

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Л. И. Баландина, В. И. Васюков, Г. В. Подгузов.

**ИЗУЧЕНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ
С ПОМОЩЬЮ ЭЛЕКТРОЛИТИЧЕСКОЙ ВАННЫ**

Методические указания к лабораторной работе Э-1 по курсу «Общая физика»

Под редакцией М. Б. Челнокова.

Москва, 1992

Описаны основные характеристики электростатического поля а также методика их измерения с помощью электролитической ванны

Для студентов 2-го курса всех специальностей МГТУ им Н.Э. Баумана

Цель работы - изучить метод моделирования электростатических полей в электролитической ванне; построить эквипотенциальные и силовые линии заданного электрического поля; ознакомиться с изменением этого поля при внесении в него проводников.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Характеристики электростатического поля

Электростатическое поле является частным случаем электромагнитного поля. Оно создается заряженными телами, когда эти тела и заряды на них неподвижны. Электростатическое поле в каждой его точке характеризуется вектором напряженности \vec{E} и потенциалом φ . Напряженность электрического поля \vec{E} является его силовой характеристикой и определяется как отношение силы \vec{F} , с которой поле действует на внесенный в данную точку поля положительный заряд q_0 , к величине этого заряда:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (1)$$

Потенциал φ электростатического поля - это энергетическая характеристика данного поля, численно равная работе A , которую совершают силы этого поля при перемещении единичного точечного положительного заряда q_0 из заданной точки поля в бесконечность:

$$\varphi = \frac{A}{q_0} \quad (2)$$

В общем случае при перемещении в электрическом поле точечного заряда q из 1-й точки во 2-ю, потенциалы которых равны соответственно φ_1 и φ_2 , совершаемая силами этого поля работа определяется по формуле

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (3)$$

В электростатическом поле работа при перемещении заряда не зависит от пути, по которому движется заряд, а определяется лишь начальным (1-м) и конечным (2-м) положениями заряда. Поле, отвечающее этому условию, принято называть потенциальным.

Работа, совершаемая силами поля над зарядом q при перемещении его из 1-й точки во 2-ю, может быть вычислена также по формуле

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F}, d\vec{l}) = \int_1^2 q(\vec{E}, d\vec{l}), \quad (4)$$

где $d\vec{l}$ - элементарное перемещение заряда q .

Сравнивая формулы (3) и (4), приходим к соотношению

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 (\vec{E}, d\vec{l}) \quad (5)$$

При обходе замкнутого контура, в соответствии с (5), получим

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = 0 \quad (6)$$

Криволинейный интеграл (6) называется циркуляцией вектора \vec{E} . Следовательно, можно сказать, что циркуляция вектора напряженности электрического поля вдоль замкнутого контура равна нулю. Это утверждение называют теоремой о циркуляции вектора \vec{E} .

Напряженность \vec{E} и потенциал ϕ электрического поля, создаваемого точечным зарядом q определяется по формулам

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{r^2} \vec{e}_r \quad (7)$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon} \frac{q}{r} \quad (8)$$

где ϵ_0 - электрическая постоянная; ϵ - диэлектрическая проницаемость среды; r - расстояние от заряда до рассматриваемой точки поля; $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ - единичный вектор, направленный от заряда в данную точку.

Если электрическое поле создается несколькими точечными зарядами, то, согласно принципу суперпозиции, результирующая напряженность и потенциал в любой его точке вычисляются по формулам

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i \quad (9)$$

$$\phi = \sum_{i=1}^N \phi_i \quad (10)$$

Отметим, что при наложении полей напряженности складываются векторно, а потенциалы - алгебраически. Используя формулы (7) и (9), можно вычислить напряженность электрического поля, создаваемого любыми заряженными телами. Для этого заряженное тело разбивают на бесконечно малые части и, рассматривая их как точечные заряды, вычисляют напряженность поля по принципу суперпозиции.

Наряду с принципом суперпозиции для нахождения напряженности электрических полей заряженных тел, которые обладают симметрией, применяют теорему Гаусса.

Теорема Гаусса утверждает, что поток вектора напряженности электрического поля в вакууме через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ϵ_0 :

$$\oint_S (\vec{E}, d\vec{S}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \quad (11)$$

Теорема Гаусса в интегральной форме (11) связывает значения вектора \vec{E} в точках некоторой замкнутой поверхности с величиной заряда, находящегося внутри объема, ограниченного этой поверхностью, т.е. связывает величины, относящиеся к разным точкам поля. Можно, однако, придать этой теореме форму, включающую величины, относящиеся к одной и той же точке поля:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (12)$$

где ρ - объемная плотность электрических зарядов. Соотношение (12), выражающее теорему Гаусса в дифференциальной форме, носит название уравнения Пуассона.

Учитывая, что сумма частных производных в (12) есть дивергенция (расхождение) вектора \vec{E} , уравнение Пуассона можно записать в следующем виде:

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (13)$$

Графическое изображение электростатических полей

Для графического изображения электростатических полей используются силовые линии и эквипотенциальные поверхности.

Силовая линия электростатического поля - это линия, проведенная таким образом, что вектор напряженности поля в каждой точке линии направлен по касательной. Силовым линиям приписывается такое же направление, как и вектору напряженности. Силовые линии начинаются на положительных и заканчиваются на отрицательных зарядах (свободных и связанных) и нигде не пересекаются.

Эквипотенциальная поверхность - это поверхность, все точки которой имеют одинаковый потенциал. Вектор \vec{E} в каждой точке эквипотенциальной поверхности направлен по нормали к ней.

При изображении электростатического поля с помощью силовых линий и эквипотенциальных поверхностей последние обычно проводятся так, чтобы разность потенциалов между двумя соседними поверхностями была всюду одинаковой. В этом случае по густоте эквипотенциальных поверхностей и силовых линий можно судить о численном значении напряженности поля в каких-либо его точках. На рис.1 в качестве примера показаны эквипотенциальные поверхности, и силовые линии полей, создаваемых заряженной сферой (рис. 1,а) и возникающих между двумя заряженными проводящими электродами произвольной формы (рис, 1,б).

Имея картину силовых линий электростатического поля, можно построить эквипотенциальные поверхности, и, наоборот, по известной картине эквипотенциальных поверхностей можно построить силовые линии поля. В данной работе силовые линии поля строятся по эквипотенциальным линиям (линиям пересечения эквипотенциальных поверхностей с плоскостью чертежа).

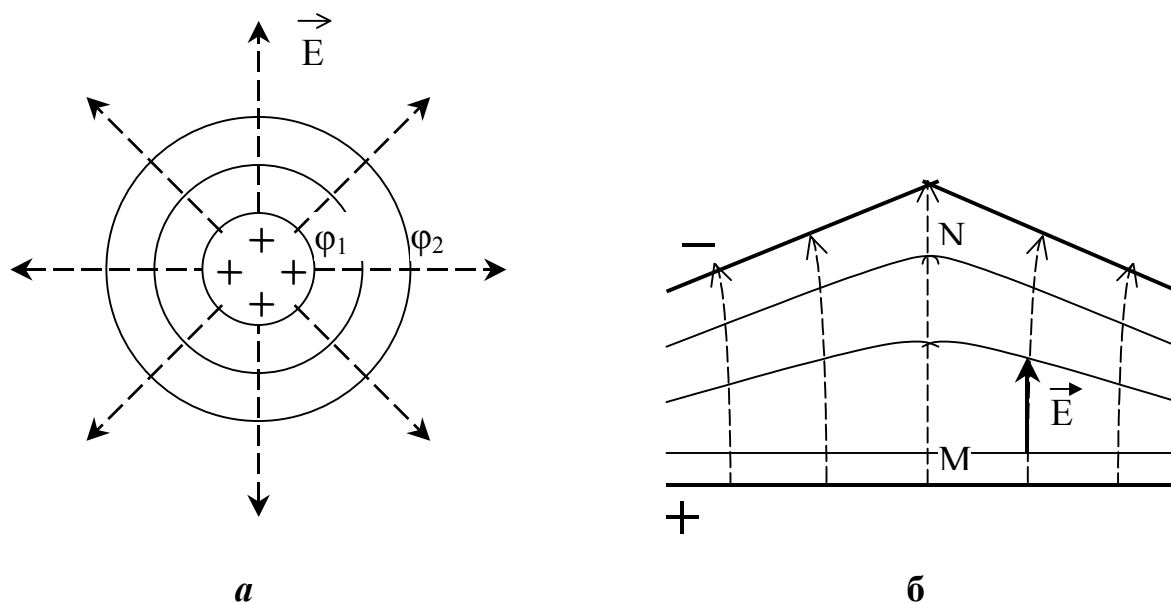


Рис.1

Связь между напряженностью и потенциалом электростатического поля

Зная напряженность \vec{E} электростатического поля в каждой его точке, разность потенциалов $\phi_1 - \phi_2$ между 1-й и 2-й точками этого поля можно вычислить следующим образом:

$$\phi_1 - \phi_2 = \int_L (\vec{E}, d\vec{l}) = \int_L E_1 dl \quad (14)$$

Здесь интегрирование ведется (в силу потенциальности электростатического поля) вдоль любой линии L, соединяющей 1-ю и 2-ю точки.

Если известно значение потенциала в любой точке поля, то напряженность его \vec{E} в какой-либо точке этого поля можно определить из соотношения

$$\vec{E} = -\text{grad}\phi \quad (15)$$

где $\text{grad}\phi$ - градиент потенциала, под которым подразумевается вектор, направленный по нормали к эквипотенциальной поверхности, проходящей через данную точку поля, и равный по модулю производной от ϕ по направлению нормали к этой поверхности. То есть

$$\vec{E} = -\frac{d\phi}{dn} \vec{n} \quad (16)$$

В частности, в декартовой системе координат соотношение (15) имеет следующий вид:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z} \vec{k} \right) \quad (17)$$

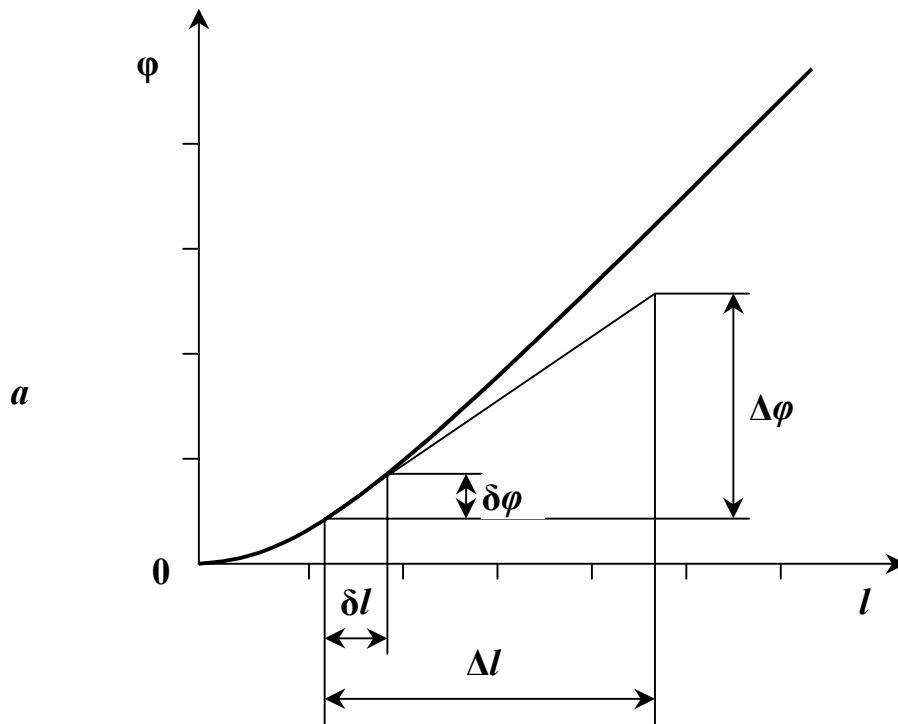
Градиент потенциала характеризует быстроту возрастания потенциала в направлении нормали к эквипотенциальной поверхности, т.е. вдоль силовой линии. В формуле (15) знак «минус» показывает, что вектор напряженности направлен в сторону уменьшения потенциала.

Как следует из зависимости (16), напряженность электрического поля можно найти, дифференцируя функцию ϕ по l , (где l - расстояние, измеряемое вдоль силовой линии). На практике это дифференцирование обычно проводится графическим способом, путем замены производной $d\phi/dn$ отношением приращений $\delta\phi/\delta l$ (рис. 2).

Графическое дифференцирование осуществляется следующим образом:

1. Для выбранной силовой линии, например MN (см. рис. 1,б), строится графическая зависимость изменения потенциала ϕ вдоль этой линии.
2. Полученная зависимость разбивается на малые участки (0-1; 1-2;...), на которых кривая заменяется хордой, проведенной через две точки этого участка.
3. Отношение $\delta\phi/\delta l$ с целью получения более точного результата заменяется отношением $\Delta\phi/\Delta l$ (где $\Delta\phi$ и Δl выбираются в несколько раз большими, чем $\delta\phi$ и δl) (см. рис. 2,а).
4. Определяется модуль вектора напряженности электрического поля для данного участка δl по формуле:

$$|\vec{E}| = \frac{\Delta\phi}{\Delta l} \quad (17,а)$$



На рис.2,б, в соответствии с вышеизложенным, представлена графическая зависимость $E(l)$, построенная для силовой линии MN.

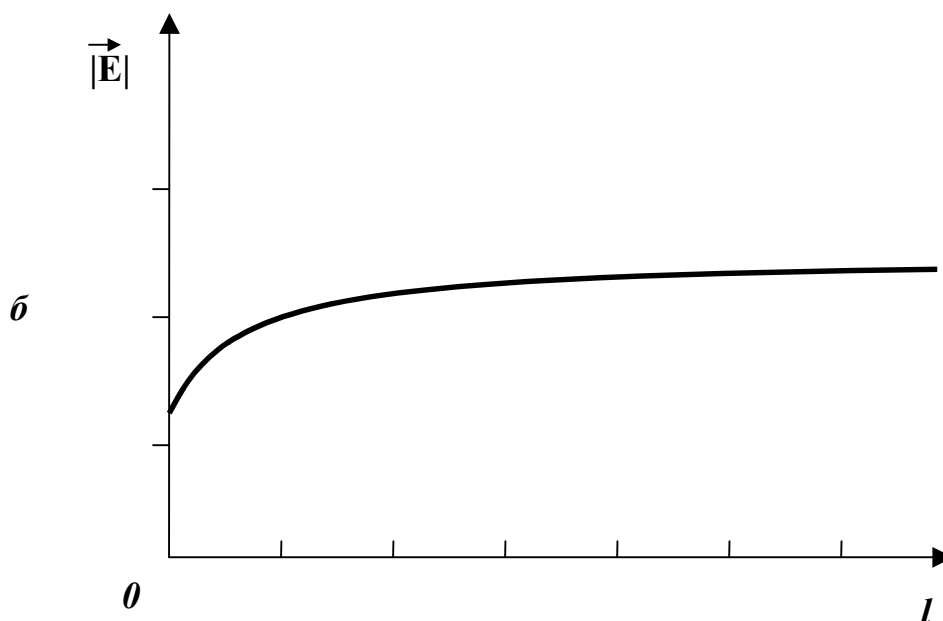


Рис.2

Проводники в электростатическом поле

При внесении незаряженного проводника в электростатическое поле носители зарядов в нем перераспределяются и возникают так называемые индуцированные заряды (рис. 3, а). Последние распределяются по внешней поверхности проводника, при этом электрическое поле в толще проводника отсутствует. Если внутри проводника имеется полость, то поле внутри нее также равно нулю. На этой основе широко применяется метод защиты чувствительных приборов от внешних электрических полей - так называемая электростатическая защита (чувствительные приборы заключают в замкнутые металлические корпуса, которые соединяют с землей).

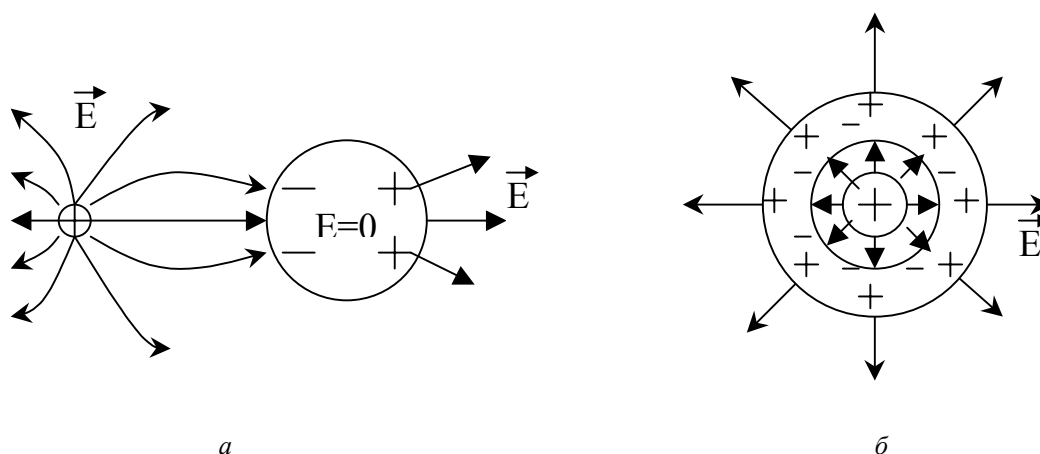


Рис.3

Отметим, что замкнутый полый проводник экранирует только поле внешних зарядов. Если электрические заряды находятся внутри проводника, то индуцированные заряды возникают не только на внешней, но и на внутренней поверхности проводника (рис. 3,б). Однако внутри полости поле не будет равно нулю. Здесь будут проходить силовые линии, соединяющие заряд, заключенный в полости, с индуцированными зарядами на внутренней поверхности проводника. Индуцированные заряды на внешней его поверхности вызовут поле во внешнем пространстве. Поэтому замкнутая проводящая полость не экранирует поле электрических зарядов, помещенных внутри нее.

При исследовании распределения зарядов на проводнике сложной формы (рис. 4) оказывается, что поверхностная плотность заряда σ различна в разных точках поверхности: она близка к нулю внутри углубления (точка b), наибольшее значение на остриях (точка a) и имеет промежуточное значение в точках боковой поверхности. Так как величину напряженности поля \vec{E} вблизи поверхности проводника можно определить по формуле

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon} \quad (18)$$

то напряженность поля у поверхности проводника сложной формы весьма неодинакова. Она особенно велика возле участков с малым радиусом кривизны, т.е. у заострений.

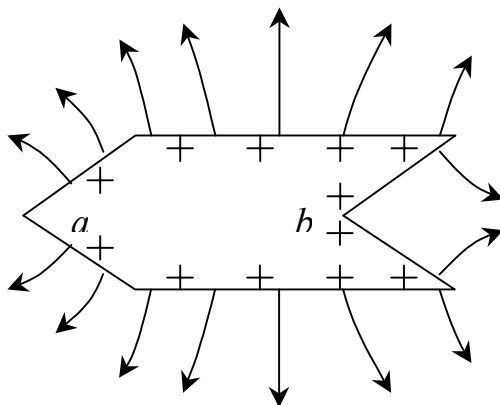


Рис.4

Физические основы метода моделирования электрических полей в электролитической ванне
В соответствии с выражением (17) составляющие вектора E по координатам можно выразить через потенциалы

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение Пуассона (12), мы получаем общее уравнение, которому удовлетворяет потенциал, в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (19)$$

Если между проводниками нет заряженных тел, то во всех точках поля $\rho=0$ и уравнение (19) переходит в более простое:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0, \quad (20)$$

называемое уравнением Лапласа. Вычисление потенциала в этом случае сводится к нахождению такой функции $\phi(x, y, z)$, которая во всем пространстве между проводниками удовлетворяет дифференциальному уравнению (20), а на самих проводниках принимает заданные значения. Если форма электродов, создающих поле, настолько сложна, что распределение потенциала трудно вычислить, то его всегда можно определить экспериментально. Этой цели может служить метод, связанный с использованием электролитической ванны.

Ортогональность силовых линий и эквипотенциальных поверхностей значительно облегчает экспериментальное и теоретическое исследование электростатического поля. Найденное положение поверхностей равного потенциала позволяет построить силовые линии поля. Экспериментально оказывается проще определить расположение эквипотенциальных поверхностей, так как большинство приборов пригодных для изучения электростатических полей, измеряет разности потенциалов, а не напряженности поля.

Сложность электростатических измерений привела к разработке особого метода изучения электростатических полей путем искусственного воспроизведения их структуры в проводящих средах, по которым пропускается стационарный (постоянный) ток. Проводящая среда должна быть однородной и обладать малой проводимостью.

Изучение поля стационарного тока вместо поля стационарных зарядов дает возможность пользоваться токоизмерительными приборами, которые проще и надежнее, чем приборы для электростатических измерений. Данные экспериментальных исследований нашли широкое применение при изучении сложных электростатических полей. При этом большое значение имеет правило подобия электростатических полей, а именно если размеры электродов, создающих поле, и все расстояния между электродами изменены в одной пропорции, то структура поля не изменяется.

При экспериментальном изучении электростатического поля используется полная аналогия распределения потенциала, как в электростатическом поле, так и в проводящей среде, по которой течет стационарный электрический ток (такая среда условно обозначается как «поле тока»). Эта аналогия дает возможность изучать вместо электростатического поля между заряженными телами поле стационарного тока между электродами при условии, что их потенциалы поддерживаются постоянными и проводящая среда имеет значительно большее удельное сопротивление, чем материал электродов. Такой метод называется моделированием электростатического поля.

Метод моделирования основан на подобии эквипотенциальных поверхностей в однородном электролите и в вакууме при сохранении подобия формы электродов и их потенциалов. Это подобие основано на том, что токи в электролитах подчиняются закону Ома и связаны с напряженностью поля E соотношением

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad (21)$$

где \vec{j} - плотность тока; γ - удельная проводимость электролита.

Возьмем в проводящей среде произвольную замкнутую поверхность S , ограничивающую объем V (рис. 5). Количество электричества, ежесекундно вытекающего из объема V через поверхность S , представляется интегралом

$$\oint_S \mathbf{j}_n \, dS$$

Ту же величину можно представить как скорость изменения заряда dq/dt . (Где $q = \int_V \rho \, dV$ - заряд, содержащийся в объеме V). Учитывая, что поверхность с течением времени неизменна, заменим полную производную частной и, приравнявая эти выражения, получим

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV = \oint_S (\vec{j}, d\vec{S}).$$

Знак «минус» показывает, что электрический ток поддерживается только убыванием электрических зарядов в данном объеме. Заменив поверхностный интеграл объемным (по формуле Остроградского-Гаусса), получим

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \, dV = \int_V \operatorname{div} \vec{j} \, dV.$$

Откуда следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Это уравнение принято называть уравнением непрерывности, или уравнением неразрывности. Если токи стационарны, то не зависят от времени,

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0.$$

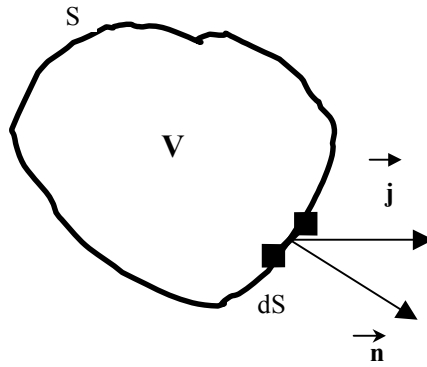


Рис.5

Для случая декартовых координат имеем

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0 \quad (22)$$

или с учетом (21)

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (23)$$

Из формулы (23) следует, что напряженность поля в проводящей среде электролита удовлетворяет тому же уравнению, что и напряженность поля в вакууме (см. формулу (12)). Однако, чтобы показать это совпадение, нужно доказать, что для обоих полей одинаковы условия на границе раздела электродов. В общем случае, эти граничные условия различны, так как вектор напряженности электрического поля в вакууме \vec{E}_0 всегда перпендикулярен к поверхности проводника, а вектор напряженности поля в проводящей среде \vec{E} этому условию может и не удовлетворять. Но если удельная электропроводимость среды намного меньше электропроводимости вещества электродов, то потенциал во всех точках каждого электрода будет практически одинаковым. В этом случае вектор \vec{E} всегда перпендикулярен к поверхности электродов любой формы. Поэтому можно принять, что \vec{E}_0 и \vec{E} не только удовлетворяют одинаковому дифференциальному уравнению, но и одинаковым граничным условиям, а это значит, что оба поля совпадают.

Одним из недостатков данного метода является то, что при постоянном токе происходит электролиз и на электродах выделяются составляющие электролита. В результате напряжение между электродами в течение опыта несколько изменяется и измерения становятся неточными. Чтобы этого не произошло, в настоящей лабораторной работе применяется переменный ток промышленной частоты (50 Гц), который можно считать квазистационарным. Квазистационарным называется ток, для которого сила тока в данной точке изменяется незначительно (в пределах погрешности регистрирующего прибора) за время τ передачи электромагнитного возмущения по всей проводящей среде. В нашем случае за время $\tau=L/v$ (где L - размер ванны, v - скорость электромагнитной волны в среде) мгновенное значение силы тока в данной точке электролитической ванны будет практически одинаковыми, т.е. справедливо соотношение (22), приведенное для постоянного тока.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

Описание лабораторной установки.

Схема экспериментальной установки представлена на рис.6.

В кювету (ванну) 7, наполненную электролитом (водой), погружены металлические электроды 4 и 8 заданной конфигурации. В электродах от блока питания 1 подводится переменное напряжение. Вольтметр 3 подключен к одному из электродов (потенциал этого электрода мы принимаем равным нулю) и к зонду 6 - металлической игле, укрепленной в специальном держателе. Положение зонда 6, т.е. координаты какой-либо точки электростатического поля, определяется

с помощью координатных линеек 5 и 9 или с помощью миллиметровой бумаги, помещенной на дно ванны.

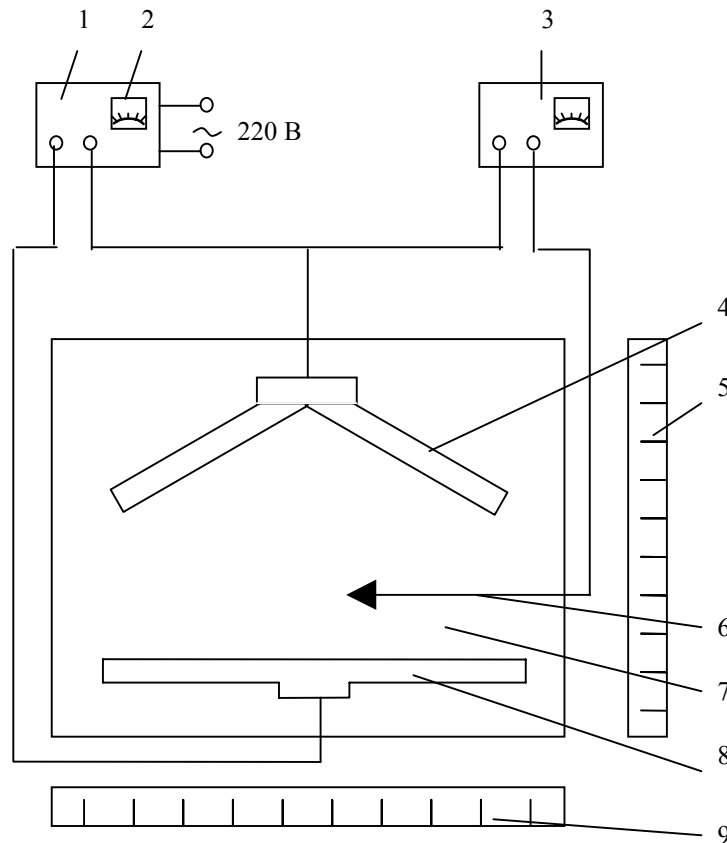


Рис. 6

Выполнение эксперимента

Задание 1. Подготовить установку к работе.

1. Через середину листа миллиметровой бумаги размером $400 \times 300 \text{ мм}^2$, провести линию симметрии. Справа и снизу карандашом нанести деления линеек 5 и 9 (см. рис. 6) в соответствии с их расположением на установке. Поместив электроды на миллиметровке в местах, соответствующих их положению в электролитической ванне, обвести карандашом их контуры.

2. Установить электроды в ванну. Собрать схему установки в соответствии с рис. 6.

3. Наполнить ванну 7 (см. рис. 6) водой так, чтобы электроды 4 и 8 были погружены в нее на $3/4$ их высоты; установить зонд 6 так, чтобы он был погружен в воду на глубину $\sim 10 \text{ мм}$.

Задание 2. Построить силовые и эквипотенциальные линии электростатического поля.

1. Включить блок питания 1 (см. рис. 6). На вольтметре 2 выставить напряжение $u=9 \text{ В}$.

2. Установить зонд 6 на линию симметрии ванны 7; далее проверить потенциалы электродов 4 ($\varphi=0$) и 8 ($\varphi=9 \text{ В}$). Если потенциалы электродов не соответствуют указанным, откорректировать их.

3. Перемещая зонд 6 вдоль линии симметрии, найти координаты точек, в которых $\varphi_1=1 \text{ В}$, $\varphi_2=2 \text{ В}$, ..., $\varphi_8=8 \text{ В}$. Нанести координаты этих точек на миллиметровку.

4. Операции п.3 повторить для линий, параллельных линии симметрии и отстоящих от нее на 20 мм, 40 мм и т.д. Измерения продолжать до тех пор, пока не кончится поле справа от линии симметрии. Отключить источник питания.

5. Все точки с одинаковым потенциалом соединить плавной линией.

6. Построить серию силовых линий, начиная с точек, лежащих на электроде 8 (см. рис. 6). В точках пересечения силовых и эквипотенциальных линий не допускать нарушения их ортогональности. Силовые линии должны начинаться и оканчиваться на электродах.

7. Построить график зависимости $\varphi=\varphi(l)$ вдоль средней линии ванны. За начало отсчета длины средней линии принять электрод с нулевым потенциалом (это электрод 4 на рис. 6).

8. По полученному в п.7 графику $\varphi=\varphi(l)$ построить зависимость $E=E(l)$, пользуясь методикой, изложенной в теоретической части работы.

Построение зависимостей $\varphi(l)$ и $E(l)$ проводится на листах миллиметровой бумаги (150x120 мм² каждый). Рекомендуемые масштабы построений: по оси l в 10 мм графика -25 мм поля; по оси φ в 10 мм графика -1 В; по оси E в 10 мм графика - 0,2 В/см.

Задание 3. Построение силовых и эквипотенциальных линий электростатического поля, в которое помещен проводник.

1. Положить проводник в середину электролитической ванны.

2. Выполнить пп.1-8 задания 2.

Внимание! Погружать и удалять проводник из электролита можно только при отключенном источнике питания.

Оценка погрешностей измерений.

Оценка погрешностей измерений в данной работе проводится в соответствии с методикой, изложенной в работе [3], по формуле

$$\left| \frac{\Delta E}{E} = \sqrt{\left(\frac{\Delta \varphi}{\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\Delta l}{l}\right)^2} \right|$$

Ввиду того, что измерения проводятся 1 раз, оценку случайной погрешности проводить не надо. Инструментальная погрешность при вычислении потенциала $\Delta\varphi$ определяется по паспорту прибора; погрешность определения длины силовой линии Δl составляет 1 мм.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. В каких случаях используется метод электролитической ванны?
2. Что такое «силовая характеристика электростатического поля»?
3. Что такое «энергетическая характеристика электростатического поля»?
4. Как найти потенциал φ , зная $E(l)$ в какой-либо точке поля?
5. Какова связь между \vec{E} и φ ?
6. Изменится ли вид зависимостей $\varphi(l)$ и $E(l)$, изображенных на рис. 2, а и рис. 2, б, если изменить полярность подключения электродов (например, 4 и 8 на рис. 6)?

Литература

1. Савельев И В. Курс общей физики. Т.2 М.: Наука, 1982. 495 с.
2. Калашников С.Г. Электричество. М.: Наука, 1977. 591 с.
3. Савельева А.И., Фетисов И.Н. Обработка результатов измерений при проведении физического эксперимента. М.: МВТУ, 1984. 23 с.