3.6. Законы трения (законы Кулона)

▶ **Законы трения скольжения.** Рассмотрим тело веса G, находящееся в покое на негладкой горизонтальной плоскости (рис. 25). Попытка передвинуть тело, приложив к нему горизонтальную силу $\vec{F}$, не приводит к успеху до тех пор, пока величина силы не достигнет некоторого значения $\vec{F}^*$. Равнодействующая сил реакций опоры может быть представлена в виде двух составляющих — *силы нормального давления* $\vec{N}$ и *силы трения покоя* $\vec{F}_{\text{тр}}$. Уравнение проекций сил на горизонтальную ось дает $F_{\text{тр}} = F$.

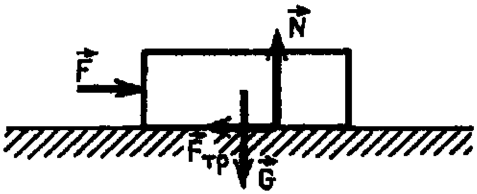

Рис. 25.

Опыт показывает, что F^* и N связаны соотношением *(закон Кулона)*

$$F^* = f_0 N,$$

где f_0 называется *статическим коэффициентом трения*; он зависит от материалов соприкасающихся тел и состояния их поверхностей.

Пока $F \leqslant F^*$, тело будет оставаться в покое. Если же к нему приложить силу, бóльшую чем F^*, то оно станет двигаться. При движении силу сопротивления можно найти, пользуясь формулой

$$F_{\text{тр}} = fN, \tag{6}$$

где f называется *динамическим коэффициентом трения*, а $F_{\text{тр}}$ — силой трения скольжения.

Отметим, что динамический коэффициент трения всегда меньше статического коэффициента трения: $f < f_0$.

► **Законы трения качения.** Рассмотрим диск радиуса R, покоящийся на негладкой горизонтальной плоскости (рис. 26). Попытка перекатить диск, приложив к его центру горизонтальную силу $\vec{F}$, не приведет к успеху, пока величина силы остается меньше предельного значения F^{**}.

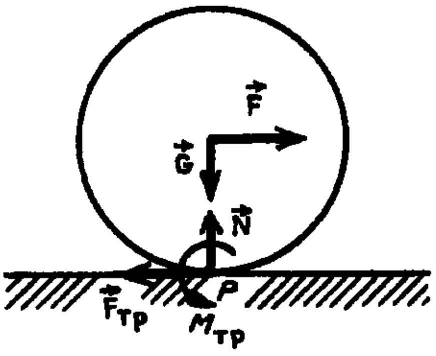

Рис. 26.

Силы реакции опоры, распределенные по малой поверхности вблизи точки контакта P, в соответствии с теоремой о приведении системы сил к центру могут быть заменены эквивалентной системой — силой нормального давления $\vec{N}$, силой трения покоя $\vec{F}_{тр}$, приложенными в точке контакта P, а также парой сил трения качения с моментом $M_{тр}$.

При равновесии диска из уравнения моментов относительно центра P следует $FR = M_{тр}$. Опыт показывает, что F^{**} и N связаны соотношением $F^{**} = kN/R$, при этом

$$M^{**} = kN. \tag{7}$$

Размерный коэффициент k[см] называется *коэффициентом трения качения.*

Поверхность качения называют *абсолютно шероховатой*, когда $f \neq 0$ и $k = 0$.

Опыт показывает, что при прочих равных условиях F^* много больше F^{**}, поэтому в технике при необходимости уменьшить потери на трение стремятся заменить скольжение качением.

4. Динамика материальной точки

4.1. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Движение материальной точки по отношению к инерциальной системе отсчета описывается вторым законом Ньютона:

$$m\vec{a} = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j + \sum_{k=1}^{l} \vec{R}_k, \tag{1}$$

где m — масса точки, $\vec{a}$ — ее ускорение, в правой части равенства — геометрическая сумма всех сил, приложенных к точке. Причины возникновения каждой из сил могут быть различными. Здесь мы будем различать *силы активные* $\vec{F}_j$ и *силы реакций связей* $\vec{R}_k$. Активные силы зависят от времени t, а также от положений и скоростей точек механической системы. К активным силам относятся, например, силы тяжести, упругости, вязкого трения, аэрогидродинамического сопротивления и т.п.

Силы реакций связей действуют на несвободную материальную точку, когда ее движение стеснено механическими связями. Эти силы можно определить лишь в процессе решения задачи динамики.

Выберем декартовы оси инерциальной системы отсчета x, y, z и, проектируя на них обе части векторного равенства (1), получим

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum F_{jx} + \sum R_{kx},$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum F_{jy} + \sum R_{ky},$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum F_{jz} + \sum R_{kz}.$$

Эти три уравнения называются *дифференциальными уравнениями движения материальной точки в декартовых координатах.*

Дифференциальные уравнения движения точки в проекциях на естественные оси координат имеют вид

$$m\frac{dv}{dt} = \sum F_{j\tau} + \sum R_{k\tau},$$
$$\frac{mv^2}{\rho} = \sum F_{jn} + \sum R_{kn},$$
$$0 = \sum F_{jb} + \sum R_{kb}.$$

Здесь учтено, что $a_\tau = \dfrac{dv}{dt}$, $a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$, $a_b = 0$.

4.2. Первая и вторая задачи динамики

В уравнения движения (см. разд. 4.1) неизвестные могут входить как в левые, так и в правые части. В зависимости от этого задачи динамики делятся на два типа, которые рассмотрены ниже.

▶ **Первая задача динамики.** Задан закон движения и активные силы, необходимо найти силы реакций связей.

▶ **Вторая задача динамики.** Заданы активные силы, уравнения механических связей, начальное положение точки и ее начальная скорость, необходимо найти закон движения точки и реакции связей.

Вторую задачу динамики рекомендуется решать последовательно в несколько этапов, перечисленных ниже.

1. Рисуют предполагаемую траекторию движения, на которой изображают материальную точку.
2. Рисуют силы, приложенные к точке.
3. Записывают второй закон Ньютона в векторной форме.
4. Выбирают удобную систему координат.
5. Записывают уравнения движения точки в проекциях либо на оси декартовой системы координат, либо на оси естественного трехгранника. В первом случае все активные силы необходимо выразить через t, x, y, z, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, а во втором — через t, s, $\dot{s}$.
6. К полученным дифференциальным уравнениям добавляют начальные условия: значения координат и проекций скорости точки в начальный момент времени (они берутся из условия задачи с учетом введенной системы координат).
7. Поставленную задачу решают численно или аналитически методами, известными из курса высшей математики.

Указанные этапы решения рекомендуется выполнять, не меняя порядка их следования.

5. Общие теоремы динамики механической системы

Довольно часто удается выделить важные особенности движения механической системы, не прибегая к интегрированию системы дифференциальных уравнений движения. Это достигается применением общих теорем динамики.

5.1. Основные понятия и определения

▶ **Внешние и внутренние силы.** Любая сила, действующая на точку механической системы, обязательно является либо активной силой, либо реакцией связи. Всю совокупность сил, действующих на точки системы, можно разделить на два класса иначе: на *внешние силы* $\vec{F}^{\mathrm{e}}$ и *внутренние силы* $\vec{F}^{\mathrm{i}}$ (индексы e и i — от латинских слов externus — внешний и internus — внутренний). Внешними называются силы, действующие на точки системы со стороны точек и тел, не входящих в состав рассматриваемой системы. Внутренними называются силы взаимодействия между точками и телами рассматриваемой системы.

Это разделение зависит от того, какие материальные точки и тела включены исследователем в рассматриваемую механическую систему. Если расширить состав системы, включив в нее дополнительно точки и тела, то некоторые силы, которые для прежней системы были внешними, для расширенной системы могут стать внутренними.

▶ **Свойства внутренних сил.** Поскольку эти силы являются силами взаимодействия между частями системы, они входят в полную систему внутренних сил «двойками», организованными в соответствии с аксиомой действия–противодействия. У каждой такой «двойки» сил главный вектор и главный момент относительно произвольного центра равны нулю. Так как полная система внутренних сил состоит только из «двоек», то

1) главный вектор системы внутренних сил равен нулю,

2) главный момент системы внутренних сил относительно произвольной точки равен нулю.

Массой системы m называется арифметическая сумма масс m_k всех точек и тел, образующих систему:

$$m = \sum m_k.$$

▶ **Центром масс** (центром инерции) механической системы называется геометрическая точка C, радиус-вектор и координаты которой x_C, y_C, z_C определяются формулами

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{m}, \quad x_C = \frac{\sum m_k x_k}{m}, \quad y_C = \frac{\sum m_k y_k}{m}, \quad z_C = \frac{\sum m_k z_k}{m},$$

где $\vec{r}_k$, x_k, y_k, z_k — радиусы-векторы и координаты точек, образующих систему.

Для твердого тела, находящегося в однородном поле тяжести, положения центра масс и центра тяжести совпадают, в других случаях это разные геометрические точки.

Вместе с инерциальной системой отсчета часто рассматривают одновременно неинерциальную систему отсчета, движущуюся поступательно. Ее оси координат $Cx^*y^*z^*$ (*оси Кёнига*) выбирают так, чтобы начало отсчета C постоянно совпадало с центром масс механической системы. В соответствии с определением центр масс неподвижен в осях Кёнига и находится в начале координат.

▶ **Моментом инерции** системы относительно оси z называется скалярная величина I_z, равная сумме произведений масс m_k всех точек системы на квадраты их расстояний h_k до оси:

$$I_z = \sum m_k h_k^2.$$

Если механической системой является твердое тело, для нахождения I_z можно воспользоваться формулой

$$I_z = \int\limits_V \rho(x^2 + y^2)\,dV,$$

где $\rho(x, y, z)$ — плотность, а V — объем, занимаемый телом.

Момент инерции однородного диска массы m радиуса R относительно оси, перпендикулярной его плоскости и проходящей через центр, подсчитывается по формуле

$$I_z = \tfrac{1}{2}mR^2. \qquad (1)$$

Теорема Гюйгенса о моментах инерции относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс:

$$I_z = I_{Cz} + md^2,$$

где I_z и I_{Cz} — моменты инерции относительно параллельных осей z и C_z, причем ось C_z проходит через центр масс, d — расстояние между осями, m — масса системы. Из теоремы следует, что $I_{Cz} < I_z$.

5.2. Теорема о движении центра масс

► **Формулировка теоремы:** центр масс механической системы движется так же, как двигалась бы материальная точка с массой m, равной массе системы под действием внешних сил, приложенных к системе:

$$m\vec{a}_C = \sum \vec{F}_k^{\mathrm{e}}, \qquad (2)$$

где m — масса системы, а $\vec{a}_C$ — ускорение центра масс.

Математическая запись теоремы (2) похожа на второй закон Ньютона. Дадим более подробное изложение теоремы. При движении системы ее центр масс C движется по некоторой траектории. Пусть, например, в момент времени t_0 он находится в положении B и имеет скорость $\vec{v}_{C0}$. Если теперь в момент времени t_0 в положение B поместить точку массы m, сообщить ей скорость $\vec{v}_{C0}$ и приложить к ней силы, равные внешним силам, действующим на систему, то, начиная с этого момента, точка будет двигаться вместе с центром масс системы, по одной и той же траектории, с одинаковой скоростью и одинаковым ускорением.

Из уравнения (2) можно получить дифференциальные уравнения движения центра масс в проекциях на оси декартовой системы координат:

$$m\ddot{x}_C = \sum F_{kx}^{\mathrm{e}}, \quad m\ddot{y}_C = \sum F_{ky}^{\mathrm{e}}, \quad m\ddot{z}_C = \sum F_{kz}^{\mathrm{e}}.$$

► **Закон сохранения скорости центра масс механической системы:** если главный вектор внешних сил системы равен нулю, центр масс системы движется с постоянной скоростью, т.е. если $\sum \vec{F}_k^{\mathrm{e}} = 0$, то $\vec{v}_C = \overrightarrow{\mathrm{const}}$.

Отметим, что в этом случае постоянным является вектор скорости, а не только его модуль, поэтому центр масс будет двигаться равномерно и прямолинейно.

Если проекция главного вектора внешних сил системы на какую-либо ось равна нулю, то проекция скорости центра масс системы на эту ось остается постоянной. Например, если $\sum F_{kx} = 0$, то $v_{Cx} = \text{const}$.

Пример. По боковой грани призмы массы m_1, находящейся на гладкой горизонтальной плоскости, под действием силы веса скатывается однородный диск массы m_2 (рис. 28). Угол наклона боковой грани к основанию равен α. В начальный момент скорости призмы и диска равны нулю. Определить расстояние d_1, на которое сдвинется призма, когда центр диска переместится вдоль грани на расстояние d_2.

Решение. Включим в механическую систему два тела — призму и диск и расставим внешние силы — активные силы веса $\vec{G}_1$ и $\vec{G}_2$ и силу реакции $\vec{N}_1$ гладкой плоскости. Характерная особенность системы внешних сил заключается в том, что все они перпендикулярны горизонтальной оси, и поэтому сумма их проекций на эту ось равна нулю.

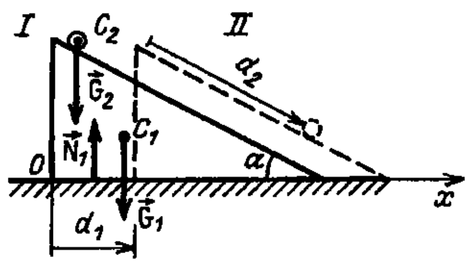

Рис. 28.

Направим ось x горизонтально слева направо с началом в точке O. На рис. 28 изобразим систему в двух положениях: начальном I и в тот момент времени, когда диск переместился по грани призмы на расстояние d_2 — II. Поскольку направление и величина перемещения призмы заранее неизвестны, то, особенно не гадая, изобразим положение II правее начального положения I.

Так как $\sum F^e_{kx} = 0$, из закона сохранения проекции скорости центра масс системы на ось x следует $v_{Cx} = \text{const}$. Так как в положении I все скорости были равны нулю, то $v_{Cx} = 0$. Отсюда следует, что $x_C = \text{const}$ или $x^I_C = x^{II}_C$. Пользуясь формулами для координат центра масс, перепишем последнее равенство так:

$$\frac{m_1 x^I_{C_1} + m_2 x^I_{C_2}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 x^{II}_{C_1} + m_2 x^{II}_{C_2}}{m_1 + m_2}. \tag{3}$$

Здесь $x^I_{C_1}$ и $x^I_{C_2}$ — координаты центров масс призмы и диска в положении I, а $x^{II}_{C_1}$ и $x^{II}_{C_2}$ — аналогичные величины в положении II.

Из рис. 28 видно, что $x^{II}_{C_1} = x^I_{C_1} + d_1$, $x^{II}_{C_2} = x^I_{C_2} + d_1 + d_2 \cos\alpha$. Подставляя эти соотношения в формулу (3), после алгебраических преобразований найдем $d_1 = -\dfrac{m_2 d_2 \cos\alpha}{m_1 + m_2}$.

Знак полученного ответа говорит о том, что перемещение призмы направлено противоположно изображенному на рисунке.

5.3. Теорема об изменении количества движения

► **Количеством движения точки** массы m, движущейся со скоростью $\vec{v}$, называется вектор

$$\vec{Q} = m\vec{v}.$$

Количеством движения механической системы называется главный вектор количеств движения всех точек системы:

$$\vec{Q} = \sum \vec{Q}_k.$$

Можно доказать, что количество движения системы равно количеству движения воображаемой материальной точки, имеющей массу системы и движущейся со скоростью центра масс: $\vec{Q} = m\vec{v}_C$.

► **Импульс силы.** Пусть к движущейся материальной точке приложена сила $\vec{F}$ (кроме нее к точке могут быть приложены и другие силы, но сейчас мы выделили только одну из них).

Элементарным импульсом силы $\vec{F}$ за элементарный промежуток времени dt называется вектор $d\vec{S}$:

$$d\vec{S} = \vec{F}\,dt.$$

Импульсом силы $\vec{F}$ за конечный промежуток времени от t_0 до t называется вектор $\vec{S}$:

$$\vec{S} = \int_{t_0}^{t} d\vec{S} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}\,dt.$$

Проекции импульса силы на координатные оси могут быть вычислены по формулам

$$S_x = \int_{t_0}^{t} F_x\,dt, \quad S_y = \int_{t_0}^{t} F_y\,dt, \quad S_z = \int_{t_0}^{t} F_z\,dt.$$

► **Разные формулировки теоремы о количестве движения.**

Теорема об изменении количества движения в дифференциальной форме: производная по времени от количества движения механической системы равна главному вектору внешних сил системы:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = \sum \vec{F}_k^{e}$$

или, по-другому: дифференциал количества движения системы равен геометрической сумме элементарных импульсов всех внешних сил, действующих на точки системы:

$$d\vec{Q} = \sum d\vec{S}_k^{e}.$$

Проектируя на оси координат (например, на ось x), получим

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^{e} \quad \text{или} \quad dQ_x = \sum dS_{kx}^{e}.$$

Теорема об изменении количества движения в интегральной форме: изменение количества движения механической системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов внешних сил системы за тот же промежуток времени:

$$\vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum \vec{S}_k^{\mathrm{e}},$$

где векторы $\vec{Q}$ и $\vec{Q}_0$ соответствуют моментам времени t и t_0, а $\vec{S}_k^{\mathrm{e}}$ — импульсы внешних сил системы за промежуток времени от t_0 до t. В проекциях на координатные оси (например, на ось x)

$$Q_x - Q_{x0} = \sum S_{kx}^{\mathrm{e}}.$$

При использовании теоремы применительно к одной материальной точке следует иметь в виду, что любая сила, приложенная к точке, является внешней.

▶ **Закон сохранения количества движения.**

Закон сохранения количества движения механической системы:

$$\text{если} \quad \sum \vec{F}_k^{\mathrm{e}} = 0, \quad \text{то} \quad \vec{Q} = \overrightarrow{\text{const}}.$$

Закон сохранения проекции количества движения на какую-либо ось (например, на ось x):

$$\text{если} \quad \sum F_{kx}^{\mathrm{e}} = 0, \quad \text{то} \quad Q_x = \text{const}. \tag{4}$$

5.4. Теорема об изменении кинетического момента

► **Момент количества движения и кинетический момент.**

Моментом количества движения материальной точки относительно неподвижного центра P называется вектор $\vec{K}_P$, равный векторному произведению радиуса-вектора, соединяющего центр с точкой, на количество движения точки:

$$\vec{K}_P = \vec{M}_P(\vec{Q}) = \vec{r} \times m\vec{v}.$$

Кинетическим моментом (главным моментом количества движения) механической системы относительно центра P называется геометрическая сумма моментов количеств движения всех точек системы относительно центра

$$\vec{K}_P = \sum \vec{K}_{Pj}.$$

Моментом количества движения точки относительно оси x называется величина K_x, равная проекции на эту ось момента количества движения точки относительно любого центра P, принадлежащего оси:

$$K_x = M_x(\vec{Q}).$$

Вычисляется K_x так же, как момент силы относительно оси.

Кинетическим моментом системы относительно оси x называется проекция на нее момента системы относительно любого центра P, принадлежащего оси:

$$K_x = \sum K_{jx}.$$

Аналитическое выражение для кинетического момента системы относительно оси x имеет вид

$$K_x = \sum m_j(y_j\dot{z}_j - \dot{y}_j z_j).$$

Формулы для K_y и K_z аналогичны приведенной.

Можно показать, что кинетический момент системы относительно центра P равен сумме момента количества движения центра масс относительно центра P и кинетического момента системы относительно центра масс C в ее относительном движении в системе Кёнига

$$\vec{K}_P = \vec{M}_P + \vec{K}_C^*.$$

Здесь $\vec{M}_P = \vec{M}_P(m\vec{v}_C)$, $\vec{K}_C^*$ — кинетический момент системы в ее движении по отношению к системе отсчета Кёнига.

Кинетический момент K_z твердого тела, вращающегося относительно неподвижной оси z с угловой скоростью ω, вычисляется по формуле

$$K_z = I_z\omega, \qquad (5)$$

где I_z — момент инерции твердого тела относительно оси z.

▶ **Теорема об изменении кинетического момента механической системы:** производная по времени от кинетического момента относительно любого неподвижного центра P равна главному моменту внешних сил системы относительно того же центра:

$$\frac{d\vec{K}_P}{dt} = \sum \vec{M}_P(\vec{F}_j^e). \tag{6}$$

Проектируя (6) на оси координат (например, на ось x), получим теорему об изменении кинетического момента системы относительно неподвижной оси:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum M_x(\vec{F}_j^e). \tag{7}$$

Если эту теорему применить к изучению движения твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси z, получим *дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси*:

$$I_z\ddot{\varphi} = \sum M_z(\vec{F}_j^e),$$

где φ — угол поворота.

▶ **Закон сохранения кинетического момента:** если главный момент внешних сил системы относительно центра P равен нулю, то главный момент количеств движения относительно этого центра будет постоянным. Например,

$$\text{если} \quad \sum \vec{M}_P(\vec{F}_j^e) = 0, \quad \text{то} \quad \vec{K}_P = \overrightarrow{\text{const}}.$$

В правой части равенства располагается вектор-константа, т.е. и величина вектора, и его направление не зависят от времени.

Если сумма моментов внешних сил системы относительно какой-либо неподвижной оси равна нулю, то кинетический момент системы относительно этой оси остается постоянным. Например,

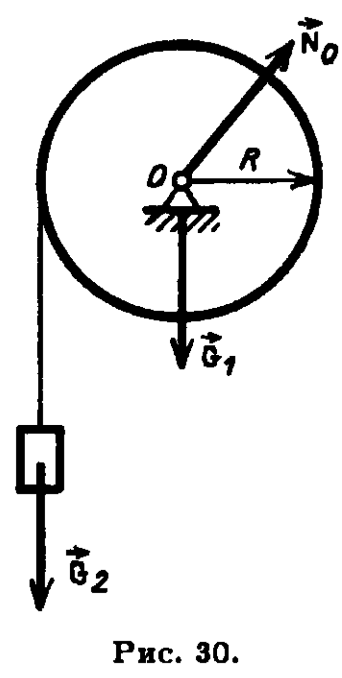

Рис. 30.

$$\text{если} \quad \sum M_x(\vec{F}_j^e) = 0, \quad \text{то} \quad K_x = \text{const}.$$

5.5. Теорема об изменении кинетической энергии

► **Элементарная работа.** Рассмотрим точку B, перемещающуюся под действием системы сил. Малое перемещение точки вдоль траектории характеризуется вектором $d\vec{r}$ (рис. 31). Из системы выделим одну силу $\vec{F}$.

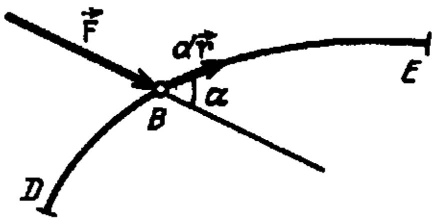

Рис. 31

Элементарной работой силы $\vec{F}$ на перемещении $d\vec{r}$ называется скалярная величина dA, равная скалярному произведению векторов $\vec{F}$ и $d\vec{r}$:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F\,dr\cos\alpha.$$

В координатной форме элементарная работа подсчитывается по формуле

$$dA = F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz,$$

где F_x, F_y, F_z, dx, dy, dz — координаты векторов $\vec{F}$ и $d\vec{r}$ соответственно.

Следует подчеркнуть, что, несмотря на принятую форму записи, элементарная работа dA не обязательно является полным дифференциалом некоторой функции, зависящей от координат.

Знак элементарной работы определяется косинусом угла α: она положительна для $0 \leqslant \alpha < \pi/2$, отрицательна для $\pi/2 < \alpha \leqslant \pi$ и равна нулю при $\alpha = \pi/2$.

▶ **Вычисление элементарной работы в частных случаях.**

1. Элементарная работа силы, приложенной к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси z, находится по формуле

$$dA = \pm M_z(\vec{F})\,d\varphi.$$

2. Сумма элементарных работ сил пары, приложенной к телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси и при плоскопараллельном движении, может быть подсчитана так:

$$dA = \pm M\,d\varphi.$$

Здесь M — момент пары сил, $d\varphi$ — элементарный угол поворота тела. Знак «плюс» берется при одинаковых направлениях дуговых стрелок момента пары и направления вращения, «минус» — при различных направлениях (плоскость действия пары предполагается параллельной основной плоскости).

3. При вычислении элементарных работ сил трения, приложенных к телу, катящемуся без проскальзывания, необходимо учесть, что в точке касания P (рис. 32) действуют: сила нормального давления $\vec{N}$, сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ и пара сил трения качения с моментом $M_{\text{тр}} = Nk$. Поскольку, в силу отсутствия проскальзывания, точка касания является мгновенным центром скоростей и ее скорость $\vec{v}_P$ равна нулю, то и $d\vec{r} = \vec{v}_P\,dt = 0$, откуда

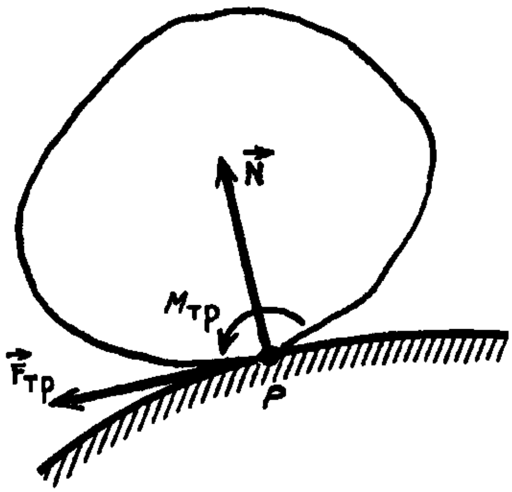

Рис. 32

$$dA_N = dA_{\text{тр}} = 0, \quad dA_M = -M_{\text{тр}}\,d\varphi = -Nk\,d\varphi.$$

4. Можно доказать, что сумма элементарных работ сил, приложенных к твердому телу, равна сумме элементарных работ статически эквивалентной системы сил. По теореме о приведении системы сил к заданному центру произвольную систему сил можно заменить эквивалентной системой, состоящей из силы $\vec{R}$, приложенной в наперед заданной точке P, и пары сил с моментом $\vec{M}_P$. Поэтому довольно часто вместо громоздкого подсчета суммы элементарных работ большого числа сил, приложенных к телу, подсчитывают сумму элементарных работ одной силы и одной пары.

▶ **Работа силы. Потенциальная сила.** *Работа силы* $\vec{F}$ на конечном перемещении точки по траектории DE (см. рис. 31) равна криволинейному интегралу

$$A = \int\limits_{DE} dA = \int\limits_{DE} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int\limits_{DE} F_x\,dx + F_y\,dy + F_z\,dz.$$

Сила называется *потенциальной*, если ее работа не зависит от формы траектории, а зависит лишь от ее начальной и конечной точек.

Примером потенциальной силы является сила тяжести G, ее работа может быть подсчитана по формуле

$$A = -G(z - z_0).$$

Здесь ось z выбрана параллельно линии действия силы веса и направлена ей навстречу, $\vec{G}$ — сила веса, z_0, z — координаты начальной и конечной точек траектории.

▶ **Кинетическая энергия.** *Кинетической энергией точки* массы m, движущейся со скоростью $\vec{v}$, называется скалярная величина T, определяемая формулой

$$T = \frac{mv^2}{2}.$$

Кинетической энергией механической системы называется сумма кинетических энергий всех ее точек:

$$T = \sum T_j = \sum \frac{m_j v_j^2}{2}.$$

Можно доказать, что кинетическая энергия системы равна сумме кинетической энергии центра масс и кинетической энергии системы при ее относительном движении в системе отсчета Кёнига:

$$T = \frac{mv_C^2}{2} + \sum \frac{m_j (v_j^*)^2}{2},$$

где $m = \sum m_j$, а v_j^* — относительные скорости точек.

▶ **Формулы для кинетической энергии твердого тела:**

а) при его поступательном движении: $T = \frac{1}{2} m v_C^2$,

б) при вращении вокруг неподвижной оси z: $T = \frac{1}{2} I_z \omega^2$,

в) при плоскопараллельном движении: $T = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2$, где I_C — момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной основной плоскости и проходящей через центр масс C.

► **Разные формулировки теоремы о кинетической энергии.**

Теорема об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме: дифференциал кинетической энергии механической системы равен сумме элементарных работ сил, приложенных к точкам системы, на их элементарных перемещениях

$$dT = \sum dA_j. \tag{11}$$

Теорема об изменении кинетической энергии в интегральной форме: изменение кинетической энергии механической системы при некотором ее перемещении равно сумме работ всех сил, приложенных к точкам системы, на перемещениях этих точек

$$T - T_0 = \sum A_j.$$

Замечание. В отличие от трех ранее рассмотренных теорем динамики системы последняя теорема характеризуется следующими особенностями:

1) теорема об изменении кинетической энергии связывает не векторные величины, а скалярные;

2) в правую часть равенства входят работы всех сил, не только внешних, но и внутренних (возможно также разбиение суммы работ на сумму работ активных сил и сил реакций связей);

3) сумма работ внутренних сил, приложенных к точкам твердого тела, равна нулю.

6. Принцип Даламбера. Элементы аналитической механики

6.1. Принцип Даламбера

▶ **Силы инерции. Принцип Даламбера.** Пусть точка материальной системы движется под действием некоторой системы сил (эти силы могут быть разбиты либо на внешние и внутренние, либо на активные и силы реакций связей). Равнодействующую этой системы сходящихся сил обозначим $\vec{F}$.

Силой инерции точки называется векторная величина $\vec{\Phi}$, равная произведению массы точки на ее ускорение и направленная противоположно ускорению:

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}.$$

Сила $\vec{\Phi}$ фиктивна, она не входит в число реальных сил, действующих на точку.

Принцип Даламбера: при движении механической системы (точки) любое ее состояние можно рассматривать как положение равновесия, если к реальным силам, действующим на каждую точку системы, добавить фиктивные силы инерции.

В соответствии с этим принципом, если к каждой точке системы добавить силу $\vec{\Phi}_j = -m_j\vec{a}_j$, то система сил, состоящая из реальных $\vec{F}_j$ и фиктивных $\vec{\Phi}_j$ сил, будет удовлетворять всем уравнением статики, т.е. главный вектор системы сил и ее главный момент относительно произвольного центра P будут равны нулю:

$$\sum \vec{F}_j + \sum \vec{\Phi}_j = 0,$$

$$\sum \vec{M}_P(\vec{F}_j) + \sum \vec{M}_P(\vec{\Phi}_j) = 0.$$

В координатной форме эти уравнения записываются так:

$$\sum F_{jx} + \sum \Phi_{jx} = 0, \qquad \sum M_x(\vec{F}_j) + \sum M_x(\vec{\Phi}_j) = 0,$$
$$\sum F_{jy} + \sum \Phi_{jy} = 0, \qquad \sum M_y(\vec{F}_j) + \sum M_y(\vec{\Phi}_j) = 0,$$
$$\sum F_{jz} + \sum \Phi_{jz} = 0, \qquad \sum M_z(\vec{F}_j) + \sum M_z(\vec{\Phi}_j) = 0.$$

Принцип Даламбера позволяет перенести методы решения задач статики на задачи динамики.

Пример 1. В кабине лифта, поднимающегося замедленно с ускорением a, находится груз веса G (рис. 34). Определить давление пола лифта на груз.

Решение. Примем груз за материальную точку и расставим реальные силы, действующие на него, — активную силу веса $\vec{G}$ и силу давления пола на груз $\vec{N}$. Добавим к этим силам фиктивную силу инерции $\vec{\Phi} = -m\vec{a}$ (обратите внимание: сила $\vec{\Phi}$ на рисунке направлена не против перемещения лифта, а противоположно вектору ускорения).

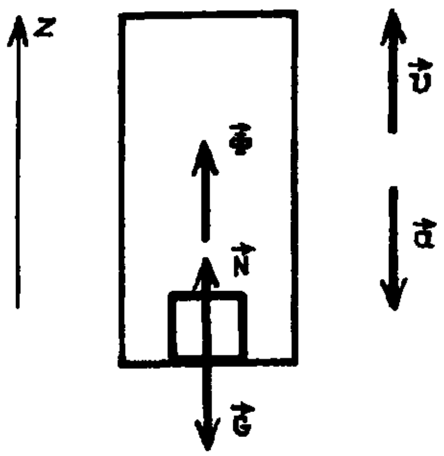

Рис. 34.

Полученная система трех сил $\vec{G}$, $\vec{N}$, $\vec{\Phi}$ уравновешена в соответствии с принципом Даламбера. Линии действия всех сил направлены вдоль одной прямой, поэтому равновесие системы описывается одним уравнением $\sum F_z = 0$, остальные пять уравнений обращаются в тождества. Уравнение равновесия имеет вид

$$-G + N + \Phi = 0.$$

Подставляя вместо Φ модуль силы инерции ma (знак минус был учтен на рисунке), имеем $N = G(g-a)$. Видно, что сила давления пола меньше веса груза.

Система сил инерции может оказаться громоздкой в случаях большого количества материальных точек или распределенных масс. Пользуясь теоремой статики о приведении системы сил к центру, систему сил инерции $\vec{\Phi}_j$ можно заменить эквивалентной системой, состоящей из одной силы $\vec{\Phi}$, приложенной в наперед заданном центре P (она равна *главному вектору сил инерции* $\vec{\Phi} = \sum \vec{\Phi}_j$ и не зависит от выбора центра), и одной пары сил, момент которой $\vec{M}_P^{\text{и}}$ равен *главному моменту сил инерции* относительно центра: $\vec{M}_P^{\text{и}} = \sum \vec{M}_P(\vec{\Phi}_j)$.

Можно показать, что $\vec{\Phi}$ подсчитывается по формуле

$$\vec{\Phi} = -m\vec{a}_C,$$

где m — масса системы, $\vec{a}_C$ — ускорение центра масс.

► **Выражения для главного момента сил инерции твердого тела и его проекций на координатные оси:**

1. При поступательном движении: $\vec{M}_C^{\text{и}} = 0$.

2. При вращении вокруг неподвижной оси z: $M_z^{и} = -I_z\varepsilon$.

3. При плоскопараллельном движении: $M_C^{и} = -I_C\varepsilon$.

Здесь ε — угловое ускорение тела, I_z и I_C — моменты инерции тела относительно оси z и оси, проходящей через центр масс перпендикулярно основной плоскости (знаки «минус» в формулах означают, что направления углового ускорения и момента пары сил инерции противоположны).

Пример 2. Однородный диск радиуса r катится вверх без проскальзывания по дуге окружности радиуса R (рис. 35). Коэффициент трения качения равен k. Определить ускорение центра диска и силу давления диска на опору в тот момент, когда скорость центра диска равна v_0, а угол между вертикалью и прямой, соединяющей центры диска и дуги, равен α.

Решение. Ускорение центра диска состоит из двух составляющих a_C^τ и a_C^n, причем направление a_C^τ заранее неизвестно, а $a_C^n = v_0^2/(R-r)$. При отсутствии проскальзывания $a_C^\tau = \varepsilon r$, где ε — угловое ускорение диска.

Силы инерции диска приведем к центру масс, при этом силу инерции разложим на две составляющие $\vec{\Phi} = \vec{\Phi}^\tau + \vec{\Phi}^n$, где $\vec{\Phi}^\tau = -m\vec{a}_C^\tau$ и $\vec{\Phi}^n = -m\vec{a}_C^n$. Величина момента пары сил инерции будет равна $M_C^{и} = I_C\varepsilon = mra_C^\tau/2$, соответствующую ему дуговую стрелку направим противоположно дуговой стрелке предполагаемого углового ускорения.

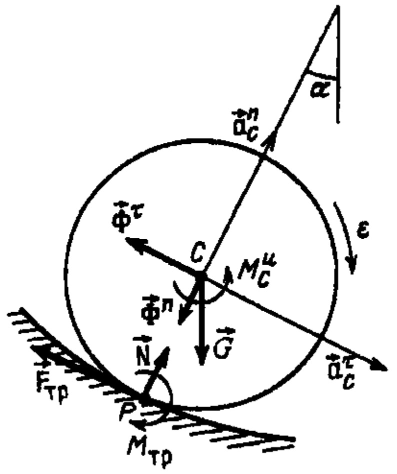

Рис. 35

Изображенная на рис. 35 система сил уравновешена в силу принципа Даламбера. Выпишем уравнения равновесия для плоской системы сил:

$$F_{тр} + \Phi^\tau - G\sin\alpha = 0, \qquad (1)$$

$$N - \Phi^n - G\cos\alpha = 0, \qquad (2)$$

$$-M_{тр} + M_C^{и} + \Phi^\tau r - Gr\sin\alpha = 0. \qquad (3)$$

Здесь (1) — уравнение проекций на направление $\vec{F}_{тр}$, (2) — уравнение проекций на направление $\vec{N}$, (3) — уравнение моментов относительно центра P. Присоединив к этим уравнениям закон Кулона (см. гл. 3):

$$M_{тр} = kN,$$

получим окончательно систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными a_C^τ, N, $F_{тр}$, $M_{тр}$, решив которую, найдем:

$$a_C^\tau = \frac{2}{3r}\left[gr\sin\alpha + k\left(g\cos\alpha + \frac{v_0^2}{R-r}\right)\right], \quad N = m\left(g\cos\alpha + \frac{v_0^2}{R-r}\right).$$

6.2. Классификация механических связей. Обобщенные координаты

► **Классификация механических связей.** *Механическими связями* называются некоторые устройства (тела), накладывающие ограничения на положения и скорости точек механической системы. Эти ограничения выполняются всегда независимо от заданных сил и записываются в виде соотношений, называемых *уравнениями связей*.

Стационарными связями называются связи, не зависящие от времени; связи, зависящие от времени, называются *нестационарными*.

Связи, в уравнения которых входят координаты точек и время, называются *геометрическими*; связи называются *кинематическими* (дифференциальными), если в уравнения связей входят скорости, координаты точек и время.

Если кинематическую связь можно «заменить» эквивалентной геометрической, то она называется *кинематической интегрируемой*, в противном случае — *неинтегрируемой*.

Геометрические и кинематические интегрируемые связи называются *голономными*, а кинематические неинтегрируемые — *неголономными*. Механическая система называется голономной, если на нее наложены только голономные связи, и неголономной, если имеется хотя бы одна неголономная связь.

Связи называются *неосвобождающими*, если ограничения, накладываемые ими на положения точек, их скорости и время, могут быть записаны в форме равенств. *Освобождающие связи* записываются в форме неравенств.

▶ **Возможным (виртуальным) перемещением** точки механической системы называется любое допускаемое наложенными связями перемещение $\delta\vec{r}$ из положения, занимаемого точкой в данный момент времени (при построении таких перемещений надо мысленно остановить время, при этом нестационарные связи станут неподвижными, т.е. — стационарными). Возможные перемещения точка не совершает, но могла бы совершить, не нарушая связей в данный момент времени.

Возможным перемещением системы называется любая совокупность возможных перемещений точек системы $\delta\vec{r}_j$, допускаемых всеми наложенными на нее связями.

В качестве примера рассмотрим точку, на которую наложена нестационарная связь — плоскость, движущаяся поступательно со скоростью $\vec{v}$ (рис. 36). В соответствии с теоремой о сложном движении точки ее действительное перемещение $d\vec{r}$ равно геометрической сумме относительного $\delta\vec{r}$ и переносного, равного $\vec{v}\,dt$. На рисунке видна разница между действительным и возможным перемещениями точки.

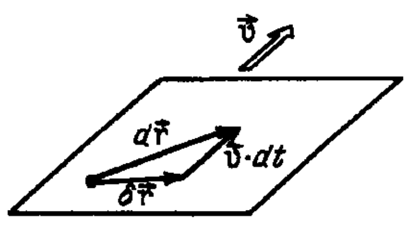

Рис. 36.

Для стационарных связей действительные перемещения точек находятся среди возможных.

Механическая система может иметь множество различных возможных перемещений. Однако для систем, состоящих из материальных твердых тел и конечного количества материальных точек, существует некоторое число независимых между собой возможных перемещений, через которые можно выразить любое другое возможное перемещение. Число независимых перемещений называется *числом степеней свободы механической системы.*

► **Обобщенными координатами** называются независимые между собой параметры, которые однозначно определяют положение каждой точки механической системы. В случае голономной системы число степеней свободы равно числу обобщенных координат, в случае неголономной системы число степеней свободы меньше числа обобщенных координат.

Рассмотрим конкретные примеры.

1. Свободная материальная точка в пространстве является системой с тремя степенями свободы.

2. Свободное твердое тело имеет шесть степеней свободы. Действительно, положение любой точки тела в пространстве можно определить, зная положение трех его точек B_1, B_2, B_3, не лежащих на одной прямой. Положение каждой из точек можно задать тремя параметрами, например, координатами x_j, y_j, z_j $(j = 1, 2, 3)$. Общее число координат равно девяти, но эти 9 чисел не могут задаваться произвольно, так как они связаны тремя уравнениями, согласно которым расстояния d_{12}, d_{23}, d_{31} между точками должны оставаться постоянными, поскольку они принадлежат твердому телу. Если, например, известны шесть координат x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, x_3, то оставшиеся три z_2, y_3, z_3 могут быть найдены из уравнений связей.

3. Тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, имеет одну степень свободы, и в качестве обобщенной координаты можно выбрать угол поворота φ.

4. Твердое тело при плоскопараллельном движении имеет три степени свободы, в качестве обобщенных координат можно, например, выбрать угол поворота и две декартовы координаты какой-либо точки тела.

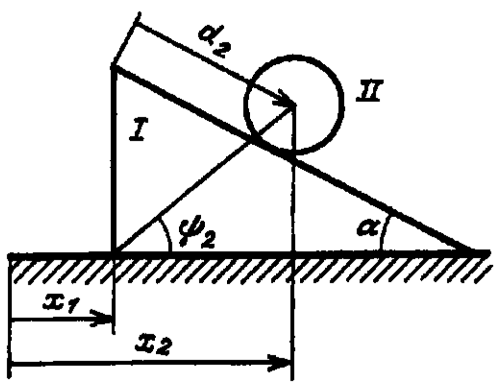

Рис. 37.

5. Твердое тело при поступательном движении имеет три степени свободы, в качестве обобщенных координат можно выбрать три декартовы координаты какой-либо точки тела.

6. Система, состоящая из призмы, положенной на плоскость, и диска, катящегося без проскальзывания по боковой грани призмы, имеет две степени свободы (рис. 37).

7. Система, состоящая из двух свободных точек, имеет шесть степеней свободы.

8. Механизм швейной машины, состоящий из большого числа твердых тел, имеет одну степень свободы.

9. Тонкий прямолинейный стержень на плоскости, который должен двигаться так, чтобы скорость его центра была параллельна оси стержня, имеет две степени свободы.

Из приведенных примеров механических систем лишь одна — последняя — была неголономной, остальные были голономными.

Вернемся снова к понятию обобщенных координат, взяв для иллюстрации систему из примера 6. Положение каждой точки диска и призмы будет известно, как только будут заданы значения величин, входящих в один из наборов, состоящих из двух параметров: (x_1, x_2), или (x_1, d_2), или (x_2, ψ_2), или (x_1, ψ_2), или $q_1 = \frac{1}{3}(x_1+x_2)$, $q_2 = \frac{1}{2}x_1 - x_2$ и т.д.

Подведем итоги: для рассматриваемой системы вариантов выбора обобщенных координат существует бесконечно много, но каждый фиксированный набор всегда содержит две независимые величины. Так как данная система голономна, число обобщенных координат равно двум, т.е. числу степеней свободы. Координаты называются обобщенными, поскольку они могут не иметь явно выраженного геометрического смысла, как, например, в случае координат q_1, q_2.

► **Идеальные связи.** Связи называются *идеальными*, если сумма работ их реакций $\vec{R}_j$ равна нулю на любом возможном перемещении системы:

$$\sum \delta A_j^R = 0.$$

Примером системы с идеальными связями служит свободное твердое тело. Любой сложный механизм, состоящий из нескольких твердых тел, можно трактовать как механическую систему с идеальными связями, если тела соединены абсолютно жестко, при помощи идеальных шарниров (без трения), невесомыми нерастяжимыми идеально гибкими нитями. Кроме того, поверхности соприкосновения должны быть либо абсолютно гладкими, либо идеально шероховатыми, когда одно из тел катится по другому без проскальзывания.

6.3. Принцип возможных перемещений

Принцип возможных перемещений: для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ активных сил $\vec{F}_j$ на любом возможном перемещении системы была равна нулю.

Математическая запись принципа возможных перемещений:

$$\sum \delta A_j^F = 0.$$

Пример. Найти угол φ отклонения от вертикали оси тяжелого однородного стержня веса G, к нижнему концу которого B приложена горизонтальная сила F (рис. 38).

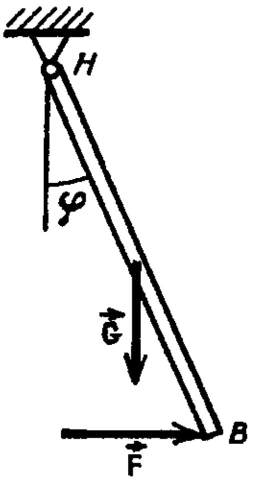

Рис. 38.

Решение. В механическую систему включим стержень, являющийся твердым телом. Пренебрегая трением в шарнире, заключаем, что связи, наложенные на систему, идеальные и к исследованию ее равновесия можно применить принцип возможных перемещений.

Из состояния равновесия, характеризуемого углом φ, сообщаем системе возможное перемещение — поворачиваем стержень на малый угол $\delta\varphi$ вокруг шарнира H в сторону увеличения угла φ, подсчитываем сумму элементарных работ активных сил $\vec{G}$ и $\vec{F}$ и приравниваем ее нулю:

$$-GL\sin\varphi\,\delta\varphi + F2L\cos\varphi\,\delta\varphi = 0$$

(принимаем длину стержня равной $2L$), или после преобразований:

$$\delta\varphi\,(-GL\sin\varphi + F2L\cos\varphi) = 0.$$

Поскольку возможное перемещение $\delta\varphi$ произвольно, то для того, чтобы произведение было равно нулю, необходимо приравнять нулю выражение, заключенное в круглые скобки:

$$-GL\sin\varphi + F2L\cos\varphi = 0.$$

Отсюда находим искомый угол $\varphi = \operatorname{arctg}(2F/G)$.

6.4. Общее уравнение динамики (принцип Даламбера — Лагранжа)

Формулировка общего уравнения динамики: механическая система, на которую наложены идеальные связи, движется так, что в каждый момент времени сумма элементарных работ всех активных сил $\vec{F}_j$ и сил инерции $\vec{\Phi}_j$ на любом возможном перемещении системы равна нулю. Математическая формулировка принципа Даламбера — Лагранжа:

$$\sum \delta A_j^F + \sum \delta A_j^\Phi = 0.$$

Пример. По гладкой горизонтальной поверхности движется прямоугольный параллелепипед массы m_1, по его верхней идеально шероховатой поверхности катится однородный диск массы m_2 и радиуса r_2, к центру которого приложена постоянная горизонтальная сила F_2 (рис. 39, *а*). Найти ускорения параллелепипеда a_1 и центра диска a_2.

Решение. Рассмотрим систему, состоящую из параллелепипеда и диска. Наложенные связи являются идеальными, и для изучения движения системы можно применить общее уравнение динамики. В качестве координат, определяющих положение системы, выберем абсолютную координату параллелепипеда x_1 и координату x_2, характеризующую положение диска по отношению к параллелепипеду.

Векторы ускорений параллелепипеда a_1 и центра диска a_2 горизонтальны, их величины $a_1 = \ddot{x}_1$, $a_2 = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2$, угловое ускорение диска $\varepsilon_2 = \ddot{x}_2/r_2$. Предполагаемые направления векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ и соответствующее им направление дуговой стрелки ε_2 изображены на рис. 39, *б*. К активным силам $\vec{F}_2$, $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ ($\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ — силы веса параллелепипеда и диска) добавим силы инерции $\vec{\Phi}_1 = -m_1\vec{a}_1$, $\vec{\Phi}_2 = -m_2\vec{a}_2$ и пару сил инерции с моментом $M_2^{и} = -I_{2C}\varepsilon_2$ (см. рис. 39, *б*).

Сообщим системе возможное перемещение, увеличив координаты x_1, x_2 на величины δx_1, δx_2. При этом диск повернется на угол $\delta\varphi_2 = \delta x_2/r_2$.

Подсчитаем сумму элементарных работ активных сил и сил инерции на возможном перемещении и приравняем ее нулю:

$$F_2(\delta x_1 + \delta x_2) - m_1 a_1\,\delta x_1 - \\ - m_2 a_2(\delta x_1 + \delta x_2) - I_{2C}\varepsilon_2\,\delta\varphi_2 = 0.$$

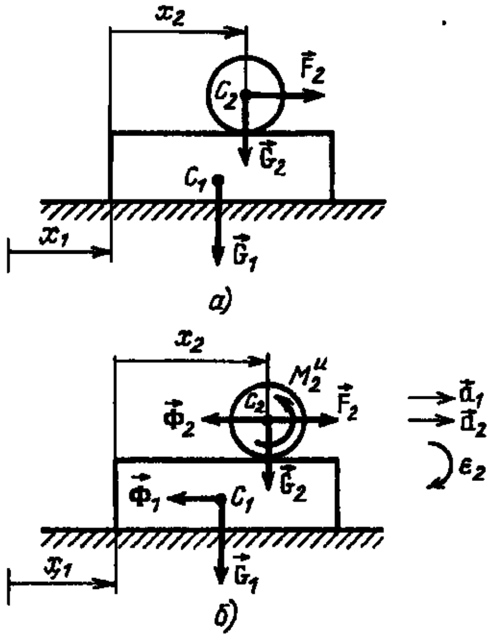

Рис. 39.

После преобразований получим

$$\delta x_1\left[F_2 - m_1\ddot{x}_1 - m_2(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2)\right] + \\ +\delta x_2\left[F_2 - m_2(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) - \tfrac{1}{2}m_2\ddot{x}_2\right] = 0. \quad (4)$$

Здесь возможные перемещения δx_1 и δx_2 могут принимать произвольные независимые между собой значения. Чтобы равенство нулю выполнялось всегда, необходимо, чтобы оба выражения, стоящие множителями при δx_1 и δx_2 и заключенные в квадратные скобки, были равны нулю. Таким образом, равенство (4) распадается на систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$F_2 - m_1\ddot{x}_1 - m_2(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = 0,$$
$$F_2 - m_2(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) - \tfrac{1}{2}m_2\ddot{x}_2 = 0.$$

Решая систему, найдем

$$a_1 = \ddot{x}_1 = \frac{F_2}{3m_1 + m_2}, \quad a_2 = \ddot{x}_1 + \ddot{x}_2 = \frac{F_2(2m_1 + m_2)}{m_2(3m_1 + m_2)}. \quad (5)$$

6.5. Уравнения Лагранжа второго рода

Для описания движения голономной механической системы с n степенями свободы, на которую наложены идеальные связи, используют *уравнения Лагранжа второго рода*

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \quad (6)$$

Здесь q_j — *обобщенные координаты*, количество которых равно числу степеней свободы n, $\dot{q}_j$ — *обобщенные скорости*, равные производным по времени от обобщенных координат, T — кинетическая энергия системы, Q_j — *обобщенные силы*.

Величины T и Q_j должны быть представлены в виде функций обобщенных скоростей, обобщенных координат и времени:

$$T = T(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, q_1, \ldots, q_n, t),$$
$$Q_j = Q_j(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, q_1, \ldots, q_n, t).$$

Обобщенные силы находятся из выражения для суммы элементарных работ активных сил $\vec{F}_i$ на возможном перемещении системы, преобразованного к виду

$$\sum \delta A_i^F = \sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} Q_j \, \delta q_j.$$

Количество обобщенных сил равно числу степеней свободы.

Физическая размерность обобщенной силы Q_j зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты q_j, так как размерность их произведения $Q_j \, \delta q_j$ должна совпадать с размерностью работы силы. По этой причине Q_j может не иметь явного физического смысла, отсюда и ее название — обобщенная сила.

После подстановки в (6) функций T и Q_j получается система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которую необходимо интегрировать с учетом начальных условий.

Пример. Чтобы наглядно проявились достоинства изложенной методики, составим в форме уравнений Лагранжа второго рода дифференциальные уравнения движения механической системы, рассмотренной в примере из разд. 6.4.

Решение. Рассмотрим систему, состоящую из параллелепипеда и диска. Наложенные связи являются голономными и идеальными, поэтому можно применять уравнения Лагранжа второго рода. Система имеет две степени свободы; в качестве обобщенных координат, определяющих ее положение, выберем абсолютные координаты параллелепипеда $q_1 = x_1$ и центра диска $q_2 = x_1 + x_2$ (см. рис. 39, a).

Запишем выражение кинетической энергии системы и приведем его к виду функции, зависящей от $\dot{q}_1, \dot{q}_2, q_1, q_2, t$:

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_{C2}^2}{2} + \frac{I_{C2}\omega_2^2}{2} = \frac{m_1 \dot{q}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{q}_2^2}{2} + \frac{m_2(\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2}{2}.$$

При проведении выкладок использована формула (1) из гл. 5 и кинематическое соотношение $\omega_2 = (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)/r_2$.

Из-за простой кинематики и удачного выбора обобщенных координат оказалось, что в выражение кинетической энергии не входят ни обобщенные координаты, ни время.

Вычислим обобщенные силы. Для этого подсчитаем сумму элементарных работ активных сил $\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{F}_2$ на возможном перемещении системы, задаваемом вариациями $\delta q_1, \delta q_2$, направленными в сторону увеличения координат q_1 и q_2:

$$\sum \delta A_i^F = F_2 \, \delta q_2 = 0 \, \delta q_1 + F_2 \, \delta q_2.$$

Коэффициенты, стоящие при вариациях обобщенных координат, являются искомыми выражениями обобщенных сил, откуда

$$Q_1 = 0, \quad Q_2 = F_2.$$

Осталось записать систему уравнений движения (6):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2.$$

С учетом найденных выражений T, Q_1 и Q_2 после соответствующих преобразований уравнения движения принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{q}_1 - \tfrac{1}{2}m_2(\ddot{q}_2 - \ddot{q}_1) &= 0, \\ m_2\ddot{q}_2 + \tfrac{1}{2}m_2(\ddot{q}_2 - \ddot{q}_1) &= F_2. \end{aligned} \tag{7}$$

Решение системы (7) совпадает с решением (5) этой же задачи, полученным ранее иным способом.

В отличие от уравнений Лагранжа второго рода, общее уравнение динамики пригодно также для изучения неголономных систем, поэтому оно имеет более широкие возможности применения. В то же время применение уравнений (6) для исследования голономных систем более предпочтительно, так как оно требует меньшего количества простых действий.

Моменты инерции относительно точки и оси

Моментом инерции механической системы, состоящей из N материальных точек, относительно точки O называется сумма произведений масс этих точек на квадраты их расстояний до точки O (рис. 22), т. е.

$$J_O=\sum_{k=1}^{N} m_k d_k^2. \tag{3}$$

Момент инерции относительно точки часто называют *полярным моментом инерции.* В случае сплошного тела сумма переходит в интеграл и для полярного момента инерции имеем

$$J_O=\int d^2 \mathrm{d}m, \tag{3'}$$

где $\mathrm{d}m$ — масса элементарной частицы тела, принимаемой в пределе за точку; d — ее расстояние до точки O.

Моментом инерции J_l системы материальных точек относительно оси Ol называется сумма произведений масс этих точек на квадраты их расстояний r_k до оси Ol (рис. 22), т. е.

$$J_l=\sum_{k=1}^{N} m_k r_k^2. \tag{4}$$

В частном случае сплошного тела сумму следует заменить интегралом:

$$J_l=\int r^2 \mathrm{d}m. \tag{4'}$$

Моменты инерции одинаковых по форме однородных тел, изготовленных из разных материалов, отличаются друг от друга. Характеристикой, не зависящей от массы материала, является радиус инерции. Радиус инерции ρ_l относительно оси Ol определяется по формуле

$$\rho_l=\sqrt{J_l/M}, \tag{5}$$

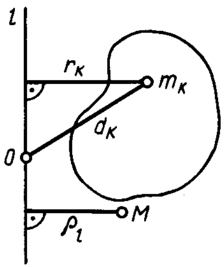

Рис. 22

где M — масса тела.

Момент инерции относительно оси через радиус инерции относительно этой оси определяется выражением

$$J_l=M\rho_l^2. \tag{5'}$$

В справочниках по моментам инерции приводят таблицы значений радиусов инерции различных тел.

Формула (5′) позволяет считать радиус инерции тела относительно оси расстоянием

от этой оси до такой точки, в которой следует поместить массу тела, чтобы ее момент инерции оказался равным моменту инерции тела относительно рассматриваемой оси.

Моменты инерции относительно осей координат

Моменты инерции относительно декартовых осей координат Ox, Oy и Oz и их начала — точки O (рис. 23) — определяются выражениями

$$J_x=\sum_{k=1}^{N} m_k\left(y_k^2+z_k^2\right);\quad J_y=\sum_{k=1}^{N} m_k\left(z_k^2+x_k^2\right);\quad J_z=\sum_{k=1}^{N} m_k\left(x_k^2+y_k^2\right); \tag{6}$$

$$J_O=\sum_{k=1}^{N} m_k\left(x_k^2+y_k^2+z_k^2\right), \tag{7}$$

где x_k, y_k, z_k — координаты материальных точек системы. Для сплошных тел эти формулы примут вид

$$J_x=\int\left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}m;\quad J_y=\int\left(z^2+x^2\right)\mathrm{d}m;$$
$$J_z=\int\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}m;\quad J_O=\int\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}m.$$

Из приведенных формул следует зависимость

$$2J_O=J_x+J_y+J_z. \tag{8}$$

Если через точку O провести другую систему декартовых осей координат $Ox'y'z'$, то для них по формуле (8) получим

$$2J_O=J_{x'}+J_{y'}+J_{z'}. \tag{8'}$$

Из сравнения (8) и (8′) следует, что

$$J_x+J_y+J_z=J_{x'}+J_{y'}+J_{z'}.$$

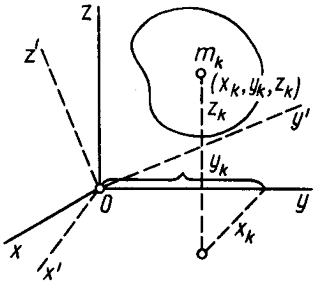

Рис. 23

Сумма моментов инерции относительно декартовых осей координат не зависит от ориентации этих осей в рассматриваемой точке, т. е. является величиной, инвариантной по отношению к направлению осей координат.

Для осей координат $Oxyz$ можно определить следующие три **центробежных момента инерции**:

$$J_{xy}=\sum_{k=1}^{N} m_k x_k y_k;\quad J_{yz}=\mathop{}\limits_{k=1}^{N} m_k y_k z_k;$$
$$J_{zx}=\sum_{k=1}^{N} m_k z_k x_k. \tag{9}$$

Центробежные моменты инерции часто называют *произведениями инерции.*

Моменты инерции относительно осей и точек — величины положительные, так как в них входят квадраты координат. Центробежные моменты инерции содержат произведения координат и могут быть как положительными, так и отрицательными.

Центробежные моменты инерции имеют важное значение при рассмотрении давлений на подшипники при вращении твердого тела вокруг неподвижной оси и в других случаях.

Кроме рассмотренных моментов инерции иногда используются моменты инерции относительно координатных плоскостей J_{Oxy}, J_{Oyz}, J_{Ozx}, которые определяются выражениями

$$J_{Oxy}=\sum_{k=1}^{N} m_k z_k^2;\quad J_{Oyz}=\sum_{k=1}^{N} m_k x_k^2;\quad J_{Ozx}=\sum_{k=1}^{N} m_k y_k^2.$$

§ 5. МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ОСЕЙ, ПРОХОДЯЩИХ ЧЕРЕЗ ЗАДАННУЮ ТОЧКУ

В заданной точке O выберем декартову систему осей координат $Oxyz$. Ось Ol образует с осями координат углы α, β, γ (рис. 30). По определению момента инерции относительно оси Ol имеем

$$J_l=\sum_{k=1}^{N} m_k d_2^k, \tag{20}$$

или для сплошных тел

$$J_l=\int d^2\mathrm{d}m.$$

В дальнейшем используется определение (20). Сплошные тела считаются разбитыми на N малых частей, принимаемых за точки.

Из прямоугольного треугольника OA_kM_k получаем

$$d_k^2=r_k^2-(OA_k)^2, \tag{21}$$

где $r_k^2=x_k^2+y_k^2+z_k^2$, x_k, y_k, z_k — координаты точки M_k. Отрезок OA_k является проекцией радиуса-вектора $\bar r_k=x_k\bar i+y_k\bar j+z_k\bar k$ на ось Ol. Для получения проекции вектора $\bar r_k$ на ось Ol его следует умножить скалярно на единичный вектор этой оси $\bar l^0=\bar i\cos\alpha+\bar j\cos\beta+\bar k\cos\gamma$. Имеем

$$\begin{aligned}OA_k=\bar r_k\cdot\bar l^0&=(x_k\bar i+y_k\bar j+z_k\bar k)(\bar i\cos\alpha+\bar j\cos\beta+\bar k\cos\gamma)=\\&=x_k\cos\alpha+y_k\cos\beta+z_k\cos\gamma.\end{aligned} \tag{22}$$

Умножая в (21) r_k^2, выраженный через координаты точки M_k, на единицу в виде $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ и используя значение (22) для OA_k, получим

$$\begin{aligned}d_k^2=&(x_k^2+y_k^2+z_k^2)(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)-\\&-(x_k\cos\alpha+y_k\cos\beta+z_k\cos\gamma)^2=(y_k^2+z_k^2)\cos^2\alpha+(z_k^2+x_k^2)\cos^2\beta+\\&+(x_k^2+y_k^2)\cos^2\gamma-2y_kz_k\cos\beta\cos\gamma-2z_kx_k\cos\gamma\cos\alpha-\\&-2x_ky_k\cos\alpha\cos\beta.\end{aligned} \tag{23}$$

Подставляя (23) в (20) и вынося косинусы углов за знаки сумм, имеем

$$\begin{aligned}J_l=&\cos^2\alpha\sum_{k=1}^{N} m_k(y_k^2+z_k^2)+\cos^2\beta\sum_{k=1}^{N} m_k(z_k^2+x_k^2)+\\&+\cos^2\gamma\sum_{k=1}^{N} m_k(x_k^2+y_k^2)-2\cos\beta\cos\gamma\sum_{k=1}^{N} m_ky_kz_k-\\&-2\cos\gamma\cos\alpha\sum_{k=1}^{N} m_kz_kx_k-2\cos\alpha\cos\beta\sum_{k=1}^{N} m_kx_ky_k.\end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\sum_{k=1}^{N} m_k(y_k^2+z_k^2)=J_x; \quad \sum_{k=1}^{N} m_k(z_k^2+x_k^2)=J_y; \quad \sum_{k=1}^{N} m_k(x_k^2+y_k^2)=J_z$$

— моменты инерции относительно осей координат, а

$$\sum_{k=1}^{N} m_k y_k z_k = J_{yz}; \quad \sum_{k=1}^{N} m_k z_k x_k = J_{zx}; \quad \sum_{k=1}^{N} m_k x_k y_k = J_{xy}$$

— центробежные моменты инерции относительно тех же осей, получим

$$J_l = J_x\cos^2\alpha + J_y\cos^2\beta + J_z\cos^2\gamma - 2J_{yz}\cos\beta\cos\gamma - \\ -2J_{zx}\cos\gamma\cos\alpha - 2J_{xy}\cos\alpha\cos\beta. \tag{24}$$

Для определения момента инерции J_l кроме углов α, β, γ, определяющих направление оси, необходимо знать в точке O шесть моментов инерции: J_x, J_y, J_z, J_{yz}, J_{zx}, J_{xy}. Их удобно расположить как элементы единой таблицы или матрицы:

$$(J)=\begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Матрица, или таблица (25), составленная из осевых и центробежных моментов инерции относительно декартовых осей координат, называется *тензором инерции* в точке O. В тензоре инерции условились центробежные моменты инерции брать со знаком минус. Компоненты тензора инерции (отдельные осевые или центробежные моменты инерции) зависят не только от выбора точки, но и от ориентации осей координат в этой точке.

Для определения момента инерции относительно какой-либо оси, проходящей через заданную точку, для рассматриваемого тела необходимо иметь тензор инерции в этой точке и углы, определяющие направление оси с осями координат.

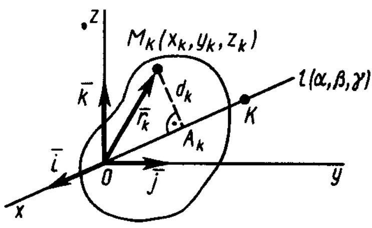

Рис. 30

§ 6. ЭЛЛИПСОИД ИНЕРЦИИ

Для характеристики распределения моментов инерции тела относительно различных осей, проходящих через заданную точку, используется поверхность второго порядка — эллипсоид инерции. Для построения этой поверхности на каждой оси Ol (см. рис. 31), проходящей через точку O, откладывают от этой точки отрезок

$$OK = 1/\sqrt{J_l}. \tag{26}$$

Геометрическое место концов отрезков OK расположится на поверхности, которая называется эллипсоидом инерции. Получим уравнение эллипсоида инерции. Для этого выразим косинусы углов α, β, γ через координаты x, y, z точки K. Имеем:

$$\cos\alpha = \frac{x}{OK} = \sqrt{J_l}x; \quad \cos\beta = \frac{y}{OK} = \sqrt{J_l}y; \quad \cos\gamma = \frac{z}{OK} = \sqrt{J_l}z.$$

Подставляя эти значения косинусов углов в (24) и сокращая на J_l, получим уравнение поверхности второго порядка:

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{yz} yz - 2J_{zx} zx - 2J_{xy} xy = 1. \tag{27}$$

Это действительно уравнение эллипсоида, так как отрезок OK имеет конечную длину для всех осей, для которых моменты инерции не обращаются в нуль. Другие поверхности второго порядка, например гиперболоиды и параболоиды, имеют бесконечно удаленные точки. Эллипсоид инерции вырождается в цилиндр для тела в виде прямолинейного отрезка, если точка O расположена на самом отрезке. Для оси, направленной по этой прямой линии, момент инерции обращается в нуль и соответственно отрезок OK равен бесконечности.

Для каждой точки O имеется свой эллипсоид инерции. Эллипсоид инерции для центра масс тела называют *центральным эллипсоидом инерции.* Оси эллипсоида инерции (его сопряженные диаметры) называются *главными осями инерции.* В общем случае эллипсоид инерции имеет три взаимно перпендикулярные главные оси инерции. Они являются его осями симметрии.

В случае эллипсоида вращения все прямые, расположенные в экваториальной плоскости эллипсоида, перпендикулярной оси вращения, будут главными осями инерции. Для шара любая прямая, проходящая через его центр, есть главная ось инерции.

Моменты инерции относительно главных осей инерции называются *главными моментами инерции*, а относительно главных центральных осей инерции — *главными центральными моментами инерции.*

Если уравнение эллипсоида инерции отнести к его главным осям Ox', Oy', Oz', то оно примет вид

$$J_{x'}x'^2+J_{y'}y'^2+J_{z'}z'^2=1, \tag{27'}$$

где x', y', z' — текущие координаты точки, расположенной на эллипсоиде инерции, относительно главных осей инерции; $J_{x'}$, $J_{y'}$, $J_{z'}$ — главные моменты инерции. Уравнение эллипсоида инерции (27′) не содержит слагаемых с произведениями координат точек. Поэтому *центробежные моменты инерции относительно главных осей инерции равны нулю*, т. е.

$$J_{y'z'}=0; \quad J_{z'x'}=0; \quad J_{x'y'}=0.$$

Справедливо и обратное утверждение: если центробежные моменты инерции относительно трех взаимно перпендикулярных осей равны нулю, то эти оси являются главными осями инерции. Обращение в нуль трех центробежных моментов инерции является необходимым и достаточным условием того, что соответствующие прямоугольные оси координат есть главные оси инерции.

Главные моменты инерции часто обозначают J_1, J_2, J_3 вместо $J_{x'}$, $J_{y'}$, $J_{z'}$. Для главных осей инерции формула (24) принимает форму

$$J_l=J_1\cos^2\alpha+J_2\cos^2\beta+J_3\cos^2\gamma. \tag{24'}$$

Теорема 1. Если одна из декартовых осей координат, например Oz (рис. 31), является главной осью инерции для точки O, а две другие оси Ox и Oy — любые, то два центробежных момента инерции, содержащих индекс главной оси инерции Oz, обращаются в нуль, т. е. $J_{xz}=0$ и $J_{yz}=0$.

Главная ось инерции Oz является осью симметрии эллипсоида инерции. Поэтому каждой точке эллипсоида, например $M(O, y, z)$, соответствует симметричная относительно этой оси точка $M'(O, -y, z)$. Подставляя в уравнение эллипсоида инерции (27) последовательно координаты этих точек, получим

$$J_y y^2+J_z z^2-2J_{yz}yz=1;\quad J_y(-y)^2+J_z z^2-2J_{yz}(-y)z=1.$$

Вычитая из первого уравнения второе, имеем

$$-4J_{yz}yz=0.$$

Так как всегда можно выбрать точки, для которых y и z отличны от нуля, то $J_{yz}=0$.

Аналогичные рассуждения для двух симметричных относительно оси Oz точек $N(x, O, z)$ и $N'(-x, O, z)$ приводят к заключению, что $J_{xz}=0$. В аналитической геометрии при исследовании уравнений поверхностей

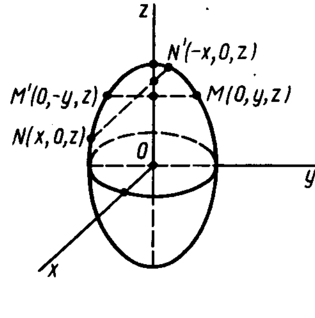

Рис. 31

второго порядка доказывается обратное утверждение, что если $J_{xz}=0$ и $J_{yz}=0$, то ось Oz есть главная ось. Таким образом, обращение в нуль центробежных моментов инерции J_{xz} и J_{yz} является необходимым и достаточным условием, чтобы ось Oz была главной осью инерции для точки O.

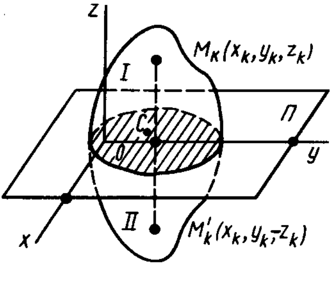

Рис. 32

Теорема 2. Если однородное тело имеет плоскость симметрии, то для любой точки, лежащей в этой плоскости, одна из главных осей инерции перпендикулярна плоскости симметрии, а две другие главные оси инерции расположены в этой плоскости.

Для доказательства теоремы выберем в плоскости симметрии П точку O и в ней оси прямоугольной системы координат $Oxyz$, причем ось Oz направим перпендикулярно плоскости симметрии (рис. 32). Тогда каждой точке тела $M_k(x_k, y_k, z_k)$ массой m_k соответствует симметричная относительно плоскости П точка $M'_k(x_k, y_k, -z_k)$ с такой же массой. Координаты точек M_k и M'_k отличаются только знаком у координат z_k.

Для центробежного момента инерции J_{yz} имеем

$$J_{yz}=\sum_{k=1}^{N} m_k y_k z_k=\sum_{(I)} m_k y_k z_k+\sum_{(II)} m_k y_k(-z_k)=0,$$

так как часть тела (I), соответствующая точкам с положительными координатами z_k, одинакова с частью тела (II), у которой точки имеют такие же координаты z_k, но со знаком минус. Аналогично доказывается, что

$$J_{xz}=\sum_{k=1}^{N} m_k x_k z_k=0.$$

Так как центробежные моменты инерции J_{yz} и J_{xz} обращаются в нуль, то ось Oz есть главная ось инерции для точки O. Другие две главные оси инерции перпендикулярны оси Oz и, следовательно, расположены в плоскости симметрии.

Теорема 3. Если однородное тело имеет ось симметрии или неоднородное тело имеет ось материальной симметрии, то эта ось является главной центральной осью инерции.

Теорема доказывается аналогично предыдущей. Для каждой точки тела M_k с положительными координатами x_k, y_k, z_k

и массой m_k существует симметричная относительно оси точка с такой же массой и такими же по величине, но отрицательными координатами $-x_k$, $-y_k$, $+z_k$, если осью симметрии является ось Oz. Тогда

$$J_{xz}=\sum_{k=1}^{N} m_k x_k z_k=\sum_{(\mathrm{I})} m_k x_k z_k+\sum_{(\mathrm{II})} m_k(-x_k)z_k=0,$$

так как суммы по симметричным относительно оси частям тела (I) и (II) отличаются друг от друга только знаком у координаты x_k.

Аналогично доказывается, что $J_{yz}=0$.

Таким образом, ось Oz является главной осью инерции для любой точки, расположенной на оси симметрии тела. Она есть главная центральная ось инерции, так как центр масс находится на оси симметрии.

масс находится на оси симметрии.

Теорема 4. Главные оси инерции для точки O, расположенной на главной центральной оси инерции, параллельны главным центральным осям инерции (рис. 33).

Выберем в точке O главной центральной оси инерции Cz систему декартовых осей координат $Ox'y'z'$, взаимно параллельных главным центральным осям инерции $Cxyz$. Тогда координаты точки тела M_k в двух системах осей координат будут связаны между собой формулами параллельного переноса осей

$$x'_k = x_k; \;\; y'_k = y_k; \;\; z'_k = z_k - h,$$

где $h = OC$. Используя эти формулы, вычисляем центробежные моменты инерции $J_{y'z'}$, $J_{z'x'}$ и $J_{x'y'}$. Имеем

$$J_{y'z'} = \sum_{k=1}^{N} m_k y'_k z'_k = \sum_{k=1}^{N} m_k y_k z_k - h \sum_{k=1}^{N} m_k y_k = J_{yz} - hMy_C,$$

так как

$$\sum_{k=1}^{N} m_k y_k z_k = J_{yz}, \;\; \sum_{k=1}^{N} m_k y_k = My_C,$$

где M — масса тела; y_C — координата центра масс относительно системы координат $Cxyz$.

Аналогично получаем

$$J_{z'x'} = J_{zx} - hMx_C; \;\; J_{x'y'} = J_{xy}.$$

Если C — центр масс системы, то $x_C = 0$ и $y_C = 0$. Для главных центральных осей инерции центробежные моменты инерции равны нулю, т. е.

$$J_{yz} = 0; \;\; J_{zx} = 0; \;\; J_{xy} = 0.$$

Используя полученные формулы при этих условиях, имеем:

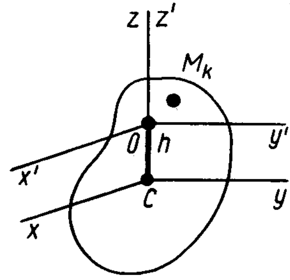

Рис. 33

$$J_{y'z'} = 0; \;\; J_{z'x'} = 0; \;\; J_{x'y'} = 0.$$

Следовательно, оси Ox', Oy', Oz' есть главные оси инерции для произвольной точки O, расположенной на главной центральной оси инерции Cz. Теорема доказана.

§ 1. КИНЕТИЧЕСКИЙ МОМЕНТ ТЕЛА, ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Имеем твердое тело, одна из точек которого закреплена. Движение тела рассматривается относительно некоторой системы координат $Oxyz$ (рис. 132), начало которой находится в закрепленной точке тела. Вращение тела вокруг неподвижной точки в каждый момент времени есть вращение вокруг мгновенной оси с угловой скоростью $\bar{\omega}$, направленной по этой оси. Для кинетического момента $\bar{K}_O$ относительно неподвижной точки, согласно его определению, имеем

$$\bar{K}_O = \sum_{k=1}^{N} \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k, \tag{1}$$

где $\bar{r}_k$ — радиус-вектор какой-либо точки тела; m_k — масса точки; $\bar{v}_k$ — скорость этой точки относительно выбранной системы отсчета. Для сплошного тела роль точек выполняют малые элементарные частицы тела, на N которых оно разбито.

Из кинематики известно, что скорости точек тела при его вращении вокруг неподвижной точки вычисляются по векторной формуле Эйлера

$$\bar{v}_k = \bar{\omega} \times \bar{r}_k = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_k & y_k & z_k \end{vmatrix} = \bar{i}(\omega_y z_k - \omega_z y_k) +$$

$$+ \bar{j}(\omega_z x_k - \omega_x z_k) + \bar{k}(\omega_x y_k - \omega_y x_k), \tag{2}$$

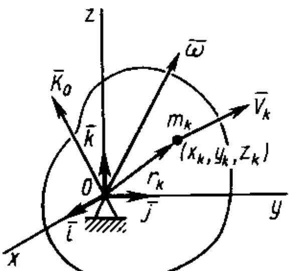

Рис. 132

которую в проекциях на оси координат, учитывая, что векторное произведение можно представить в виде определителя, выразим в форме

$$v_{kx} = \omega_y z_k - \omega_z y_k; \quad v_{ky} = \omega_z x_k - \omega_x z_k;$$

$$v_{kz} = \omega_x y_k - \omega_y x_k, \tag{2'}$$

где x_k, y_k, z_k — координаты точки тела с массой m_k.

Для проекции кинетического момента на ось Ox с учетом (2′) имеем

$$K_x = \sum_{k=1}^{N} m_k (y_k v_{kz} - z_k v_{ky}) = \sum_{k=1}^{N} m_k [y_k(\omega_x y_k - \omega_y x_k) -$$

$$- z_k(\omega_z x_k - \omega_x z_k)] = \omega_x \sum_{k=1}^{N} m_k (y_k^2 + z_k^2) -$$

$$- \omega_y \sum_{k=1}^{N} m_k x_k y_k - \omega_z \sum_{k=1}^{N} m_k x_k z_k. \tag{1'}$$

Проекции угловой скорости ω_x, ω_y, ω_z вынесены за знаки сумм, так как они не зависят от точек тела, по которым ведется суммирование. Суммы в (1′) представляют собой соответственно осевой J_x и центробежные J_{xy}, J_{xz} моменты инерции. С учетом этого для K_x и по аналогии для K_y и K_z получаем

$$\left.\begin{aligned} K_x &= J_x\omega_x - J_{xy}\omega_y - J_{xz}\omega_z; \\ K_y &= -J_{yx}\omega_x + J_y\omega_y - J_{yz}\omega_z; \\ K_z &= -J_{zx}\omega_x - J_{zy}\omega_y + J_z\omega_z. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

По формулам (3) вычисляются проекции на оси координат кинетического момента тела относительно его закрепленной точки. Эти проекции являются линейными функциями проекций угловой скорости вращения тела на те же оси координат. Кинетический момент $\bar{K}_O$ по проекциям определяется формулой

$$\bar{K}_O = K_x\bar{i} + K_y\bar{j} + K_z\bar{k}. \qquad (1'')$$

Проекции на оси координат кинетического момента по формулам (3) можно вычислить как для осей, относительно которых рассматривается вращение тела (неподвижные оси), так и любых других подвижных осей, например скрепленных с вращающимся телом. Для неподвижных осей осевые и центробежные моменты инерции изменяются при вращении тела и, следовательно, зависят от времени вследствие изменения положения тела относительно этих осей. Для подвижных осей, скрепленных с телом, моменты инерции являются постоянными, не зависящими от времени, так как положение тела относительно этих осей не изменяется при его вращении. В случае проецирования кинетического момента на подвижные оси координат следует иметь в виду, что кинетический момент вычисляется для движения тела относительно неподвижных осей.

Если применить тензор инерции

$$J = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix}$$

и учесть правило умножения тензора на вектор-столбец $\bar{\omega}$, то (3) можно кратко выразить формулой

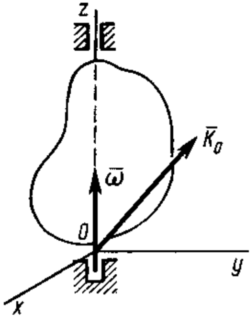

Рис. 133

$$\bar{K}_O = J\bar{\omega}.$$

Формулы (3) упрощаются для проекций кинетического момента на главные оси инерции для неподвижной точки O. Для таких осей координат $J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$ и из (3) получаем:

$$K_x = J_x\omega_x; \quad K_y = J_y\omega_y; \quad K_z = J_z\omega_z. \tag{4}$$

В этом случае проекции кинетического момента вычисляются так же, как и в случае, если бы каждая из главных осей инерции была неподвижной осью вращения тела.

Главные оси инерции для неподвижной точки O обычно подвижные оси, скрепленные с самим вращающимся телом. Только такие оси могут быть главными в течение всего времени вращения тела. Другие подвижные или неподвижные оси могут быть главными только в отдельные моменты времени.

Частный случай. Если имеем тело, которое вращается вокруг неподвижной оси Oz (рис. 133), то в этом случае вектор угловой скорости $\bar{\omega}$ направлен по оси вращения и его проекции на две другие оси, перпендикулярные оси вращения, равны нулю, т. е. $\omega_x = \omega_y = 0$. Так как вращение вокруг неподвижной оси есть частный случай вращения тела вокруг неподвижной точки, то по формулам (3) в этом случае имеем:

$$K_x = -J_{xy}\omega_z; \quad K_y = -J_{yz}\omega_z; \quad K_z = J_z\omega_z. \tag{5}$$

Если ось вращения Oz является главной осью инерции для ее точки O, то $J_{xz} = J_{yz} = 0$ и из (5) получаем:

$$K_x = 0; \quad K_y = 0; \quad K_z = J_z\omega_z. \tag{5'}$$

Кинетический момент для случая главной оси направлен по оси вращения. В других случаях он не направлен по оси вращения. Ось вращения является главной осью инерции для всех своих точек, если она является главной центральной осью инерции.

§ 2. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ ТЕЛА С ОДНОЙ ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКОЙ

В соответствии с определением кинетической энергии имеем

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k\bar{v}_k^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k\bar{v}_k\cdot\bar{v}_k. \tag{6}$$

Если заменить один из векторов скорости $\bar{v}_k$ его значением из (2), то получим

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k(\bar{\omega}\times\bar{r}_k)\cdot\bar{v}_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} m_k\bar{v}_k\cdot(\bar{\omega}\times\bar{r}_k). \tag{6'}$$

В смешанном произведении трех векторов можно переставлять сомножители в круговом порядке, т. е.

$$\bar{v}_k\cdot(\bar{\omega}\times\bar{r}_k)=\bar{r}_k\cdot(\bar{v}_k\times\bar{\omega})=\bar{\omega}\cdot(\bar{r}_k\times\bar{v}_k).$$

С учетом этого после вынесения вектора $\bar{\omega}$ за знак суммы получим

$$T={}^1/_2\,\bar{\omega}\cdot\sum_{k=1}^{N}\bar{r}_k\times m_k\bar{v}_k={}^1/_2\,\bar{\omega}\cdot\bar{K}_O, \tag{7}$$

так как

$$\sum_{k=1}^{N}\bar{r}_k\times m_k\bar{v}_k=\bar{K}_O.$$

Итак, *кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной точки, равна половине скалярного произведения угловой скорости вращения тела и кинетического момента относительно закрепленной точки.*

Скалярное произведение можно представить в двух формах:

$$T={}^1/_2\,\bar{\omega}\cdot\bar{K}_O={}^1/_2\,\omega K_O\cos(\bar{\omega},\widehat{\ }\bar{K}_O)=$$
$$={}^1/_2\,(\omega_x K_x+\omega_y K_y+\omega_z K_z). \tag{7'}$$

Так как кинетическая энергия может иметь только положительные значения, то из (7′) следует $\cos(\bar{\omega},\widehat{\ }\bar{K}_O)>0$, т. е. угол между мгновенной осью, по которой направлен вектор угловой скорости, и кинетическим моментом относительно закрепленной точки всегда острый.

Если в (7′) величины K_x, K_y, K_z заменить их значениями из (3), то получим

$$T = {}^1/_2\left(J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2 - 2J_{yz}\omega_y\omega_z - J_{zx}\omega_z\omega_x - 2J_{xy}\omega_x\omega_y\right), \quad (8)$$

т. е. *кинетическая энергия тела с одной закрепленной точкой является квадратичной формой проекций угловой скорости на оси координат.*

В матричной форме, учитывая (1′), кинетическую энергию можно представить формулой

$$T = {}^1/_2\,\bar{\omega}\left(J\bar{\omega}\right).$$

Если оси координат $Oxyz$ являются главными осями инерции для закрепленной точки O, то $J_{xy} = J_{yz} = J_{zx} = 0$ и (8) примет вид

$$T = {}^1/_2\left(J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2\right). \quad (9)$$

Эта формула является обобщением выражения кинетической энергии, полученного при рассмотрении вращения твердого тела вокруг неподвижной оси. Согласно (9), кинетическая энергия при вращении тела вокруг неподвижной точки получается так же, как при одновременном вращении вокруг трех неподвижных главных осей инерции, проходящих через эту точку.

Проверкой можно убедиться, что как в общем случае, так и в случае главных осей инерции справедливы формулы

$$K_x = \partial T / \partial \omega_x; \quad K_y = \partial T / \partial \omega_y; \quad K_z = \partial T / \partial \omega_z.$$

Для случая вращения тела вокруг неподвижной оси

$$K_z = \partial T / \partial \omega_z.$$

§ 3. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Динамические уравнения Эйлера вращения тела вокруг неподвижной точки под действием сил получают из теоремы об изменении кинетического момента. Согласно этой теореме,

$$\mathrm{d}\bar{K}_O/\mathrm{d}t = \bar{L}_O^{(e)}, \tag{10}$$

где $\bar{K}_O$ — кинетический момент тела относительно его закрепленной точки от вращения тела относительно инерциальной системы отсчета; $\bar{L}_O^{(e)} = \sum\limits_{k=1}^{N} \bar{M}_O(\bar{F}_k^{(e)})$ — векторная сумма моментов внешних сил, действующих на тело (рис. 135). К числу внешних сил относится также сила реакции закрепленной точки.

Если выразить (10) в проекциях на инерциальные (неподвижные) оси координат, то через K_x, K_y, K_z в полученные уравнения, согласно (3) в общем и (4) в частном случаях главных осей, войдут изменяющиеся с течением времени моменты инерции, для вычисления которых следует уже знать движение тела, которое само подлежит определению по заданным силам. Чтобы избежать этого, Эйлер предложил проецировать векторы, входящие в (10), на подвижные оси координат, скрепленные с вращающимся телом. Для таких осей моменты инерции не зависят от времени.

Подготовим векторное уравнение (10) для проецирования на подвижные оси координат, скрепленные с движущимся телом. Для этого абсолютную производную по времени от кинетического момента необходимо выразить через относительную производную, используя формулу Бура, т. е.

$$\frac{\mathrm{d}\bar{K}_O}{\mathrm{d}t} = \frac{\tilde{\mathrm{d}}\bar{K}_O}{\mathrm{d}t} + \bar{\omega} \times \bar{K}_O, \tag{11}$$

так как подвижная система осей координат имеет ту же угловую скорость, что и само тело, с которым скреплены эти оси.

Для удобства проецирования представим векторное произведение векторов в виде определителя с последующим разложением его по элементам первой строки, т. е.

$$\bar{\omega}\times\bar{K}_O=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \omega_x & \omega_y & \omega_z\\ K_x & K_y & K_z\end{vmatrix}=\bar{i}\left(\omega_y K_z-\omega_z K_y\right)+$$

$$+\bar{j}\left(\omega_z K_x-\omega_x K_z\right)+\bar{k}\left(\omega_x K_y-\omega_y K_x\right),\qquad(12)$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ — единичные векторы, направленные по осям координат подвижной системы осей координат. Используя формулу (11), теорему об изменении кинетического момента (10) представим в форме

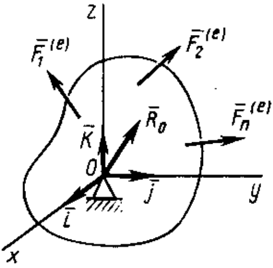

Рис. 135

$$\frac{\tilde{d}\bar{K}_O}{dt}+\bar{\omega}\times\bar{K}_O=\bar{L}_O^{(e)}.\qquad(10')$$

В проекциях на подвижные оси координат, скрепленные с вращающимся телом, из (10′) с учетом (12) получим

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dK_x}{dt}+\omega_y K_z-\omega_z K_y=L_x^{(e)};\\ &\frac{dK_y}{dt}+\omega_z K_x-\omega_x K_z=L_y^{(e)};\\ &\frac{dK_z}{dt}+\omega_x K_y-\omega_y K_x=L_z^{(e)}.\end{aligned}\right\}\qquad(13)$$

Эти уравнения после подстановки в них значений K_x, K_y, K_z из (3) приведут к обобщенным динамическим уравнениям Эйлера. Это еще довольно сложные уравнения. Дальнейшее их упрощение получается, если использовать второе предложение Эйлера — выбрать в качестве подвижных осей координат, скрепленных с телом, главные оси инерции для точки O. В этом случае K_x, K_y, K_z определяются по формулам (4). Моменты инерции по-прежнему не будут зависеть от времени и их можно выносить за знак производных по времени. Таким образом, из (13), используя (4), получим следующие динамические уравнения Эйлера:

$$\left.\begin{aligned} J_x \frac{d\omega_x}{dt} + \left(J_z - J_y\right) \omega_y \omega_z &= L_x^{(e)}; \\ J_y \frac{d\omega_y}{dt} + \left(J_x - J_z\right) \omega_z \omega_x &= L_y^{(e)}; \\ J_z \frac{d\omega_z}{dt} + \left(J_y - J_x\right) \omega_x \omega_y &= L_z^{(e)}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

К этим динамическим уравнениям Эйлера следует присоединить кинематические уравнения Эйлера

$$\left.\begin{aligned} \omega_x &= \ddot{\psi} \sin\theta \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\varphi; \\ \omega_y &= \dot{\psi} \sin\theta \cos\varphi - \dot{\theta} \sin\varphi; \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi}, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

которые выражают проекции вектора угловой скорости вращения тела на подвижные оси координат, скрепленные с телом, через углы Эйлера, ψ, θ, φ и их производные по времени.

§ 4. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

Установим зависимость проекций вектора угловой скорости на оси координат, скрепленные с телом, от углов Эйлера ψ, θ, φ и их производных по времени.

Тело, имеющее неподвижную точку O, движется относительно осей координат $Ox_1y_1z_1$ (рис. 136). С движущимся телом скреплена система подвижных осей координат $Oxyz$, движение которой и характеризует движение рассматриваемого твердого тела относительно осей $Ox_1y_1z_1$. Положение подвижной системы координат относительно неподвижной, а следовательно, и положение самого движущегося тела определяются тремя углами Эйлера: ψ, θ, φ.

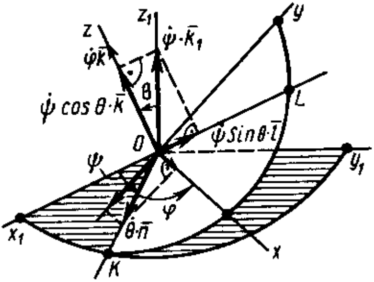

Рис. 136

Изменение угла прецессии ψ, образованного координатной осью Ox_1 и линией узлов OK, которая является линией пересечения координатных плоскостей Ox_1y_1 и Oxy, соответствует вращению тела вокруг оси прецессии Oz_1, перпендикулярной линиям, образующим угол, с угловой скоростью $\dot{\psi}\bar{k}_1$, направленной по этой оси. Здесь $\bar{k}_1$ — единичный вектор оси Oz_1.

При изменении угла нутации θ, заключенного между осями координат Oz_1 и Oz, тело вращается вокруг перпендикулярной этим осям линии узлов OK с угловой скоростью $\dot{\theta}\bar{n}$, где $\bar{n}$ — единичный вектор, направленный в положительную сторону линии узлов.

Изменение угла собственного вращения φ, образованного координатной осью Ox и линией узлов OK, приводит к вращению тела вокруг оси собственного вращения Oz, перпендикулярной этим линиям, с угловой скоростью $\dot{\varphi}\bar{k}$, где $\bar{k}$ — единичный вектор оси Oz.

При изменении углов Эйлера ψ, θ и φ движение тела можно рассматривать как сложное, состоящее из трех вращений вокруг пересекающихся осей Oz_1, OK и Oz с угловыми скоростями $\dot{\psi}\bar{k}_1$, $\dot{\theta}\bar{n}$ и $\dot{\varphi}\bar{k}$ соответственно. Совокупность этих трех вращений эквивалентна вращению тела вокруг мгновенной оси с угловой скоростью $\bar{\omega}$, направленной по этой оси.

По теореме о сложении вращений вокруг пересекающихся осей имеем

$$\bar{\omega}=\dot{\psi}\bar{k}_1+\dot{\theta}\bar{n}+\dot{\varphi}\bar{k}. \tag{16}$$

Определим проекции вектора угловой скорости $\bar{\omega}$ на подвижные оси координат $Oxyz$, скрепленные с телом. Движение тела при этом рассматривается относительно неподвижной системы отсчета $Ox_1y_1z_1$. При проецировании на оси координат $Oxyz$ векторной суммы правой части (16) следует проецировать на эти оси каждый из слагаемых векторов.

Вектор угловой скорости $\dot{\varphi}\bar{k}$ направлен по оси Oz и дает проекцию на эту ось, равную $\dot{\varphi}$, так как он перпендикулярен двум другим осям: Ox и Oy.

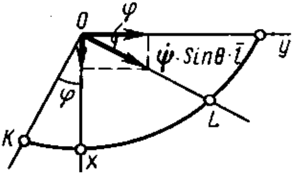

Рис. 137

Угловая скорость $\dot{\theta}\bar{n}$, направленная по линии узлов, располагается в плоскости подвижных осей Ox и Oy, и ее проекция на ось Ox равна $\dot{\theta}\cos\varphi$, а на ось Oy — $(-\dot{\theta}\sin\varphi)$. Знак минус у проекции на ось Oy поставлен потому, что при изображенном на рисунке расположении осей вектор $\dot{\theta}\bar{n}$ при разложении по осям Ox и Oy имеет составляющую в отрицательном направлении оси Oy. Проецируемый вектор $\dot{\theta}\bar{n}$ перпендикулярен оси Oz, и его проекция на эту ось равна нулю.

Для того чтобы спроецировать на оси координат $Oxyz$ вектор $\dot{\psi}\bar{k}_1$, его следует предварительно разложить на две перпендикулярные составляющие, одна из которых направлена по оси Oz, а другая перпендикулярная составляющая расположится в плоскости осей координат Ox и Oy. Имеем

$$\psi\bar{k}_1=\varphi\cos\theta\cdot\bar{k}+\psi\sin\theta\cdot\bar{l}, \tag{17}$$

где $\bar{l}$—единичный вектор, направленный по линии OL. При проецировании вектора $\psi\bar{k}_1$ на оси координат следует проецировать на эти оси каждый вектор из правой части (17). Вектор $\psi\cos\theta\cdot\bar{k}$ дает проекцию $\psi\cos\theta$ только на ось Oz. Остается спроецировать вектор $\psi\sin\theta\cdot\bar{l}$, расположенный в плоскости осей координат Ox и Oy, на эти оси. В плоскости этих осей расположится также линия узлов OK (рис. 137). Линия OL, по которой направлен проецируемый вектор $\psi\sin\theta\cdot\bar{l}$, и линия узлов взаимно перпендикулярны, так как линия узлов перпендикулярна осям координат Oz и Oz_1, а следовательно, она перпендикулярна и линии OL, расположенной в плоскости этих осей. Угол φ между осями Ox и OK является также углом между перпендикулярными к ним осями Oy и OL. Таким образом, проекция вектора $\psi\sin\theta\cdot\bar{l}$ на ось Oy равна $\psi\sin\theta\cos\varphi$, а на ось Ox—$\psi\sin\theta\sin\varphi$.

Собирая вместе проекции на оси координат векторов, входящих в правую часть (16), с учетом полученных проекций векторов из правой части (17) получим кинематические уравнения Эйлера.

Выразим дополнительно косинусы углов оси прецессии Oz_1 с осями координат $Oxyz$, скрепленными с движущимся телом, через углы Эйлера. По оси прецессии Oz_1 направлен вектор угловой скорости $\psi\cdot\bar{k}_1$. Поэтому множители при ψ в формулах для $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и есть искомые косинусы указанных выше углов. Обозначая их для краткости $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, получаем

$$\left.\begin{aligned}
\gamma_1&=\cos(z_1,\widehat{\ }x)=\sin\theta\sin\varphi;\\
\gamma_2&=\cos(z_1,\widehat{\ }y)=\sin\theta\cos\varphi;\\
\gamma_3&=\cos(z_1,\widehat{\ }z)=\cos\theta.
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Основные допущения приближенной теории

При применении гироскопов в различных устройствах важно знать движение его оси. Собственное вращение вокруг оси обычно задано, и угловая скорость собственного вращения при этом поддерживается постоянной. Движение оси быстровращающегося гироскопа можно установить по кинетическому моменту гироскопа, вычисленному относительно неподвижной точки, так как кинетический момент можно считать приближенно направленным по оси гироскопа. Для быстровращающегося гироскопа угловая скорость прецессии мала по сравнению с угловой скоростью собственного вращения и также мало изменение угла нутации, т. е. угла между осью собственного вращения и осью прецессии.

Мгновенную угловую скорость гироскопа $\bar{\omega}=\bar{\omega}_1+\bar{\omega}_2+\bar{\omega}_3$ от вращения вокруг неподвижной точки в первом приближении (рис. 143) можно принять

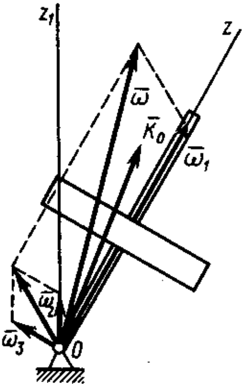

Рис. 143

$$\bar{\omega}\approx\bar{\omega}_1,$$

где $\bar{\omega}_1$ — угловая скорость собственного вращения; $\bar{\omega}_2$ и $\bar{\omega}_3$ — соответственно угловые скорости прецессии и нутации.

Учитывая, что оси Ox, Oy, Oz — главные оси инерции, а $J_x=J_y$, для проекций кинетического момента на эти оси имеем:

$$K_x=J_x\omega_x;\ \ K_y=J_y\omega_y;\ \ K_z=J_z\omega_z.$$

Так как $\bar{\omega}$ направлена приближенно по оси собственного вращения Oz, то $\omega_x\approx 0$, $\omega_y\approx 0$ и, следовательно,

$$K_O=\sqrt{K_x^2+K_y^2+K_z^2}\approx K_z=J_z\omega_z\approx J_z\omega_1.$$

Таким образом, для быстровращающегося гироскопа с большим собственным кинетическим моментом $J_z\omega_1$ можно считать кинетический момент $\bar{K}_O$ равным по модулю собственному кинетическому моменту гироскопа $J_z\omega_1$ и направленным по оси гироскопа, т. е.

$$\bar{K}_O\approx J_z\bar{\omega}_1. \qquad (49)$$

Это приближенное выражение для кинетического момента гироскопа будет точным, если ось гироскопа является его неподвижной осью вращения.

Для решения вопроса о поведении осей таких гироскопов можно пользоваться теоремой Резаля, позволяющей характеризовать движение конца вектора кинетического момента по известному главному моменту внешних сил.

Для сохранения существенных свойств гироскопа угловую скорость прецессии $\bar{\omega}_2$ следует учитывать, пренебрегая только угловой скоростью нутации, но при вычислении кинетического момента гироскопа используем формулу (49).

Особенности движения оси гироскопа

Рассмотрим особенности движения оси гироскопа по сравнению с движением оси такого же тела, не имеющего собственного вращения вокруг оси симметрии Oz. Пусть центр тяжести в обоих случаях расположен в неподвижной точке O и трением в этой точке пренебрежем. Если к покоящемуся телу перпендикулярно оси Oz приложена сила $\bar{F}$ в какой-либо точке А его оси симметрии (рис. 144), то тело начинает вращаться вокруг оси Ox, перпендикулярной плоскости расположения силы и оси симметрии, а точка A тела начнет двигаться в направлении действия силы. Если действие силы прекращается, то тело дальше вращается вокруг оси Ox по инерции с постоянной угловой скоростью, если позволяет крепление тела в точке O.

Совершенно иначе ведет себя быстровращающийся гироскоп под действием такой же силы $\bar{F}$ (рис. 145), приложенной в точке A. Точка A, согласно приближенной теории, начнет двигаться не в направлении действия силы $\bar{F}$, а, как это следует из теоремы Резаля, в направлении векторного момента этой силы относительно неподвижной точки O — параллельно оси Ox. При этом ось гироскопа вращается вокруг оси Oy. Действительно, гироскоп еще до действия силы имел кинетический момент $\bar{K}_O = J_z\bar{\omega}_1$, направленный по оси гироскопа, так как гироскоп вращался только вокруг собственной оси Oz с угловой скоростью ω_1. По теореме Резаля скорость $\bar{u}_B$ конца вектора $\bar{K}_O$ равна и параллельна $\bar{L}_O^{(e)}$ векторной сумме

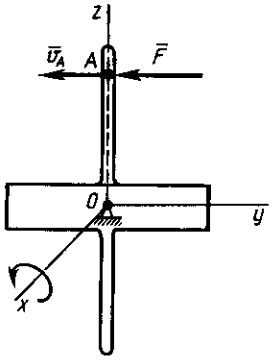

Рис. 144

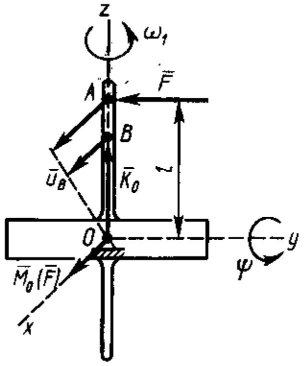

Рис. 145

моментов относительно точки O всех внешних сил, т. е. $\bar{u}_B = \bar{L}_O^{(e)}$.

В данном случае

$$\bar{L}_O^{(e)} = \bar{M}_O(\bar{F}),$$

причем момент $\bar{M}_O(\bar{F})$ направлен по оси Ox.

Таким образом, скорость точки B конца вектора $\bar{K}_O$ и при принятых допущениях приближенной теории всех других точек оси гироскопа параллельна $\bar{M}_O(\bar{F})$, что соответствует вращению оси гироскопа Oz или прецессии гироскопа вокруг оси Oy. Ось гироскопа прецессирует под действием силы в направлении момента этой силы. Если момент силы в какой-либо момент времени равен нулю, то прецессия оси гироскопа тоже прекращается. Ось гироскопа не обладает инерцией. Для гироскопа не имеет существенного значения сила $\bar{F}$, так как его прецессионное движение определяется только моментом этой силы относительно неподвижной точки гироскопа. Если центр тяжести гироскопа не находится в неподвижной точке, то надо в общем суммарном моменте сил учесть момент силы тяжести.

Сформулируем следующее правило прецессии: *если к вращающемуся вокруг оси гироскопу приложить внешние силы, создающие момент сил относительно его неподвижной точки, то та часть оси гироскопа, по которой направлен кинетический момент, начнет прецессировать в направлении векторного момента этих сил.*

Гироскопический момент

Как уже известно, если на гироскоп действуют внешние силы, создающие момент относительно неподвижной его точки, то гироскоп прецессирует с некоторой угловой скоростью. Если момент внешних сил становится равным нулю, то и прецессия гироскопа прекращается. Таким образом, для создания прецессии гироскопа по приближенной теории требуется момент внешних сил, и наоборот.

Пусть гироскоп прецессирует с угловой скоростью $\bar{\omega}_2$. Вычислим момент внешних сил, вызывающих эту прецессию. По теореме Резаля, момент внешних сил относительно неподвижной точки гироскопа

$$\bar{L}_O^{(e)} = \mathrm{d}\bar{K}_O/\mathrm{d}t = \bar{u}_B.$$

Так как вектор $\bar{K}_O$, направленный по оси гироскопа, вращается вокруг неподвижной точки с угловой скоростью прецессии $\bar{\omega}_2$, то скорость точки B, совпадающей с концом вектора $\bar{K}_O$, вычисляется по формуле, аналогичной векторной формуле Эйлера для скорости точки тела при сферическом движении, т. е.

$$\bar{u}_B = \bar{\omega}_2 \times \overrightarrow{OB} = \bar{\omega}_2 \times \bar{K}_O,$$

так как $\overrightarrow{OB} = \bar{K}_O = J_z \bar{\omega}_1$.

Для момента внешних сил $\bar{L}_O^{(e)}$ имеем

$$\bar{L}_O^{(e)} = \bar{\omega}_2 \times \bar{K}_O = J_z (\bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1). \tag{51}$$

Если к гироскопу применить одно из следствий принципа Даламбера, что сумма векторных моментов внешних сил вместе с моментом сил инерции точек гироскопа равна нулю, то

$$\bar{L} + \bar{L}_O^{(e)} = 0,$$

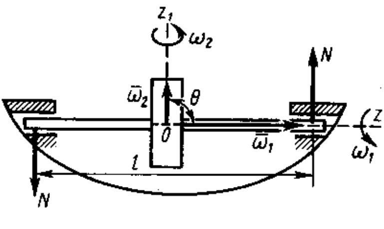

Рис. 146

где $\bar{L}$ — момент всех сил инерции гироскопа относительно неподвижной его точки. Этот момент $\bar{L}$ называют *гироскопическим моментом*. Учитывая (51), получаем

$$\bar{L} = -\bar{L}_O^{(e)} = -J_z (\bar{\omega}_2 \times \bar{\omega}_1) = = J_z (\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2),$$

или окончательно

$$\bar{L} = J_z (\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2); \quad L = J_z \omega_1 \omega_2 \sin\theta, \tag{52}$$

где θ — угол нутации, т. е. угол между осью собственного вращения и осью прецессии.

Гироскопический момент можно представить как момент гироскопической пары сил, с которой гироскоп действует на тела, принуждающие его прецессировать под действием момента внешних сил $\bar{L}_O^{(e)}$. Обычно противодействие гироскопа в виде гироскопической пары сил передается на эти тела через подшипники, в которых помещена ось гироскопа. Если эти тела или одно из них могут двигаться, то гироскопическая пара сил может вызвать его движение.

Из (52) видно, что гироскопический момент может быть равен нулю, если угловая скорость прецессии ω_2 равна нулю или если ось гироскопа параллельна оси прецессии.

Действие гироскопической пары сил полностью определяется гироскопическим моментом этой пары, вычисляемым по формуле (52). Но во многих случаях более предпочтительно определять это действие по правилу Жуковского, основанному на этой же формуле.

Правило Жуковского: *если быстровращающемуся гироскопу сообщают вынужденное прецессионное движение, то возникает гироскопическая пара сил, стремящаяся сделать ось гироскопа параллельной оси прецессии, причем так, чтобы после совпадения направления этих осей оба вращения вокруг них имели одинаковое направление.*

Если какое-либо тело препятствует гироскопу двигаться так, чтобы сделать его ось параллельной оси прецессии, то гироскоп давит на это тело и закрепленную точку гироскопа.

В том случае, когда таким гироскопом является ротор турбины, установленной на корабле, совершающем разворот вокруг вертикальной оси (рис. 146), гироскопическое давление воспринимается подшипниками турбины. Силу этого давления N определяют по формуле

$$Nl = L = J_z \omega_1 \omega_2 \sin\theta$$

или

$$N = L/l = J_z \omega_1 \omega_2 \sin\theta / l, \qquad (53)$$

где l — расстояние между подшипниками турбины; ω_2 — угловая скорость поворота корабля (угловая скорость прецессии); θ — угол нутации (в рассматриваемом случае $\theta = 90°$).