливают собирающую линзу, в фокальной плоскости которой наблюдается дифракционная картина.

Таким образом, дифракция Фраунгофера наблюдается в дальней зоне, т. е. должно выполняться условие (5.63) $l \gg d^2/\lambda$, где теперь d – характерный размер препятствия (участка, отверстия, пропускающего свет, волну и т. д.), l – расстояние до приемника излучения.

Анализ этих видов дифракции начнем с дифракции Фраунгофера, поскольку получение количественных результатов для нее оказывается более простым.

6.2. ДИФРАКЦИЯ ФРАУНГОФЕРА.

6.2.1. Дифракция от одной щели.

Пусть плоская монохроматическая волна падает перпендикулярно на непрозрачную преграду, в которой имеется щель шириной a и длиной l . Когда фронт волны коснется преграды, основная часть энергии будет поглощена. Останется открытой только часть волновой поверхности, которая совпадает с плоскостью щели. Все точки волновой поверхности согласно принципу Гюйгенса - точечные источники элементарных волн, колеблющиеся в одинаковых фазах. От каждого точечного источника вторичные

волны распространяются во все стороны вперед от щели. На рис. 6.5 представлено поперечное сечение преграды со щелью. Как видно, происходит огибание волной краев щели.

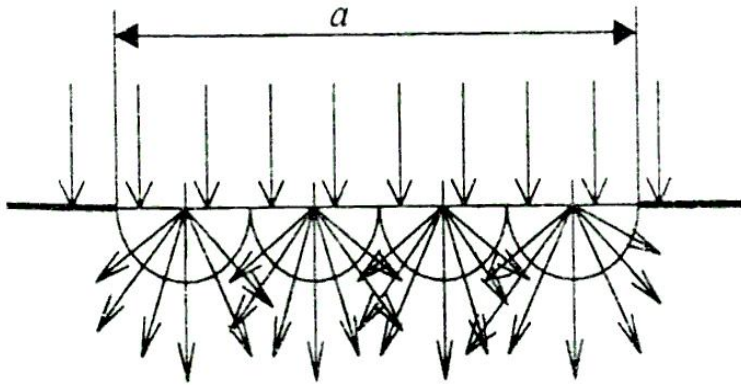


Рис. 6.5. Поперечное сечение преграды со щелью

параллельные лучи будут собираться в одной точке фокальной плоскости линзы L_2 . При этом сдвиг фаз от разных элементов так же, как и в случае кольцевых подзон Френеля, будет зависеть от направления лучей (угла φ). Следовательно, для качественного анализа процесса можно использовать метод зон Френеля (в случае щели такие зоны часто называют зонами Шустера).

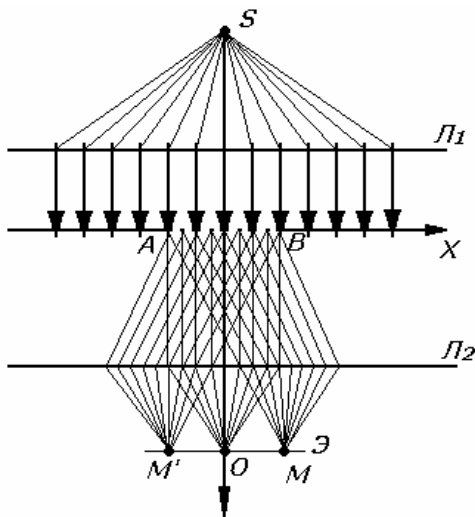


Рис.6.6. Экспериментальное наблюдение дифракции Фраунгофера с помощью линзы

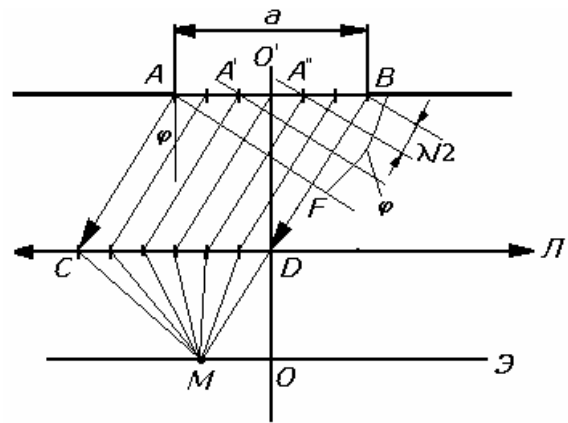


Рис.6.7. К расчету дифракционной картины при дифракции Фраунгофера на щели.

Выделим элементарные волны, распространяющиеся от всех точек плоскости щели АВ в произвольном направлении под некоторым углом φ к нормали $O'O$. На рис. 6.7 АС и ВD - лучи от крайних точек щели, ограничивающие весь поток элементарных волн. Разобьем фронт волны (поверхность щели) на равновеликие участки (зоны) вспомогательными плоскостями, перпендикулярными к АС и ВD и отстоящими друг от друга на расстоянии, равном $\lambda/2$ (проекция первой плоскости - АF, точка В лежит на проекции последней плоскости на рис. 6.7).

На нашем условном рисунке щель оказалась разделенной на три равные зоны и видны их «торцы» AA^1 , $A'A''$ и $A''B$ ($A'A'' = A''B$). Полученные зоны можно рассматривать как систему когерентных источников, имеющих одинаковые фазы и амплитуды колебаний. Разность хода волн от этих источников равна $\lambda/2$. Если число таких зон равно 2, то под этим углом (и, соответственно, в точке М на экране) будет наблюдаться

Чтобы на практике осуществить дифракцию Фраунгофера на щели, можно источник монохроматического света S_0 поместить в фокусе собирающей линзы L_1 (рис. 6.6), а результат интерференции (дифракционную картину) наблюдать в фокальной плоскости второй линзы L_2 на экране Э. От каждого элементарного кусочка dx щели (см. также рис. 6.10)

минимум. Для изображенного на рис.6.7 угла φ получаем максимум (получилось 3 «зоны» Френеля).

Количество зон Z , которые уложились на щели под данным углом φ (рис.6.7), равно разности хода BF между лучами AC и BD , деленной на $\lambda/2$.

$$Z = \frac{BF}{\frac{\lambda}{2}} = \frac{a \sin \varphi}{\frac{\lambda}{2}}, \quad (6.7)$$

Таким образом, зоны можно не строить, а просто найти их число по разности хода BF . Если под данным углом на щели укладывается нечетное число зон, а значит, на разности хода BF - нечетное число полуволн, то в точке M наблюдается дифракционный максимум. Интенсивность этого максимума соответствует действию одной зоны. Если на щели укладывается четное число зон (на BF укладывается четное число полуволн), то в точке M наблюдается дифракционный минимум.

Из соотношения (6.7) следует:

а) условие максимумов интенсивности

$$Z = \frac{a \sin \varphi}{\frac{\lambda}{2}} = \pm(2m+1), \quad a \sin \varphi = \pm(2m+1) \frac{\lambda}{2} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (6.8)$$

б) условие минимумов интенсивности

$$Z = \frac{a \sin \varphi}{\frac{\lambda}{2}} = \pm 2m, \quad a \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (6.9)$$

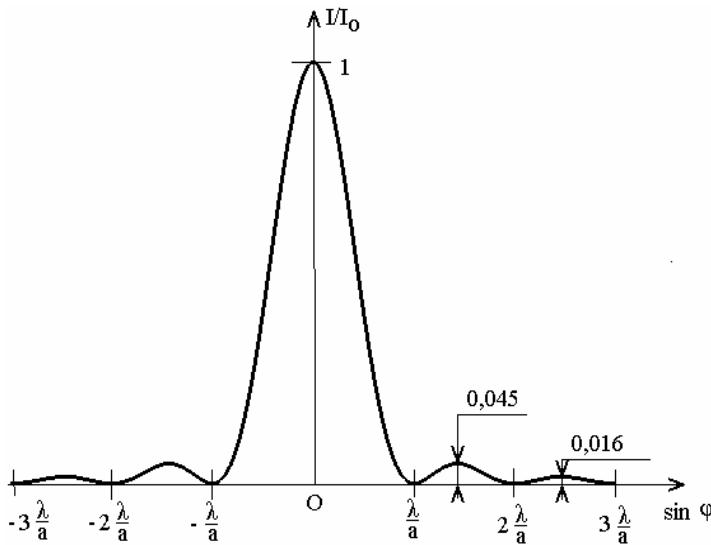


Рис. 6.8. Зависимость интенсивности света от $\sin \varphi$ при дифракции Фраунгофера на щели

Число m называют порядком дифракционного максимума. В условия (6.8) не входит максимум при $\varphi = 0$. Щель в этом направлении действует как одна зона Френеля и поэтому в точке O на экране всегда наблюдается самый яркий центральный дифракционный максимум. Качественная зависимость интенсивности света на экране от $\sin \varphi$ - дифракционный спектр, полученный от дифракции на щели, приведен на рис. 6.8.

Используя соотношения (6.8) и (6.9), можно заранее, зная ширину щели a и длину волны λ , рассчитать положение боковых

максимумов и минимумов. Однако попытка определить значение интенсивности в максимумах по числу открытых зон приводит к неверному результату. Так, второй максимум имеет место при трех открытых зонах. Казалось бы $I_{2\max} = 0,09I$, на самом деле $I_{2\max} = 0,045I$ (см. раздел 6.2.2).

Дифракционная картина зависит от соотношения между шириной щели a и длиной волны λ . Число максимумов, как и при интерференции, ограничено условием

$$\sin \varphi = \frac{(2m+1)\lambda}{2a} \leq 1 \quad (6.10)$$

Если $a \ll \lambda$, то вся поверхность щели меньше одной зоны Френеля для любого направления. Условие минимумов (6.9) не может выполняться даже для $m=1$. Щель в этом случае - тонкий линейный источник, от которого свет распространяется практически во всех направлениях. Интенсивность на экране в этом случае медленно убывает по мере

удаления от центра. Диаграмма направленности щели для $a=2\lambda$ при ее облучении плоской волной приведена на рис. 6.9 (дальняя зона!).

Чем шире щель (больше отношение a к λ), тем уже основной «лепесток» диаграммы. Так, при $a = 2\lambda$, равном $\Delta\varphi$, угловое расстояние между двумя первыми минимумами равно 60° (см. рис. 6.9.), а при $a=10^3\lambda$ - всего $\Delta\varphi \approx 0,1^\circ$.

Для света при $a \approx 0,05\text{мм}$ на длине 1 метр диаметр центрального пятна увеличивается на 1 мм (действительно получает ся луч!).

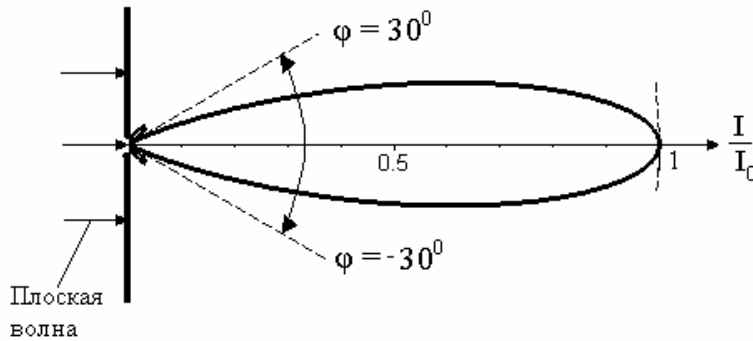


Рис.6.9. Диаграмма направленности дифракции Фраунгофера при $a=2\lambda$.

До сих пор предполагалось, что щель освещена монохроматическим светом. При освещении щели немонохроматическим светом боковые максимумы для разных цветов разойдутся, и каждый из них превратится в дифракционный спектр первого, второго и так далее порядков. Вид спектров зависит от природы источника.

Если это источник белого света, то спектры будут сплошными, обращенными к центру фиолетовым краем. Действительно как видно из (6.8), условие дифракционного максимума зависит от длины волны. Чем меньше длина волны, тем меньше угловое расстояние данного максимума от центрального. Наименьшая длина волны соответствует крайней фиолетовой части спектра, поэтому она будет ближе к центру. Центральный максимум в этом случае – белый и только по краям имеет радужную окраску.

6.2.2. Аналитический метод решения задач о дифракции на щели.

Главный недостаток метода зон Френеля – невозможность рассчитать интенсивность максимумов. Такой расчет можно сделать, решив задачу о многолучевой интерференции от непрерывно распределенных источников (подсчитав интеграл Френеля).

Разобьем волновую поверхность (поверхность щели) на очень узкие, шириной dx и длиной l полоски. Каждая из таких полосок – элементарный линейный источник. На рис. 6.10 показано сечение щели. За начало отсчета принята середина щели. Закон колебания в точке M , если туда приходит элементарная волна от источника с нулевой координатой, можно записать, приняв начальную фазу этой волны за ноль, в виде:

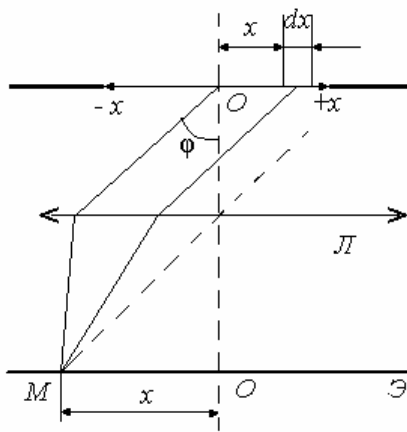


Рис. 6.10. К расчету дифракционной картины при дифракции на щели

$$dE(t) = dA_0 e^{i\omega t} \tag{6.11}$$

В (6.11) dA_0 – амплитуда элементарной волны, которую можно представить как $dA_0 = \frac{A_0 dx \cdot l}{a \cdot l} = \frac{A_0 \cdot dx}{a}$, где A_0 – амплитуда в точке M от всех источников на щели; $a \cdot l$ – площадь щели; $dx \cdot l$ – элементарная площадь.

От элемента dx , имеющего координату x , в точку M волна приходит, запаздывая по фазе на (рис. 6.10)

$$\delta\alpha = -k\Delta r = -kx \sin \varphi = -\frac{2\pi}{\lambda} \sin \varphi = 2\gamma x$$

Амплитуда волны от такого элемента в точке M будет равна

$$dA(x) = dA_0 e^{-i\delta\alpha} = dA_0 e^{-i2\gamma x \lambda}, \quad \gamma = \frac{\pi}{\lambda} \cdot \sin \varphi \tag{6.12}$$

Результирующая амплитуда от всех источников в т. M будет, с учетом их непрерывности, равна

$$A(\varphi) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dA(x) \cdot dx = \frac{A_0}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-i2\gamma x} dx = \frac{A_0}{\gamma a} \cdot \frac{1}{-2i} [e^{-i\gamma a} - e^{i\gamma a}] \tag{6.13}$$

Применив формулу Эйлера, получим

$$A(\varphi) = A_0 \cdot \frac{\sin(\gamma a)}{\gamma a} = A_0 \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin \varphi\right)}{\frac{\pi}{\lambda} a \sin \varphi} \quad (6.14)$$

Распределение интенсивности на экране имеет вид

$$I(\varphi) = I_0 \cdot \frac{\sin^2(\gamma a)}{\gamma^2 a^2} = I_0 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin \varphi\right)}{\left(\frac{\pi}{\lambda} a \sin \varphi\right)^2} \quad (6.15)$$

где I_0 – интенсивность в центре экрана.

1) Соотношения $\varphi = 0$, $\gamma = 0$ и $\sin \varphi = 0$ определяют условия главного (центрального) максимума.

Учитывая, что $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$, получим $A(0) = A_0$, $I(0) = I_0$.

2) Положение и значение побочных максимумов определяются из условия $\sin \gamma a = 1$ откуда (ср. с (6.8)):

$$\gamma a = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi = (2m+1) \frac{\pi}{2} \quad \text{или} \quad a \sin \varphi = (2m+1) \frac{\lambda}{2} \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (6.16)$$

Подставляя (6.16) в (6.15), получим

$$I_{m \max} = \frac{I_0}{(2m+1)^2 \frac{\pi^2}{4}} \quad (6.17)$$

3) Минимумы имеют место при условии (ср. с (6.9))

$$\sin \gamma a = 0 \quad \text{или} \quad \gamma a = \frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi = \pi m \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (6.18)$$

6.2.3. Дифракционная решетка.

Одномерная дифракционная решетка представляет собой ряд параллельных щелей одинаковой ширины a , разделенных между собой непрозрачными промежутками шириной b . Сумма $a+b = d$ называется периодом (постоянной) решетки (рис. 6.11).

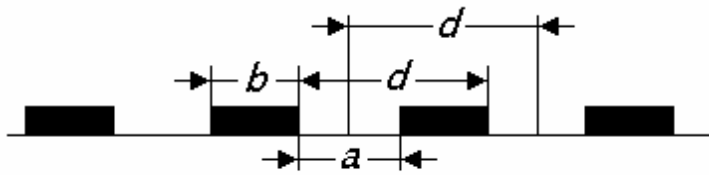


Рис.6.11. Дифракционная решетка

Для видимого спектра такую решетку обычно получают с помощью специальной делительной машины, которая наносит на стеклянную прозрачную пластинку ряд тонких параллельных штрихов (непрозрачных царапин)

одинаковой ширины b на равных расстояниях « a » друг от друга. «Прозарапанные штрихи» - непрозрачные промежутки, между которыми остаются прозрачные полосы – щели.

Для анализа дифракции Фраунгофера плоской волны на решетке очевидно можно воспользоваться формулой (5.81), подставив в нее зависимость $I_1(\varphi)$ в виде (6.15). Действительно. При выводе (5.81) вид зависимости $I_1(\varphi, \theta)$ не определялся. Поэтому формула справедлива и для периодически расположенных щелей.

Таким образом дифракционная картина от решетки на экране определяется формулой

$$I(\varphi) = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda} \sin \varphi\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} N \sin \varphi\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi\right)} \quad (6.19)$$

Формула показывает, что интерференционная картина от N источников в случае дифракционной решетки модулирована первым сомножителем, а именно дифракционной зависимостью углового распределения волнового поля от источников – щелей. Чем меньше отношение a/λ , тем более плавной получится эта зависимость. Рис. 6.12 иллюстрирует угловое распределение интенсивности после дифракционной решетки для $N = 4$ ($d/a = 3$, $a/\lambda = 2$) (ср. рис. 6.8).

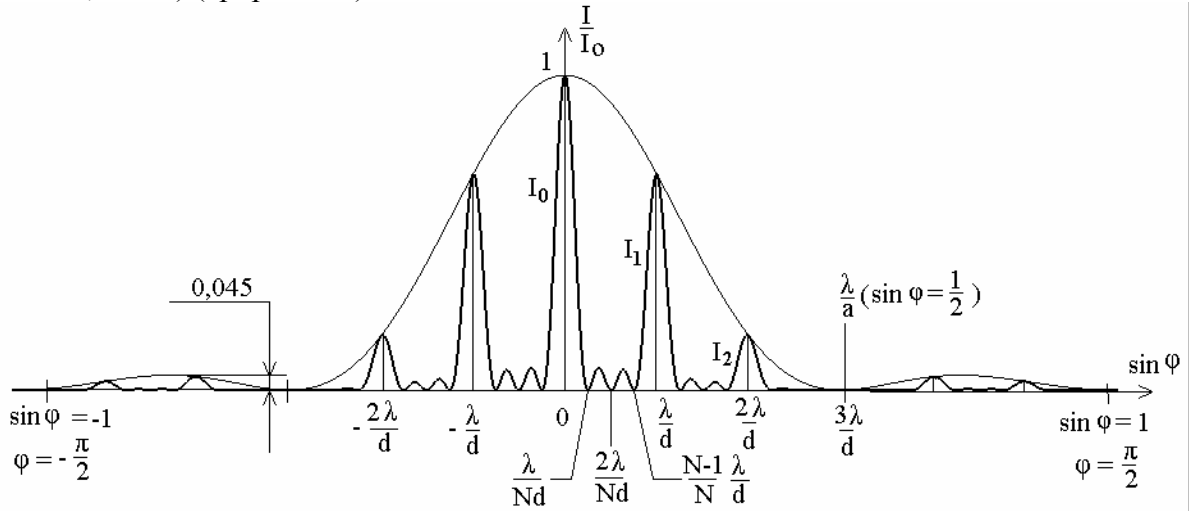


Рис.6.12. Зависимость интенсивности света от $\sin\varphi$ после дифракции на решетке.

Суммируя результаты, полученные от N источников (п. 5.3.5) и дифракции на щели (6.15), определяем условия дифракции на решетке:

а) Главные максимумы определяются условием образования главных максимумов при интерференции от N источников.

$$\sin\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\varphi\right) = 0 \quad \text{т. е.} \quad \left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\varphi\right) = \pi m \quad \sin\varphi = \lambda m/d, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (6.20)$$

максимумы нулевого, первого, i -го и т.д. порядков.

Интенсивность поля в главных максимумах I_{mi} в N^2 раз больше интенсивности от одной щели.

б) Хорошо наблюдаемыми являются главные максимумы, расположенные между первыми минимумами дифракционного распределения интенсивности от щели.

$$a\sin\varphi = \pm m\lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (6.21)$$

Минимумы у дифракционной решетки, определяемые условиями (6.21), называют главными.

Общее число главных максимумов, которые в принципе можно наблюдать на конкретной дифракционной решетке, определяется условием

$$\sin\varphi \leq 1 \quad \text{или} \quad m \leq d/\lambda.$$

Для рассмотренного случая ($d=6\lambda$, $m=6$) на рис. 6.12 один максимум отсутствует, т. к. совпадает с первым главным минимумом, общее число которых равно двум (второй при $\varphi=\pi/2$).

в) Между главными максимумами расположены дополнительные минимумы, положение которых в соответствии с (5.80), (5.82) определяется соотношением

$$\frac{\pi d N}{\lambda}\sin\varphi = \pm \pi m' \quad m' = 1, 2, \dots, N-1, N+1, \dots, 2N-1, 2N+1 \quad (6.22)$$

Дополнительные максимумы, которые можно найти из (6.19), имеют малую интенсивность и на фоне главных максимумов обычно не наблюдаются.

Условие (6.22) позволяет определить угловую ширину главных максимумов (см. (5.83)). Найдем, например, разность угловых положений минимумов, ближайших к главному максимуму первого порядка

$$\sin \varphi_{N-1} = \frac{N-1}{N} \frac{\lambda}{d} \quad \sin \varphi_{N+1} = \frac{N+1}{N} \frac{\lambda}{d}$$

$$\sin \varphi_{N+1} - \sin \varphi_{N-1} = 2 \sin \frac{\varphi_{N+1} - \varphi_{N-1}}{2} \cos \frac{\varphi_{N+1} + \varphi_{N-1}}{2}; \quad \Delta \varphi \cos \varphi_1 = \frac{2\lambda}{Nd}$$

где φ_1 – угловое положение максимума и учтено, что $\Delta \varphi \ll 1$.

Таким образом, угловая ширина максимума

$$\Delta \varphi_m \leq \frac{2\lambda}{Nd \cos \varphi_m} \quad (6.23)$$

При освещении решетки белым светом каждый, боковой максимум превращается в спектр. На экране наблюдается неокрашенный центральный максимум (только по краям появляется радужная окраска) нулевого порядка, а по обе стороны от него дифракционные спектры 1-го, 2-го и т.д. порядков. Фиолетовые края спектров обращены к центру.

Как видно, дифракционная решетка представляет собой спектральный прибор. В отличие от спектра, полученного при помощи призмы (дисперсионный спектр), отклоняются от центра меньше всего короткие волны, а больше всего длинные (красная часть спектра). Качественная картина, визуально наблюдаемая на экране при освещении решетки белым светом, представлена на рис. 6.13. Спектры 2-го, 3-го и больших порядков могут частично перекрываться.

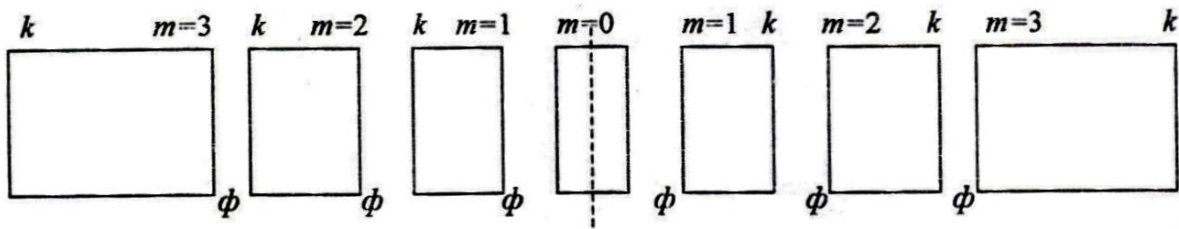


Рис.6.13. Качественная картина, наблюдаемая при освещении решетки белым светом

Если на решетку падает не белый свет и в нем содержатся лишь некоторые частоты светового спектра (например, излучение от ламп дневного света), то главные максимумы, кроме центрального, представляют собой набор спектральных линий или полос в зависимости от природы источника. Поэтому дифракционные решетки используют для спектрального анализа.

Наряду с прозрачными дифракционными решетками, используются отражательные дифракционные решетки. При их изготовлении на поверхность металлического зеркала алмазным резцом наносятся параллельные штрихи, поглощающие и рассеивающие свет. Зеркальные промежутки между ними аналогичны щелям. Дифракция наблюдается в отраженном свете при наклонном падении плоской волны на решетку. Вид дифракционной картины сходен с картиной от прозрачной решетки. Отражательные решетки, изготовленные на вогнутой поверхности, способны фокусировать излучение подобно линзе.

6.2.4. Дисперсия и разрешающая сила спектрального прибора.

Для проведения спектрального анализа при помощи дифракционной решетки важно знать ее возможности различения (разрешения) спектральных максимумов разных частот. Основными характеристиками спектральных приборов являются дисперсия и разрешающая способность. Дисперсия определяет угловое или линейное расстояние в приемнике прибора между двумя спектральными линиями с разной длиной волны.

Угловая дисперсия дифракционной решетки – угловая скорость перемещения дифракционного максимума при изменении длины волны

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} \quad (6.24)$$

Угловая дисперсия D определяет угловую ширину спектра. Она определяет «угловую скорость» перемещения дифракционного максимума при изменении частоты.

Если $\delta\varphi$ - угловое расстояние между максимумами двух спектральных линий, $\delta\lambda$ - разность длин волн, соответствующих этим линиям, то $D \approx \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda}$

Продифференцировав условие главных максимумов (6.20), без учета знака, получим: $d \cos \varphi \cdot d\varphi = m d\lambda$, откуда

$$D = \frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{m}{d \cos \varphi}. \quad (6.25)$$

Так как обычно используют небольшие углы, то $\cos \varphi \approx 1$ и

$$D \approx \frac{m}{d} \quad (6.26)$$

Из (6.26) видно, что угловая дисперсия тем выше, чем меньше период решетки.

Линейная дисперсия D_1 численно равна скорости смещения линии по плоскому экрану прибора (рис. 6.14) с изменением длины волны.

$$D_1 = \frac{\delta x}{\delta \lambda} \quad (6.27)$$

Из рисунка следует, что при небольших значениях углов φ линейная дисперсия D_1 связана с угловой дисперсией соотношением $D_1 = F' D$, где F' - фокусное расстояние до побочного фокуса линзы угла φ ($\delta x \approx \delta\varphi \cdot F'$)

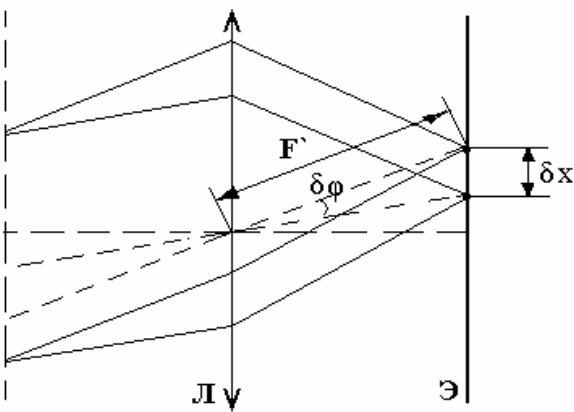


Рис.6.14. К определению понятия линейной дисперсии

поэтому при $\delta\varphi \ll 1$

$$D_1 = F' \frac{m}{d} \quad (6.28)$$

т.е. D_1 , в отличие от угловой дисперсии, зависит от свойств линзы. Угловая и линейная дисперсии характеризуют «растянутость» спектра. Из формул (6.26) и (6.28) видно, что чем больше порядок спектра, тем больше он растянут (тем больше расстояние от фиолетового до красного края спектра), тем лучше можно отличить (разрешить) одну линию от другой

Однако, возможность разрешить близкие линии зависит не только от ширины спектра или угловой дисперсии, но и от ширины линий, которые могут накладываться друг на друга.

Шириной спектральной линии (дифракционного максимума) называется расстояние между двумя ограничивающими его дифракционными минимумами.

Принято считать предельным случаем разрешения двух соседних линий условие, при котором максимум одной линии совпадает с ближайшим минимумом другой (критерий разрешения Рэля). На рис. 6.15 изображены зависимости интенсивности двух линий от длины волны λ (сплошные кривые) и суммарная интенсивность (пунктирная кривая).

В случае а) две соседние линии не разрешены, их нельзя отличить друг от друга, и они воспринимаются как одна линия. Случай б) соответствует предельному разрешению - критерию Рэля, эти линии уже можно разрешить (отличить) друг от друга. Разрешение

спектральных линий количественно оценивается разрешающей способностью (разрешающей силой) спектрального прибора равной

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}, \quad (6.29)$$

где $\delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ - разность длин волн, соответствующих центрам спектральных

максимумов (рис 6.15 б)), при котором выполняется критерий Рэлея; за λ можно принять

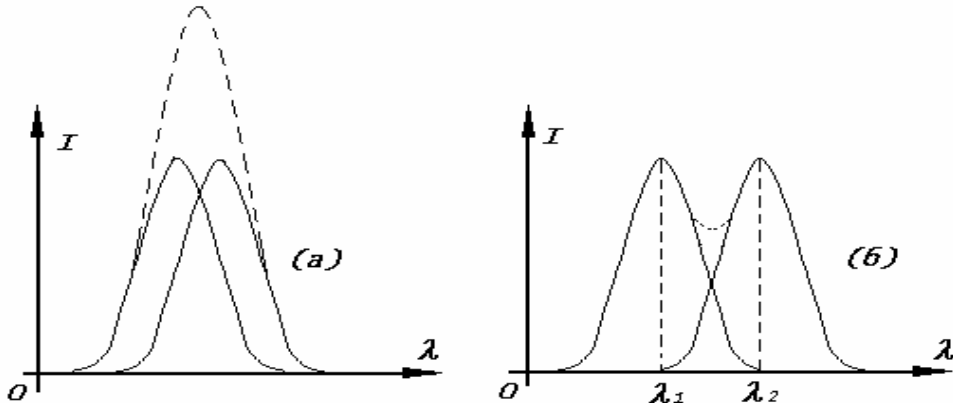


Рис.6.15. К определению понятия разрешающей способности решетки: а) спектральные линии не разрешены; б) предельное положение спектральных линий в соответствии с критерием Рэлея.

либо λ_1 , либо λ_2 - так как они мало отличаются друг от друга.

Условие главного максимума для центра первой линии

$$d \sin \varphi = m\lambda_1 \quad (6.30)$$

При выполнении критерия Рэлея с ним совпадает ближайший минимум для второй линии (6.22)

$$d \sin \varphi = m\lambda_2 + \frac{\lambda_2}{N} \quad (6.31)$$

Приравнивая (6.30) и (6.31), получим $m(\lambda_1 - \lambda_2) = \frac{\lambda_2}{N}$. Откуда

$$R = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} = mN \quad (6.32)$$

Итак, разрешающая способность дифракционной решетки тем больше, чем больше порядок спектра m и число щелей N . Лучшие решетки имеют более 10^3 штрихов на мм ($d \leq 1$ мкм) и $N \approx 10^5$. В видимом свете в них наблюдаются только спектры 1-го порядка.

6.3. ДИФРАКЦИЯ ФРЕНЕЛЯ.

6.3.1. Дифракция на круглом отверстии в непрозрачной преграде.

6.3.1(1). Дифракция в дальней зоне. Будем для упрощения задачи, считать, что на преграду с отверстием нормально падает плоская волна (рис 6.16) Выясним, как изменяется интенсивность на экране при изменении расстояния l или диаметра отверстия (диафрагма).

В дальней зоне, т.е. $l \gg \frac{d^2}{\lambda}$, $\Delta \ll \frac{\lambda}{2}$ от всех элементов отверстия вторичные волны попадают в точку «О» экрана в одной фазе. Отверстие на волновой поверхности открывает малую часть зоны Френеля и на экране наблюдается дифракция Фраунгофера (в параллельных лучах). По сравнению с щелью отличие лишь в том, что задача имеет цилиндрическую симметрию - максимумы и минимумы равноудалены на r от точки О, т.е.

имеют вид колец (рис. 6.17). Так как в дальней зоне расстояние до центра экрана от любого элемента волновой поверхности в отверстии практически одинаково ($\Delta \ll x/2$), то интенсивность в точке «О» I_0 с ростом l будет уменьшаться пропорционально $1/l^2$ (как от точечного источника)¹⁾.

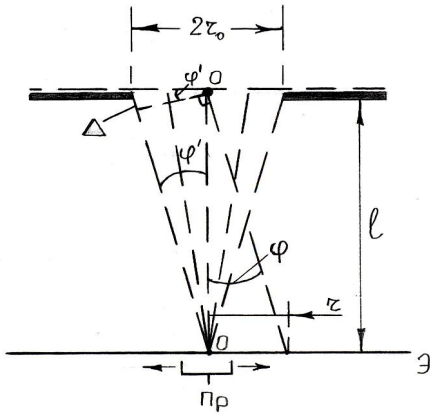


Рис. 6.16. Дифракция Френеля на круглом отверстии

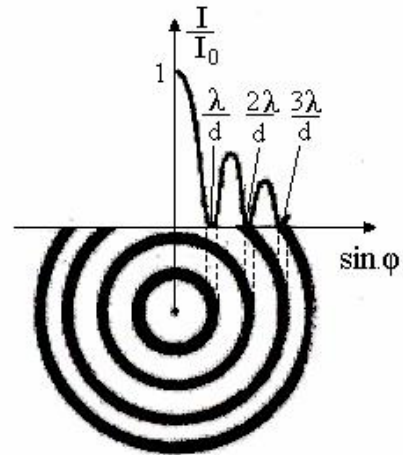


Рис.6.17. Дифракционная картина при дифракции Френеля на круглом отверстии

6.3.1(2). Дифракция Френеля на оси симметрии. Что происходит с интенсивностью в точке о на экране с уменьшением расстояния l легко проследить с помощью спектральной диаграммы (рис 6.4). Зависимость $I(\gamma = 0,1)$ приводим на рис 6.18. Уменьшение l приводит к увеличению сферического угла, под которым из т. О видно отверстие. Следовательно, растет площадь открытой части поверхности первой зоны Френеля.

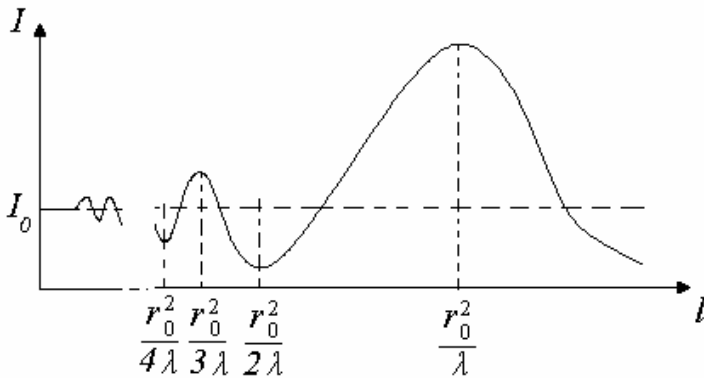


Рис. 6.18. Зависимость интенсивности волны от расстояния между диафрагмой и экраном в случае дифракции Френеля.

В соответствии со спиральной диаграммой интенсивность $I(l)$ быстро растет. Когда расстояние R от края диафрагмы станет равным $l + \frac{\lambda}{2}$ интенсивность $I(l)$ будет определяться суммой амплитуд от всех элементов первой зоны. Интенсивность $I(l_1)$ станет равной $4I_0(l=0)$, где $I_0(l=0)$ - интенсивность от полностью открытой волновой поверхности, т.е.

при $l=0$ (открыты все зоны Френеля). Далее начнет открываться вторая зона и интенсивность будет уменьшаться. Первый минимум интенсивности на экране образуется, когда полностью открываются первые две зоны. Значения l , при которых будут наблюдаться последовательно минимумы и максимумы определяются из очевидного условия

¹⁾ Суммирование поля от всех элементов вместо гармонических дает другую функцию (Бесселя)

$$I = I_0 \left[\frac{J_1(\gamma d)}{\gamma d} \right]^2 \quad (6.15), \text{ где } \gamma d = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \varphi, \quad J_1(\gamma d) - \text{функция Бесселя первого порядка}$$

$$r_0^2 = R_m^2 - l^2 = \left(1 + \frac{m\lambda}{2}\right)^2 - l^2 \cong m\lambda l \quad (6.33)$$

$$l = \frac{r_0^2}{m\lambda}, m = 1, 2, \dots$$

В соответствии со спиральной диаграммой (рис 6.4) различие между максимумами и минимумами постепенно уменьшается и при $m \gg 1$ оно становится сколь угодно малым. Обратим теперь внимание на следующее обстоятельство. Если при заданном l увеличивать r_0 (размер отверстия в диафрагме), то в соответствии с (6.33) будет расти число открытых зон для «наблюдателя» в т.О, т.е. рост r_0^2 эквивалентен уменьшению длины l . Таким образом, проведенный анализ позволяет выделить области, где наблюдаются разные виды дифракции:

$$\frac{r_0^2}{l\lambda} = \left. \begin{array}{l} \ll 1 \text{ дифракция _ Фраунгофера (в параллельных лучах)} \\ \geq 1 (m \geq 1) \text{ дифракция Френеля (сходящиеся лучи)} \\ \gg 1 (\tau \rightarrow \infty) \text{ бездифракционная область (геометрическая оптика)} \end{array} \right\} \quad (6.34)$$

6.3.1(3). Распределение интенсивности по радиусу при дифракции Френеля на круглом отверстии. Качественно такую зависимость можно установить из анализа того, как открываются участки зон Френеля при смещении приемника по экрану. На рис.6.19. это иллюстрируется на случае, когда на оси симметрии открыто 2 зоны Френеля и наблюдается минимум «свечения». При смещении

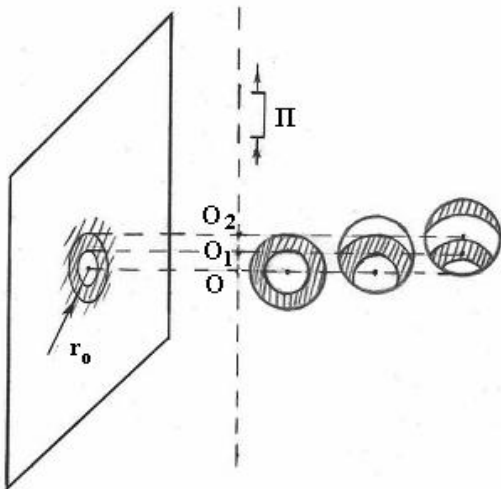


Рис. 6.19. Изменение числа открытых зон Френеля при смещении точки наблюдения вдоль экрана с диафрагмой

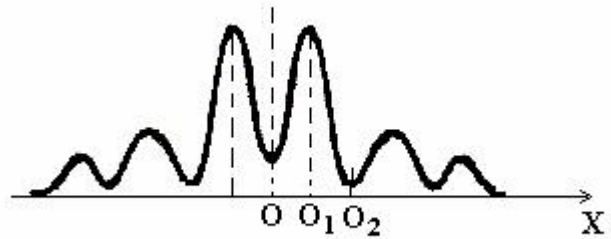


Рис. 6.20. Изменение интенсивности волны при смещении точки наблюдения вдоль экрана с диафрагмой

в т. « O_1 » ($x = r/2$) вторая зона частично закроется, но откроется часть третьей зоны. В т. O_1 будет наблюдаться максимум (Рис. 6.20). Смещая приемник на r_0 (в т.

O_2), снова получим минимум и т.д. При нечетном числе открытых зон в центре будет наблюдаться максимум. Таким образом, дифракционная картина представляется в виде concentric темных и светлых колец.

В зависимости от длины волны падающего света максимумы будут иметь окраску от красной до фиолетовой. Если свет не монохроматический, каждый из максимумов, кроме центрального разложится в спектр, спектры могут перекрываться и четкость картины исчезнет.

6.3.2. Зонная пластинка.

Это пример того, как идеи Френеля о зонах приводят к созданию интересного оптического устройства. В зонной пластинке для заданного расстояния от нее перекрываются все четные (или нечетные) зоны Френеля (рис. 6.21).

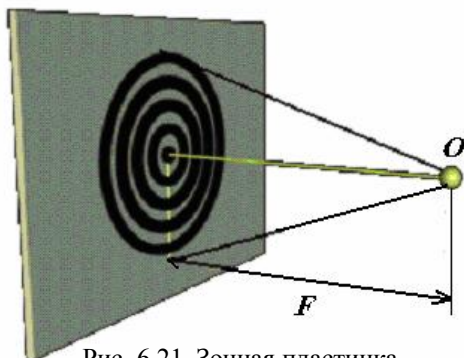


Рис. 6.21. Зонная пластинка (перекрываются нечетные зоны).

В результате интенсивность волнового поля резко возрастает подобно тому, как это происходит в собирающей линзе. Точку «О» на оси симметрии, где это имеет место, можно назвать фокусом пластины. На рис. 6.21 изображена пластинка, перекрывающая для «О»

нечетные зоны. Еще больший эффект можно достичь не перекрывая зоны, а изменяя фазу вторичных волн от этих зон на π (например, изменяя толщину прозрачной пластины). Это даст дополнительное увеличение амплитуды в два, а интенсивности в 4 раза. Такую зонную пластину называют фазовой.

6.3.3. Дифракция на круглом диске.

Пусть сферическая волна, распространяющаяся от точечного источника S_0 , встречает на своем пути круглый непрозрачный диск (рис. 6.22). Рассмотрим дифракционную картину, наблюдаемую на экране Э в точке М, лежащей на линии, соединяющей S_0 с центром диска. В данном случае закрытый диском фронт волны надо исключить из рассмотрения и зоны Френеля строить, начиная с краев диска. Если диск закрывает m первых зон Френеля, то амплитуда результирующего колебания в точке М равна (см (6.4), (6.5)):

$$A = A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+3} - \dots = A_{m+1} - (A_{m+1}/2 + A_{m+3}/2) + A_{m+3} - (A_{m+3}/2 + A_{m+5}/2) \dots$$

Раскрыв скобки, получим аналогично (6.6) $A \approx A_{m+1}/2 \dots$

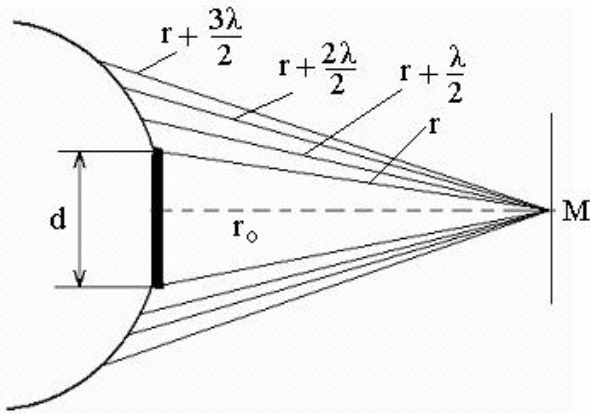


Рис. 6.22. Дифракция Френеля на круглом непрозрачном диске

Следовательно, в точке М всегда наблюдается интерференционный максимум - светлое пятно или, как его называют, «пятно Пуассона». Этот, казалось бы абсурдный на первый взгляд результат, был теоретически предсказан Пуассоном (1818) (сторонником теории прямолинейного распространения света), который получил его, применив метод Френеля. Пуассон считал результат своего расчета доказательством несостоятельности волновой теории

Френеля, которая, по его мнению, приводит к «нелепому выводу»: в центре тени, отбрасываемой небольшим круглым диском, появляется светлое пятно, хотя, из теории прямолинейного распространения света, этого не может быть.

Срочно проведенные опыты (Араго) подтвердили, что светлое пятно действительно существует. Этот эпизод привел к всеобщему признанию волновой теории света.

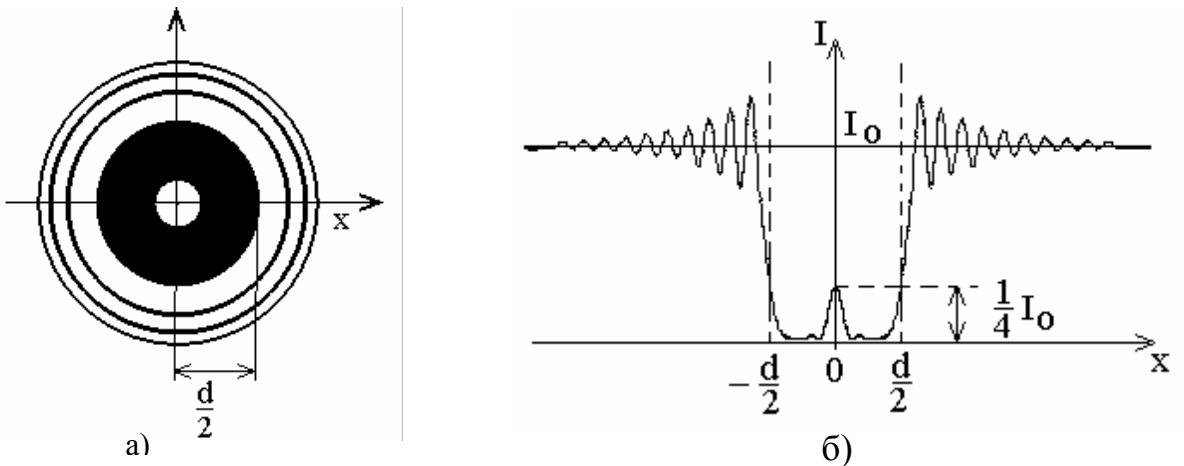


Рис. 6.23. Дифракция Френеля на круглом непрозрачном диске: а) - дифракционная картина; б) - распределение интенсивности света по радиусу.

В целом картина на экране при дифракции на круглом отверстии выглядит, как качественно показано на рис. 6.23. В центре – пятно Пуассона с постепенно уменьшающейся интенсивностью – тень (ее размеры зависят от размеров диска). За этой областью могут наблюдаться слабые дифракционные максимумы и минимумы. Если диск закрывает лишь небольшую часть центральной зоны Френеля, он совсем не отбрасывает

тени, и освещенность на экране такая же, как без диска. Если диск закрывает много зон Френеля, то только в узкой области на границе геометрической тени можно наблюдать чередование темных и светлых колец. В этом случае $A_{m+1} \ll A_1$ и светлое пятно в центре практически не заметно.

6.4. ДРУГИЕ ВИДЫ ДИФРАКЦИИ.

Теория дифракции, рассмотренная выше, играет очень важную роль для любых волн, в том числе и для радиоволнового диапазона. Так на основе этой теории, созданы разнообразные антенные решетки представляющие собой обращенные оптические дифракционные решетки. Например, как было показано, ряд элементарных излучателей, регулярно расположенных в плоскости, работающих синхронно, дают остронаправленное излучение подобное тому, которое получается при дифракции света на решетке с большим числом щелей. По подобию дифракционной решетки работают дифракционные щелевые антенны. Теория дифракции широко применяется при описании процессов распространения радиоволн в природных условиях.

По аналогичному принципу также устроены распределенные акустические системы. Ряд громкоговорителей, работающих синхронно и синфазно, размещенных в линию, создают эффект направленного излучения. К примеру, таким свойством обладают широко известные акустические колонки.

Один из самых фундаментальных результатов в физике 20-го столетия: рассеяние микрочастиц в веществе при определенных условиях носит дифракционный характер. Это и ряд других опытов и наблюдений позволили утверждать: любая материя при своем движении и превращениях обладает свойствами частиц и волн («корпускулярно-волновым дуализмом»).

6.4.1. Дифракция на объемных решетках.

Естественной объемной периодической структурой (объемной решеткой) являются все кристаллические тела. Учитывая, что период такой решетки составляет $\sim 10^{-10}$ м, дифракция электромагнитного поля на ней будет заметна лишь для рентгеновского излучения ($\lambda \sim 10^{-10}$ м). Взаимодействие рентгеновского излучения с узлами кристаллической решетки и возникновение вторичных волн можно рассматривать упрощенно как результат его отражения от системы плоскостей, в которых лежат узлы решетки (Рис. 6.24). Дифракционные максимумы, наблюдаемые при отражении

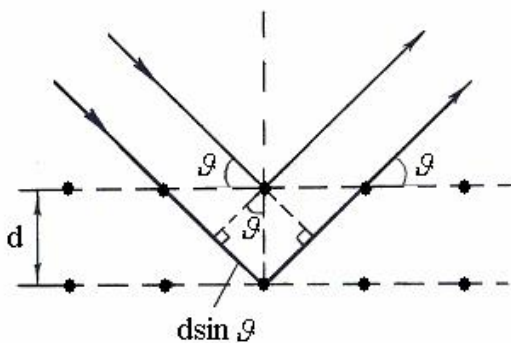


Рис. 6.24. Дифракция рентгеновских лучей на кристаллической решетке.

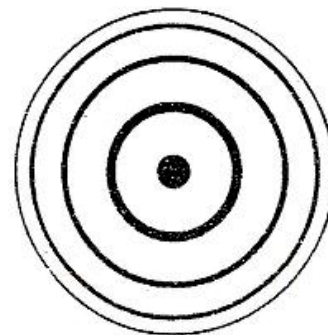


Рис. 6.25. Качественная картина дифракции рентгеновских лучей (дебаеграмма).

рентгеновских лучей от кристалла, удовлетворяют условию Брегга – Вульфа:

$$2d \sin \vartheta = m\lambda, \quad (6.35)$$

где d - межплоскостное расстояние, ϑ - угол между падающим параллельным пучком лучей и поверхностью кристалла - угол скольжения.

Результат дифракции рентгеновских лучей от кристаллов используется как для исследования спектрального состава рентгеновского излучения (рентгеновская спектроскопия), так и для изучения структуры кристаллов (рентгеноструктурный анализ).

Дифракцию рентгеновского излучения можно наблюдать на поликристаллических структурах (метод Дебая - Шерера). Среди множества кристалликов всегда найдутся такие, для которых одинаковы значения d , θ и m одновременно выполняется условие (6.35). Для каждой системы атомных слоев и каждого значения m получится не одно направление максимума, а конус направлений, ось которого совпадает с направлением падающего пучка лучей. Результат, полученный на фотопленке - рентгенограмма имеет вид концентрических колец, чередующихся максимумов и минимумов и называется дебаграммой (качественно изображена на рис. 6.25). По виду дебаграммы можно определить, как структуру вещества, так и частоту рентгеновского излучения. Аналогичная дифракция наблюдается при отражении медленных электронов (нейтронов!) от твердых тел (распределение числа регистрируемых отраженных частиц под разными углами имеет максимумы и минимумы в соответствии с (6.35)).

6.4.2. Рассеяние на случайных неоднородностях.

Если в дальней зоне наблюдать дифракцию от случайно расположенных мелких одинаковых неоднородностей (препятствий с $a < \lambda$, как на рис 6.26), то интенсивности рассеянной волны от каждой неоднородности для заданных углов наблюдения будут складываться.

$$I = \sum_i I_{pi} ; NI_p, \quad (6.36)$$

где N -число рассеивающих центров.

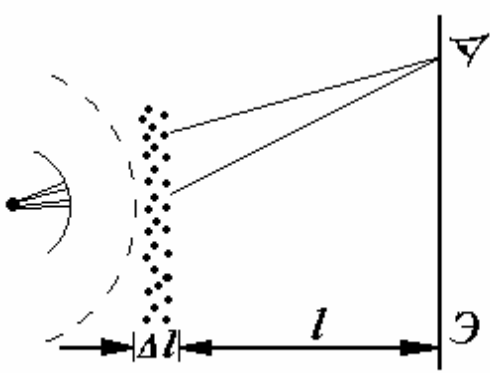


Рис. 6.26. Наблюдение дифракции на случайных неоднородностях

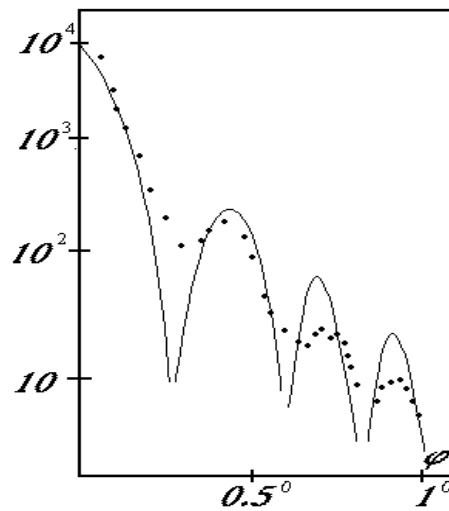


Рис.6.27. Угловая зависимость числа рассеянных протонов на ядрах свинца (случайных неоднородностях).

Дифракционные распределения от одной неоднородности усилятся в N раз. Именно из-за такой дифракции вокруг фонарей в тумане иногда наблюдается кольцевые «ореолы!» (распределение свечения переменной интенсивности). На рис. 6.27 приведена зависимость числа рассеянных протонов с энергией $E=19\text{Гэв}$ ($1,9 \cdot 10^{10}\text{эВ}$) на ядрах свинца от угла рассеяния φ . При этой энергии протоны должны характеризоваться длиной волны $\lambda = 0,65 \cdot 10^{-16}\text{м}$. Используя формулы (6.15), (см 6.3.1.1), для такого значения λ можно подобрать радиус неоднородности (размер ядра), который бы обеспечил совпадение максимумов и минимумов (сплошная кривая на рис. 6.27) теоретической кривой и экспериментальных данных. Расчет дает для радиуса ядра свинца $R_{pb} \cong 7,5 \cdot 10^{-15}\text{м}$. Отклонения точек от плавной теоретической сплошной кривой связано с тем, что ядро не является «черным диском» имеющим резкие края. Дифракция является мощным инструментом для изучения структуры микрочастиц. Например, позволяет изучать плотность (однородность) рассеивающих объектов и т.п.

