ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

А.А. Крыловецкий

ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ
Часть 1. Механика

ВОРОНЕЖ 2006

*Утверждено Научно-методическим советом
факультета компьютерных наук 1 сентября 2006 г.*

Рецензент: заведующий кафедрой общей физики ВГУ, доктор физико-математических наук, профессор Чернышев В.В.

Учебное пособие подготовлено на кафедре цифровых технологий факультета компьютерных наук Воронежского государственного университета

Рекомендуется для студентов 2 и 3 курсов дневного отделения

Для специальностей:
511800(010300) – Математика. Компьютерные науки;
071900(230201) – Информационные системы и технологии;
554400 – Информационные системы.

Введение

Настоящее учебное пособие представляет собой первую часть конспекта лекций по курсу "Физика" для студентов 3 курса факультета компьютерных наук, обучающихся по специальности "Математика. Компьютерные науки". В нем представлены все основные темы раздела "Механика". Пособие не претендует на полное изложение курса физики и его прочтение не может заменить посещения лекций и самостоятельной работы с литературой, список которой приводится в конце. Оно также будет полезно студентам ФКН специальностей "Информационные системы и технологии", "Информационные системы", и может использоваться студентами физического факультета при изучении соответствующих разделов в курсе общей физики.

Определения, встречающиеся в пособии, помечены значком $\surd$, законы – $\surd\surd$, упражнения для самостоятельной работы – $\square$.

1 Кинематика

1.1 Пространство и время

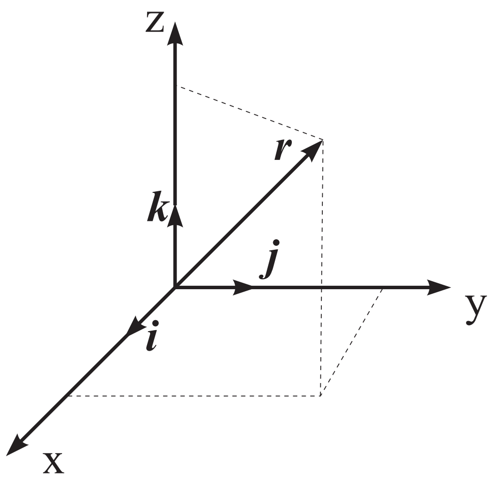

Рис. 1.

$\surd$ *Механическое движение – изменение положения тела в пространстве относительно других тел с течением времени.*

$\surd$ *Пространственная система отсчета – тело или система тел, а также система координат, относительно которых определяется положение остальных тел.*

Время – физическая величина, определяемая показаниями часов. Под часами понимают любое тело или систему тел, в которых совершается *периодический* процесс, служащий для измерения времени.

$\surd$ *Пространственно-временная система отсчета – пространственная система отсчета, в каждой точке которой имеются синхронизированные между собой часы.* На рис. 1 показана декартова система координат, $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ее единичные вектора, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ – радиус-вектор произвольной точки.

Современные определения единиц длины и времени

√ *Секунда – это промежуток времени, в течение которого совершается 9 192 631 770 колебаний электромагнитного излучения, соответствующие переходу между двумя определенными сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия-133 в отсутствие внешних полей.*
√ *Метр – длина пути, проходимая светом в вакууме в течение временного интервала 1/299792458 секунды.* Т.е. скорость света точно равна 299792458 м/с.

1.2 Кинематическое описание движения

√ *Кинематика – раздел механики, изучающий движение тел, не рассматривая его причин.* Основные модели механики и кинематики: материальная точка, абсолютно твердое тело.
√ *Материальная точка – тело, размерами которого в данных условиях движения можно пренебречь.*
√ *Твердое тело – неизменяемая система материальных точек, при любых движениях которой взаимные расстояния между материальными точками системы остаются неизменными.*

Закон движения материальной точки

Закон движения материальной точки полностью описывает ее движение, т.е. позволяет найти ее положение в любой момент времени. Математически выражается заданием трех скалярных функций:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

или одной векторной функции:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

1.3 Прямолинейное движение

Прямолинейное движение – движение, при котором траекторией тела является прямая линия. Определим основные кинематические характеристики такого движения, предполагая, что оно происходит вдоль оси x.

$\surd$ *Средняя скорость материальной точки за время* Δt*:*

$$v_{x\,\text{ср}} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$\surd$ *Мгновенная скорость материальной точки в момент времени* t*:*

$$v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$\surd$ *Ускорение материальной точки в момент времени* t*:*

$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} = \dot{v}_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$$

Равномерное движение - движение с постоянной скоростью, его закон выглядит следующим образом: $x = x_0 + v_x t$. Равнопеременное движение – движение с постоянным ускорением:

$$a = const. \tag{1}$$

Интегрируя дважды (1), последовательно находим:

$$v = v_0 + at, \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

1.4 Движение по окружности

Простейшим частным случаем криволинейного движения является движение по окружности, т.е. в этом случае траекторией тела будет окружность. Кинематические характеристики такого движения:

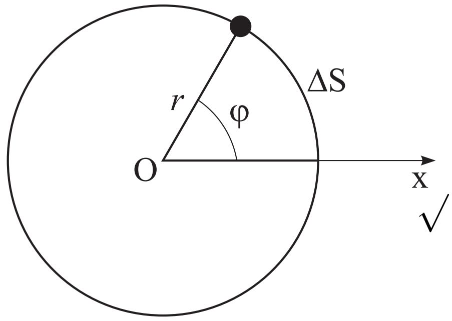

Рис. 2.

$\surd$ *угловая скорость*

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \tag{2}$$

$\surd$ *угловое ускорение*

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega(t+\Delta t) - \omega(t)}{\Delta t} = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \tag{3}$$

$\surd$ *линейная скорость и линейное ускорение*

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{d^2s}{dt^2} \tag{4}$$

Так как $s = r\varphi$ (см. рис. 2), то легко можно найти связь между линейными и угловыми величинами:

$$v = \omega r, \quad a = \dot{\omega} r = \varepsilon r\,. \tag{5}$$

1.5 Криволинейное движение

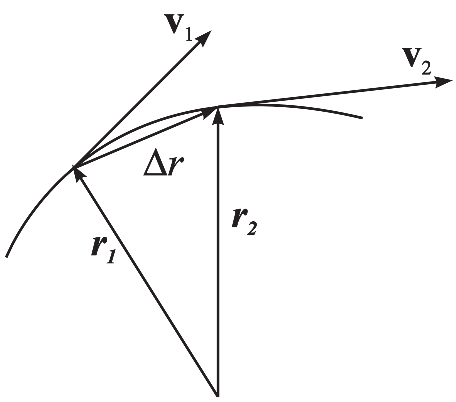

Рис. 3.

В этом случае траекторией тела является любая кривая. Пусть в два близких момента времени (см. рис. 3) радиус-вектор материальной точки есть $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}(t + \Delta t)$.

$\surd$ *Мгновенная скорость материальной точки определяется следующим образом:*

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$$

$\surd$ *Ускорение материальной точки в момент времени t:*

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{v}(t + \Delta t) - \mathbf{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{r}}$$

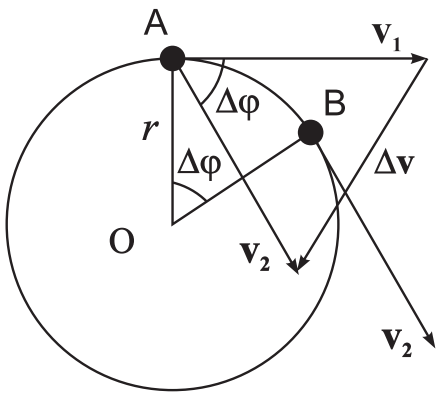

Рис. 4.

Рассмотрим равномерное движение материальной точки по окружности (см. рис. 4). На рисунке отмечены два положения тела (точки A и B) в близкие моменты времени. Радиусы, проведенные в эти точки, составляют угол $\Delta\varphi$. Параллельным переносом совместим начала векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ в точке A. Как нетрудно видеть, угол при вершине A в треугольнике, образованном векторами $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ и $\Delta\mathbf{v}$, равен $\Delta\varphi$.

При условии $\Delta\varphi \to 0$ мы можем записать $\Delta v = v\Delta\varphi$. Так как $\Delta\varphi = \omega\Delta t$, то

$$\Delta v = v\omega\Delta t \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta v}{\Delta t} = v\omega.$$

Отсюда,

$$\mathbf{a}_n = \frac{\Delta v}{\Delta t}\mathbf{n} = v\omega\mathbf{n} = \frac{v^2}{r}\mathbf{n}\,.$$

Получившееся ускорение $\mathbf{a}_n$, связанное с изменением направления вектора скорости, носит название нормальное ускорение, т.к. оно направлено вдоль внутренней нормали к траектории.

Рассмотрим движение материальной точки по произвольной криволинейной траектории. Также как и в предыдущем случае, возьмем два последовательных положения точки, разделенных интервалом времени Δt. При $\Delta t \to 0$ кривая, соединяющая эти две точки (A и B) может быть приблизительно заменена дугой окружности радиуса r (r – радиус кривизны траектории в точке A, т.к. при $\Delta t \to 0$ точка B стремится к A). Также как и раньше, совмещая параллельным переносом начала векторов скорости в точке A, получаем вектор $\Delta\mathbf{v}$ и с помощью преобразования параллельного переноса помещаем начало его в точку A.

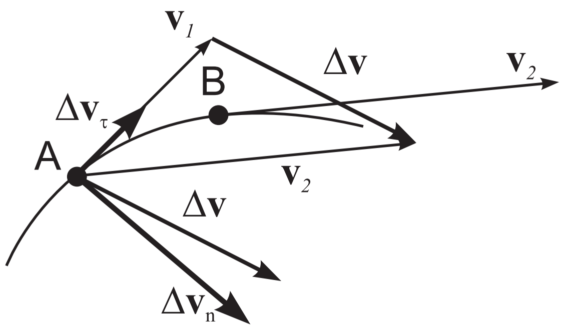

Рис. 5.

Далее раскладываем вектор $\Delta\mathbf{v}$ на две составляющие $\Delta\mathbf{v} = \Delta\mathbf{v}_\tau + \Delta\mathbf{v}_n$ – касательную и нормальную к траектории. Разделив левую и правую часть на Δt, получаем

$$\mathbf{a} = \frac{\Delta\mathbf{v}_\tau}{\Delta t} + \frac{\Delta\mathbf{v}_n}{\Delta t} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n,$$

где $\mathbf{a}_n$ – нормальное и $\mathbf{a}_\tau$ – тангенциальное ускорения точки. Тангенциальное ускорение направлено вдоль касательной к траектории и меняет скорость только по величине. Через единичные вектора внутренней нормали $\mathbf{n}$ и касательной $\boldsymbol{\tau}$ к траектории последнее равенство может быть записано в виде

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau} + \frac{v^2}{r}\mathbf{n}\,.$$

1.6 Степени свободы и обобщенные координаты

Для описания положения точки в пространстве можно использовать как декартовы координаты x, y, z, так и сферические r, θ, φ, цилиндрические r, φ, z и т.п. Существенным является тот факт, что во всех случаях необходимо использовать три независимых координаты для описания движения точки в пространстве. Про такую точку принято говорить, что она обладает тремя степенями свободы. Если на движение точки наложена одна связь (математический маятник, тело на горизонтальной плоскости), математически это выражается уравнением $f(x, y, z) = 0$, то число независимых координат становится на единицу меньше (т.е. равно 2). Если же связей будет две (точка на прямой), то число степеней свободы ее уменьшается до 1.

В случае системы из n несвязанных точек число ее степеней свободы будет равно $3n$. Каждая связь (например две точки связали жестким стержнем), уменьшает эту величину на единицу. Если на систему наложено ν связей, то число степеней свободы такой системы будет $f = 3n - \nu$. Для описания положения системы могут быть использованы любые независимые величины q_1, $q_2, ..., q_f$, заданием которых положение системы определяется однозначно. Их число равно f – числу степеней свободы системы. Такие величины носят название обобщенные координаты. Для определения движения системы надо найти обобщенные координаты как функции времени:

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \quad ... \quad q_f = q_f(t)\,.$$

Производные обобщенных координат по времени $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2, ..., \dot{q}_f$ носят название обобщенные скорости.

В качестве примера определим число степеней свободы идеально твердого тела. Очевидно, что для однозначного определения положения твердого тела достаточно задать положение трех любых его точек, не лежащих на одной прямой. Такая система из трех точек обладает $3 * 3 = 9$ степенями свободы. Но т.к. расстояние между этими точками не меняются, то на их движение наложено три связи и общее число степеней свободы будет равно $9 - 3 = 6$.

2 Динамика

Динамика – раздел механики, изучающий движение тел в связи с действующими на них силами. Законы динамики были сформулированы Ньютоном и являются обобщением опытных фактов. Правильность их для широкого (но ограниченного) круга явлений подтверждается согласием с опытом тех следствий, которые из них вытекают. В XIX веке физикам казалось, что механика Ньютона всемогуща. Однако в процессе дальнейшего развития науки выявились много фактов, которые противоречили классической механике. Они нашли свое объяснение в рамках специальной теории относительности и квантовой механики.

В специальной теории относительности, которую называют “механикой больших скоростей” или релятивистской механикой, подверглись пересмотру ньютоновские представления о пространстве и времени. Однако в пределе малых (по сравнению со скоростью света) скоростей уравнения релятивистской механики переходят в уравнения классической механики. Т.е. классическая механика не была отвергнута и сохранила свое значения для описания движений с малыми скоростями.

Из уравнений квантовой механики предельным переходом для макроскопических объектов также следуют уравнения классической механики. Т.е. в результате развития физики были установлены границы применимости механики Ньютона.

2.1 I закон Ньютона – закон инерции

$\surd\surd$ *Тело, не подверженное внешним воздействиям, либо находится в покое, либо движется прямолинейно и равномерно.*
Такое тело называется свободным. Свободное тело в определенной степени является физической абстракцией, но реальное тело можно поставить в такие условия, что внешние воздействия или бесконечно малы или компенсируют друг друга.

I закон Ньютона очевидно не может быть справедлив во всех системах отсчета. Постулат классической механики: существуют системы отсчета, в которых все свободные тела движутся прямолинейно и равномерно. Такие системы отсчета называются **инерциальными**. Данный постулат является обобщением огромного числа опытных фактов. Только опыт позволяет отличить инерциальную систему отсчета от неинерциальной.

Пример инерциальной системы отсчета: гелиоцентрическая система Коперника. Начало отсчета этой системы помещается в центр масс солнечной системы, а координатные оси направлены на три удаленные звезды, не лежащие в одной плоскости. Система отсчета, связанная с Землей, лишь достаточно приближенно может считаться инерциальной, вследствие ее вращения вокруг собственной оси и движения вокруг Солнца.

2.2 Масса

$\surd$ Всякое тело оказывает сопротивление при попытках привести его в движение или изменить модуль и (или) направление его скорости. Это свойство тел называется инертностью.

$\surd\surd$ *Мера инертности тела называется массой.*

$\surd$ *Изолированной или замкнутой системой тел называется система тел, настолько удаленная от других тел, что они практически не оказывают никакого действия на рассматриваемую систему.*

Тела такой системы взаимодействуют только между собой. Для системы состоящей только из двух тел, изменения скоростей всегда связаны между собой:

$$m_1\Delta\mathbf{v_1} = -m_2\Delta\mathbf{v_2}, \tag{6}$$

где коэффициенты m_1 и m_2 постоянны для двух данных тел, т.е. не зависят от характера взаимодействия между ними. Этот результат надо рассматривать как опытный факт. Эти коэффициенты называют инертными массами данных тел. Т.е. отношение масс двух материальных точек равно взятому с обратным знаком отношению приращений скоростей этих точек в результате взаимодействия между ними. Массу определенного тела принимается равной единице, такое тело называется эталоном массы.

Если уравнение (6) разделить на Δt, а затем устремить $\Delta t \to 0$, то получим:

$$m_1\mathbf{a_1} = -m_2\mathbf{a_2} \quad \text{или} \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}. \tag{7}$$

Т.о., отношение масс взаимодействующих тел выражается через отношение их ускорений.

2.3 Закон сохранения импульса

Рассмотрим два взаимодействующих тела, имеющих до взаимодействия скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, а после взаимодействия — $\mathbf{v}_1'$ и $\mathbf{v}_2'$.

Обозначим:

$$\Delta\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_1, \Delta\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_2$$

и подставим в формулу (6). Раскрывая скобки, получим:

$$m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2'.$$

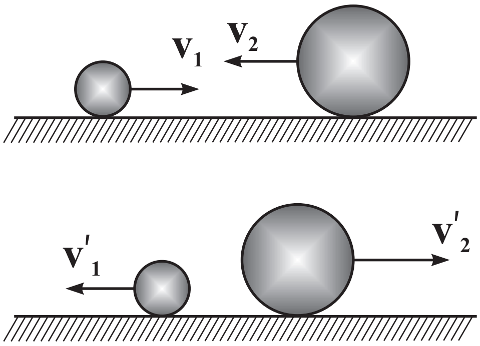

Рис. 6.

$\surd$ *Импульсом, или количеством движения материальной точки, называется векторная величина, равная произведению массы точки на ее скорость*

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

Тогда

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1' + \mathbf{p}_2' \tag{8}$$

Сумма импульсов тел, входящих в систему, называется импульсом системы тел. Уравнение (8) выражает закон сохранения импульса.
$\surd\,\surd$ *Импульс изолированной системы тел сохраняется (остается постоянным во времени) при любых взаимодействиях этих тел.*
Данное утверждение является результатом опыта и следствием введенного определения массы.

2.4 Сила. II закон Ньютона

Решением задачи о движении материальной точки является нахождение ее координат как функций времени. Для нахождения этих функций необходимо составить дифференциальные уравнения, описывающие движение материальной точки. В случае, если материальная точка взаимодействует с окружающими телами, то ее импульс изменяется. Очевидно, что скорость изменения проекций ее импульса характеризует интенсивность действия окружающих тел на материальную точку. Фундаментальным утверждением классической механики является утверждение, что производная импульса точки по времени $\dot{\mathbf{p}}$ определяется положением точки относительно окружающих тел и ее скоростью относительно этих тел. Т.е.

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \tag{9}$$

где $\mathbf{F}$ – сила, действующая на материальную точку, зависящая от радиуса-вектора точки и ее скорости. Под силой в механике понимают всякую причину, изменяющую импульс тела.

$\surd$ $\surd$ Второй закон Ньютона: *производная импульса материальной точки по времени равна действующей на нее силе.* Уравнение (9) является математическим выражением II закона Ньютона и носит название уравнения движения.

С учетом выражения для импульса $\mathbf{p} = m\mathbf{v} = m\dot{\mathbf{r}}$ уравнение (9) может быть переписано через ускорение материальной точки

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \quad \text{или} \quad m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \tag{10}$$

Принцип суперпозиции
Если рассматриваемое тело взаимодействует с несколькими внешними телами, то сила, действующая на тело, может быть найдена по следующему правилу, называемому принципом суперпозиции:
$\surd$ сила $\mathbf{F}$, действующая на тело, есть векторная сумма сил $\mathbf{F}_i$, которые бы действовали на тело, если бы оно взаимодействовало с внешними телами с каждым в отдельности: $\mathbf{F} = \sum\limits_i \mathbf{F}_i$.

Единица силы в системе СИ – ньютон (Н). 1 ньютон – такая сила, которая телу массой в 1 кг сообщает ускорение 1 м/с^2. Единица силы в системе СГС – дина (дин). Дина есть сила, сообщающая телу массой в 1г ускорение 1 см/с^2. Связь между единицами силы в СИ и СГС:

$$1\,\text{Н} = 10^5\,\text{дин}.$$

2.5 III закон Ньютона.

Для замкнутой системы, состоящей из двух материальных точек справедлив закон сохранения импульса:

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = const.$$

Продифференцируем последнее равенство по времени:

$$\dot{\mathbf{p}}_1 + \dot{\mathbf{p}}_2 = 0.$$

С учетом II закона Ньютона получим:

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2,$$

где $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ – силы, с которыми материальные точки действуют друг на друга. В результате приходим к III закону Ньютона:
$\surd\surd$ *силы взаимодействия двух материальных точек равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти материальные точки.*

В случае, если система состоит из N штук материальных точек, для пары материальных точек i-ой и j-ой мы можем записать III закон Ньютона

$$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}ji,$$

где $\mathbf{F}_{ij}$ – сила, с которой i-ая материальная точка действует на j-ую материальную точку.

2.6 Закон сохранения импульса (продолжение)

Рассмотрим систему N материальных точек. Второй закон Ньютона для i-ой материальной точки

$$\dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ji}^{(i)}, \tag{11}$$

где $\mathbf{F}_i^{(e)}$ – сила, действующая на материальную точку со стороны внешних тел, не входящих в систему, $\mathbf{F}_{ji}^{(i)}$ – сила, действующая на материальную точку со стороны j-ой материальной точки. Если записать второй закон Ньютона в виде (11) для всех точек, входящих в систему, а потом их сложить, то мы получим

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(e)} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \mathbf{F}_{ji}^{(i)}. \tag{12}$$

Двойная сумма в (12) обращается в нуль в силу третьего закона Ньютона, в результате

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i^{(e)}. \tag{13}$$

Здесь слева стоит производная по времени от векторной суммы импульсов материальных точек системы (т.е. импульса системы материальных точек), справа – векторная сумма внешних сил, действующих на точки системы. Если правая сторона обращается в нуль (внешних сил нет, или их сумма равна нулю), то из равенства нулю производной получаем, что

$$\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i = const, \tag{14}$$

т.е. импульс системы не изменяется (сохраняется). Если сумма внешних сил не равна нулю, а равна нулю ее проекция на какое-то направление, то сохраняется проекция импульса системы на это направление.

2.7 Принцип относительности Галилея

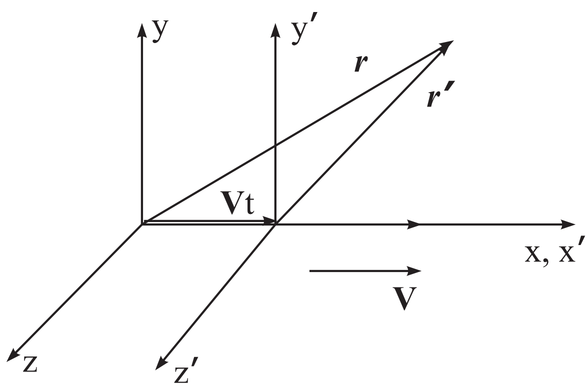

Рис. 7.

Пусть у нас есть инерциальная система отсчета K и движущаяся относительно нее прямолинейно и равномерно со скоростью $\mathbf{V}$ система отсчета K'. Рассмотрим движение материальной точки относительно этих систем отсчета. С учетом постулата классической механики об абсолютности интервалов времени и длины из рисунка находим

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{V}t'. \tag{15}$$

В проекциях:

$$x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'$$

Обратное преобразование

$$x = x' - Vt', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'$$

Полученные преобразования координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой носят название преобразований Галилея.

Дифференцирую по времени соотношение (15), получим закон сложения скоростей:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt'} + \mathbf{V}, \tag{16}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{V}. \tag{17}$$

Дифференцируем по времени закон сложения скоростей (17), получим

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}'. \tag{18}$$

Из последней формулы можно сделать вывод, что из инерциальности системы отсчета K следует инерциальность системы отсчета K'. Из (18) также следует инвариантность уравнений, выражающих второй закон Ньютона относительно перехода от одной инерциальной системы отсчета к другой. Это утверждение называют принципом относительности Галилея. Он может быть сформулирован по другому:

$\surd$ $\surd$ *все механические явления протекают одинаково во всех инерциальных СО при одинаковых начальных условиях.*

2.8 Силы

Наиболее фундаментальные силы, лежащие в основе механических явлений, – гравитационные и электрические.

Сила гравитационного притяжения

Сила гравитационного притяжения, действующая между материальными точками, в соответствии с законом всемирного тяготения, пропорциональная произведению масс точек m_1 и m_2, обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и направлена вдоль прямой, соединяющей эти точки

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где γ – гравитационная постоянная. Вообще говоря, массы, входящие в закон всемирного тяготения и второй закон Ньютона, разные, они получили название гравитационная и инертная соответственно. Однако из опыта следует, что эти массы равны. Поэтому принято говорить просто о массе тела.

Кулоновская сила

Кулоновская сила, действующая между двумя точечными зарядами q_1 и q_2:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2},$$

где r – расстояние между зарядами, k – коэффициент пропорциональности, зависящий от выбора системы единиц. Кулоновская сила может быть как силой притяжения (в случае зарядов разного знака), так и отталкивания (в случае одноименных зарядов).

Несмотря на то, что в основе всех механических явлений лежат гравитационные и электрические силы, вводятся приближенные силы для упрощения уравнений.

Однородная сила тяжести

Для тела вблизи поверхности планеты выражение для силы тяжести

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g}, \quad \text{где} \quad g = \gamma \frac{M}{R^2},$$

$\mathbf{g}$ – ускорение свободного падения, R – радиус планеты, m – масса тела.

Упругая сила

Упругая сила – сила, пропорциональная смещению материальной точки из положения равновесия и направленная к положению равновесия:

$$\mathbf{F} = -\kappa \mathbf{s},$$

где $\mathbf{s}$ – вектор смещения из положения равновесия, κ – упругий коэффициент. Примером такой силы является сила упругой деформации пружины или стержня, определяемая законом Гука:

$$F = \kappa \Delta l,$$

где Δl – величина упругой деформации.

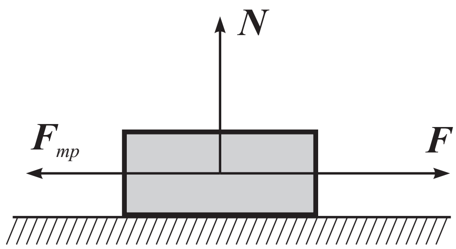

Рис. 8.

Сила трения скольжения

Сила трения скольжения возникает при относительном перемещении двух соприкасающихся поверхностей. Величина силы трения скольжения дается приближенным выражением

$$F_{\text{тр}} = \mu N,$$

где μ – коэффициент трения скольжения, зависящий от природы и состояния соприкасающихся поверхностей, $\mathbf{N}$ – сила реакции, действующая со стороны одной соприкасающейся поверхности на другую.

Сила сопротивления

Сила сопротивления действует на тело при его поступательном движении в жидкости или газе. Она зависит от скорости тела $\mathbf{v}$ относительно среды, направлена ей противоположно и приближенно равна:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{v},$$

где k – коэффициент, зависящий от среды и тела, и вообще говоря, от скорости, но при малых скоростях его во многих случаях можно считать постоянным.

3 Следствия законов Ньютона

3.1 Импульс силы и изменение импульса тела

Для системы материальных точек производная по времени импульса $\mathbf{p}$ системы (см. (13)):

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}^{(e)},$$

где $\mathbf{F}^{(e)}$ – сумма всех внешних сил, действующих на систему. Если $\mathbf{F}^{(e)}$ не зависит от времени, то:

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \mathbf{F}^{(e)}(t - t_0), \tag{19}$$

где $\mathbf{p}$ и $\mathbf{p}_0$ – импульсы системы в моменты времени t и t_0 соответственно. Выражение в правой части последнего равенства называется импульсом силы. Для случая зависящей от времени $\mathbf{F}^{(e)}$ выражение (19) легко обобщается:

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}_0 = \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{F}^{(e)}(\tau)\, d\tau\,.$$

3.2 Теорема о движении центра масс

$\surd$ Центром масс или центром инерции системы называется такая воображаемая точка, радиус-вектор $\mathbf{R}$ которой выражается через радиус-векторы материальных точек по формуле:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \ldots}{m_1 + m_2 + \ldots}$$

Продифференцируем последнее равенство по времени:

$$(m_1 + m_2 + \ldots)\dot{\mathbf{R}} = m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 + \ldots\,.$$

Вводя обозначения $m = m_1 + m_2 + ...$, $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$, получим

$$m\mathbf{V} = m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 + \ldots, \quad \text{или} \quad \mathbf{p} = m\mathbf{V}.$$

Т.о., мы выразили импульс системы через ее массу и скорость центра масс. В соответствии со II законом Ньютона мы имеем

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}^{(e)} \quad \text{или} \quad m\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}^{(e)}.$$

Отсюда следует, что центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна суммарной массе всей системы, а действующая сила – сумме всех внешних сил, действующих на систему (теорема о движении центра масс).

Если $\mathbf{F}^{(e)} = 0$, т.е. система замкнута, то $\mathbf{V} = const$. Центр масс замкнутой системы движется прямолинейно и равномерно.

3.3 Реактивное движение

Рассмотрим движение тела переменной массы на примере движения ракеты. Пусть m и $\mathbf{v}$ – масса и скорость ракеты в определенный момент времени. Импульс ракеты в этот момент будет $m\mathbf{v}$. Через время dt масса и скорость ракеты изменятся на величины $dm < 0$ и $d\mathbf{v}$. Импульс ракеты станет равным $(m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v})$. С учетом импульса газов $dm_{\text{г}}\mathbf{v}_{\text{г}}$ мы можем записать изменение импульса системы газы+ракета, оно должно быть равно импульсу внешних сил, действующих на ракету:

$$(m + dm)(\mathbf{v} + d\mathbf{v}) + dm_{\text{г}}\mathbf{v}_{\text{г}} - m\mathbf{v} = \mathbf{F}dt$$

Раскрывая скобки, отбрасывая слагаемое второго порядка малости,учитывая сохранение массы $dm_{\text{г}} = -dm$ и вводя обозначение $\mathbf{v}_{\text{отн}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_{\text{г}}$ – скорость газов относительно ракеты, получим

$$m d\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{отн}} dm + \mathbf{F}dt$$

или

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v}_{\text{отн}}\frac{dm}{dt} + \mathbf{F}$$

Полученное уравнение – уравнение Мещерского или уравнение движения точки с переменной массой.

В случае отсутствия внешних сил $md\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\text{отн}} dm$. Пусть ракета движется прямолинейно, направление газовой струи противоположно направлению движения ракеты, которое мы принимаем за положительное направление. Тогда

$$dv = -v_{\text{отн}} \frac{dm}{m}.$$

Предполагая скорость истечения газов во время полета постоянной, интегрируем последнее равенство:

$$v = -v_{\text{отн}} \int \frac{dm}{m} = -v_{\text{отн}} \ln m + \mathrm{C}.$$

Полагая скорость ракеты в начальный момент равной нулю, а массу ракеты – m_0, находим $v = v_{\text{отн}} \ln \dfrac{m_0}{m}$. Отсюда

$$\frac{m_0}{m} = \exp(v/v_{\text{отн}}).$$

Последняя формула носит название формулы Циолковского. Она позволяет рассчитать запас топлива, необходимый ракете для достижения определенной скорости: если $v/v_{\text{отн}} = 5$, то $m_0/m = 148$; если $v/v_{\text{отн}} = 10$, то $m_0/m = 22000$.

4 Работа и энергия

4.1 Работа и мощность

$\surd$ Работой силы $\mathbf{F}$ на перемещении $d\mathbf{s}$ называется проекция этой силы $\mathbf{F}_s$ на направление перемещения, умноженная на само перемещение:

$$dA = F_s\, ds = F ds \cos\alpha$$

или

$$dA = (\mathbf{F} d\mathbf{s}).$$

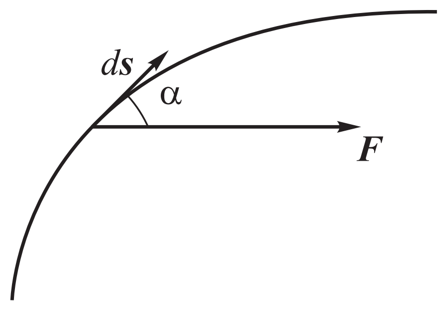

Рис. 9.

В общем случае, когда материальная точка движется по криволинейной траектории, работа выражается через криволинейный интеграл вдоль траектории:

$$A = \int\limits_L (\mathbf{F} d\mathbf{s}).$$

Если $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$, то получаем

$$dA = F_s\,ds = F_{1s}\,ds + F_{2s}\,ds = dA_1 + dA_2.$$

Т.е., элементарная работа результирующей двух или нескольких сил равна сумме элементарных работ этих сил. В результате $A = A_1 + A_2$. Единицы работы: в системе СИ — Джоуль (Дж), в системе СГС — эрг.
$\surd$ Джоуль есть работа силы величиной в 1 Н на перемещении в 1 м при условии, что направление перемещения совпадает с направлением силы.
$\surd$ Эрг есть работа силы в 1 дину на перемещении в 1 см при условии, что направление перемещения совпадает с направлением силы. Связь между единицами работы:

$$1\,\text{Дж} = 10^7\,\text{эрг}.$$

$\surd$ Работа, отнесенная к единице времени, есть мощность:

$$P = \frac{dA}{dt}.$$

Единицы мощности. СИ — Джоуль на секунду (Дж/с), СГС — эрг на секунду (эрг/с). Связь между единицами мощности:

$$1\,\text{Дж/с} = 10^7\,\text{эрг/с}.$$

4.2 Кинетическая энергия

С учетом $\mathbf{F} = \dfrac{d\mathbf{p}}{dt}$, $d\mathbf{s} = \mathbf{v}\,dt$, получаем $A = \displaystyle\int \mathbf{F}d\mathbf{s} = \int \mathbf{v}d\mathbf{p}$. Далее $\mathbf{v}d\mathbf{p} = m\mathbf{v}d\mathbf{v}$. Так как $\mathbf{v}^2 = v^2$, $\dfrac{d}{dt}\mathbf{v}^2 = \dfrac{d}{dt}v^2$, получаем $\mathbf{v}d\mathbf{v} = vdv$. Отсюда $A = m\displaystyle\int v\,dv$. Таким образом,

$$A_{12} = m\int\limits_{v_1}^{v_2} v\,dv = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}.$$

$\surd\surd$*Величина* $K = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{p^2}{2m}$ *называется кинетической энергией материальной точки.* Тогда

$$A_{12} = K_2 - K_1$$

$\surd$ Работа внешних сил при перемещении материальной точки равна приращению кинетической энергии этой точки. (Теорема о кинетической энергии)

Полученный результат может быть легко обобщен на систему материальных точек. Кинетической энергией системы называется сумма кинетических энергий материальных точек, из которых эта система состоит или на которые ее можно мысленно разделить. В результате теорема о кинетической энергии принимает вид:
$\surd$ работа всех сил (как внешних, так и внутренних), действующих на систему материальных точек, равна приращению кинетической энергии этой системы.

4.3 Консервативные и неконсервативные силы

Все силы, возникающие в макроскопической механике, делятся на консервативные и неконсервативные.
$\surd$ Консервативными называются силы, зависящие только от конфигурации системы, и работа которых по любому замкнутому пути равна нулю.
$\surd$ Все силы, не являющиеся консервативными, называются неконсервативными.

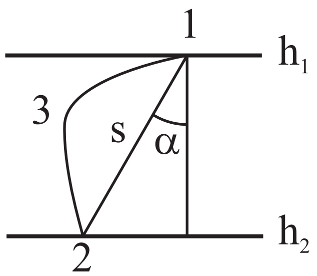

Рис. 10.

Примеры неконсервативных сил: диссипативные силы [dissipate – рассеивать](силы трения, сопротивления), гироскопические силы.
$\surd$ Диссипативными называются такие силы, полная работа которых при любых движениях в замкнутой системе всегда отрицательна.
$\surd$ Гироскопическими называются силы, зависящие от скорости материальной точки и действующие всегда перпендикулярно к этой скорости.

Рассмотрим работу силы тяжести при перемещении точки из положения 1 в положение 2 вдоль прямолинейного отрезка 12. Очевидно, что она равна

$$A = mgs\cos\alpha.$$

Из рисунка видно, что $s\cos\alpha = h_1 - h_2$, т.е.

$$A = mg(h_1 - h_2) = mgh_1 - mgh_2, \tag{20}$$

где h_1 и h_2 – высоты, на которых находилась материальная точка в начале и конце пути, отсчитанные от какого-либо произвольного уровня.

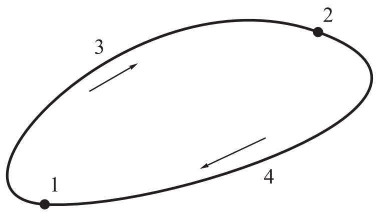

Рис. 11.

Формула (20) остается справедливой и в случае перемещения вдоль пути 132. Для доказательства надо разбить кривую 132 на последовательность бесконечно малых прямолинейных участков и тогда мы возвращаемся к предыдущему случаю. Т.о., работа силы тяжести не зависит от формы пути, а определяется только начальным и конечным положениями перемещающейся точки.

Отсюда следует, что работа силы тяжести по любому замкнутому пути равна нулю. Действительно, пусть точка перемещается из положения 1 в положение 2 один раз по пути 132, другой раз по пути 142 (см. рис. 10). Мы доказали, что $A_{132} = A_{142}$. Отсюда,

$$A_{132} - A_{142} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_{132} + A_{241} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_{13241} = 0.$$

Т.о., мы делаем вывод, что сила тяжести – консервативная сила.

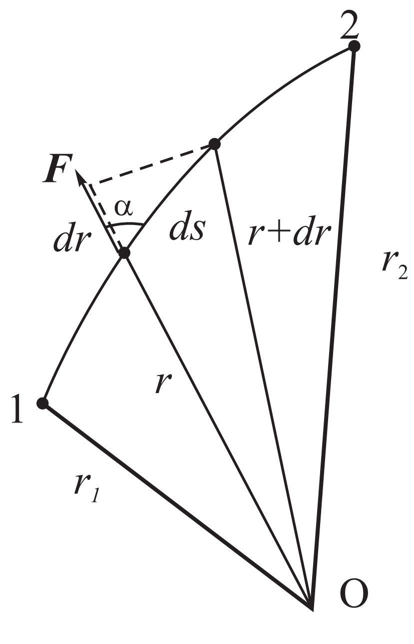

Рис. 12.

Рассмотрим также случай центральных сил. Сила называется центральной, если она направлена от (или к) одной и той же точке и зависит только от расстояния до этой точки, называемой силовым центром. Примеры центральных сил – сила гравитационного притяжения, сила кулоновского взаимодействия двух точечных зарядов. Пусть точка, на которую действует центральная сила F, перемещается из положения 1 в положение 2. По определению

$$dA = (\mathbf{F}d\mathbf{s}) = Fds\cos\alpha$$

Из рисунка видно, что $ds\cos\alpha = dr$, т.е. $dA = Fdr$, а вся работа

$$A = \int\limits_{r_1}^{r_2} Fdr$$

и не зависит от формы пути, а определяется лишь начальной и конечной точками. Таким образом, центральные силы – консервативные силы.

4.4 Потенциальная энергия

Если на систему действуют консервативные силы, то для такой системы можно ввести понятие потенциальной энергии. Если какое-нибудь положение системы принять за нулевое, то работа, которую надо совершить против консервативных сил, чтобы перевести систему из нулевого положения в какое-либо другое определенное положение, носит название потенциальной энергии системы в этом положении. Или наоборот, работа, совершаемая консервативными силами при переходе из данного положения в нулевое, принимается за потенциальную энергию этого рассматриваемого положения. Так как работа консервативных сил не зависит от пути перехода, то потенциальная энергия системы является функцией только ее координат. Очевидно, что значение потенциальной энергии зависит от того, какое положении принято за нулевое, поэтому говорят, что потенциальная энергия определена с точностью до константы.

По определению, работа консервативных сил при переходе системы из состояния 1 в состояние 2 определяется следующим образом

$$A_{12} = U_1 - U_2.$$

С другой стороны по теореме о кинетической энергии та же работа может быть выражена как

$$A_{12} = K_2 - K_1.$$

Тогда,

$$U_1 - U_2 = K_2 - K_1 \quad \Rightarrow \quad K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

Полной энергией системы называется величина $E = K + U$. Как мы видим, в замкнутой системе, взаимодействующей только консервативными и гироскопическими силами полная энергия остается неизменной:

$$E = K + U = const. \tag{21}$$

Это утверждение носит название закона сохранения механической энергии. Так как $K \geqslant 0$, то $E \geqslant U$. Рассмотрим одномерное движение частицы в поле с потенциальной энергией $U = U(x)$ имеющей форму, как показано на рис. 13. Пусть наша частица имеет полную энергию E_1.

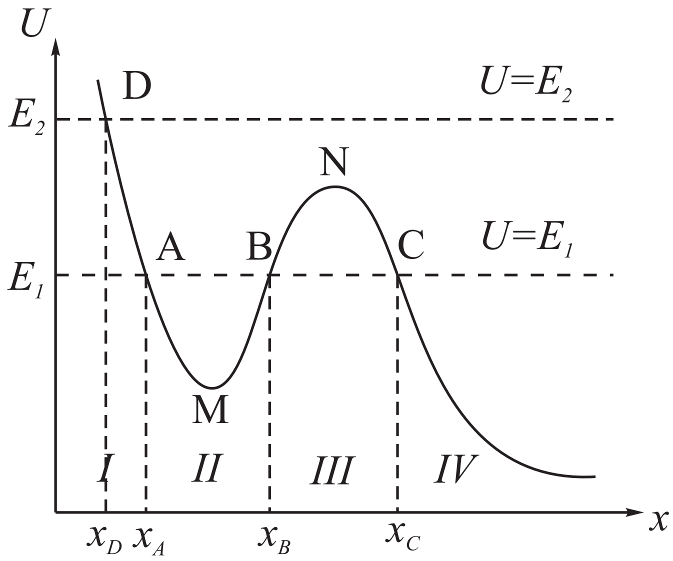

Рис. 13.

Проведем на рисунке прямую $U = E_1$, которая, как видно, пересекает потенциальную кривую $U = U(x)$ в трех точках A, B и C. Частица может находиться только там, где $U \leqslant E_1$, т.е. в областях II и IV. Причем перейти из области II в область IV частица не может, т.к. этому мешает потенциальный барьер BNC. Так же частица не может перейти в область I. Т.е., если частица изначально находилась в области II, то она будет совершать финитное (ограниченное) движение, и будет находиться в потенциальной яме AMB, совершая колебания между точками x_A и x_B, которые называются точками поворота.

Если частица изначально находилась с области IV, то ее движение инфинитно (неограниченно) – она будет отражаться от точки C и уходить на бесконечность. Если полная энергия частицы равна E_2, то горизонтальная прямая $U = E_2$ пересекает потенциальную кривую $U = U(x)$ в одной точке D. Следовательно для частицы доступной будет вся область правее точки D, и движение частицы будет инфинитным.

4.5 Потенциальная энергия в простейших случаях

Однородное поле тяжести

Если материальная точка перемещается с высоты h на нулевой уровень, сила тяжести совершит работу $A = mgh$. По определению, потенциальная энергия материальной точки, находящейся на высоте h над нулевым уровнем, равна

$$U = mgh.$$

Растянутая или сжатая пружина

Рис. 14.

Если пружина растянута на величину x, то в пружине возникает сила упругости, направленная к положению равновесия и равная в соответствии с законом Гука $F = kx$. При сжатии пружины сила упругости совершит работу

$$A = \int\limits_0^x F\,dx = k\int\limits_0^x x\,dx = \frac{1}{2}kx^2.$$

Т.о., потенциальная энергия растянутой (или сжатой) пружины равна

$$U = \frac{1}{2}kx^2.$$

Гравитационное притяжение двух материальных точек

В соответствии с законом всемирного тяготения, сила притяжения двух материальных точек массами M и m, находящихся на расстоянии r друг от друга, равна

$$F = \gamma\frac{Mm}{r^2}.$$

Т.к. рассматриваемая сила центральная, то мы можем ввести для нее потенциальную энергию следующим образом. Будем считать материальную точку M неподвижной и найдем работу гравитационной силы при перемещении с бесконечности на расстояния r до точки M.

По определению, $A_{12} = U_1 - U_2$. С другой стороны

$$A_{12} = \int\limits_1^2 \mathbf{F}\,d\mathbf{s}\,. \quad \text{Тогда} \quad \int\limits_1^2 \mathbf{F}\,d\mathbf{s} = U_1 - U_2.$$

Подставляем выражение для гравитационной силы

$$-\int\limits_\infty^r \gamma\frac{Mm}{r^2}\,dr = U(\infty) - U(r),$$

$$\gamma\frac{Mm}{r}\bigg|_\infty^r = U(\infty) - U(r), \quad \gamma\frac{Mm}{r} = U(\infty) - U(r).$$

Т.к. потенциальная энергия на бесконечности обычно принимается равной нулю, потенциальная энергия гравитационного притяжения двух материальных точек имеет вид:

$$U = -\gamma \frac{Mm}{r}. \tag{22}$$

4.6 Силы и потенциальная энергия

Поставим задачу — зная потенциальную энергию тела в силовом поле, найти действующую на него со стороны поля силу. Пусть на тело действует консервативная сила $\mathbf{F}$ и под действием этой силы тело совершает перемещение $d\mathbf{r}$. Тогда работа этой силы равна убыли потенциальной энергии тела:

$$\mathbf{F}d\mathbf{r} = -dU$$

или в проекциях

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -dU. \tag{23}$$

С другой стороны, т.к. $U = U(x, y, z)$ мы можем написать

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz. \tag{24}$$

Сравнивая (23) и (24), получаем:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}.$$

Вспоминая выражение градиента скалярной функции в декартовой системе координат, мы можем написать

$$F = -\mathrm{grad}U = -\nabla U, \quad \text{где} \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

Т.о., сила, действующая на точку со стороны силового поля, выражается через градиент потенциальной энергии точки в этом поле, взятый с обратным знаком. Т.е. сила оказывается направленной в сторону наибыстрейшего убывания потенциальной энергии.

5 Момент силы и момент импульса

Момент силы и момент импульса играют огромную роль в механике. Момент вектора может быть определен как относительно точки так и относительно оси. Момент вектора относительно точки есть вектор, а момент вектора относительно оси есть проекции вектора момента относительно точки, лежащей на этой оси, на саму ось, т.е. является скаляром.

5.1 Момент силы относительно точки

$\surd$ Моментом силы $\mathbf{F}$ относительно точки O называется векторное произведение радиуса-вектора $\mathbf{r}$ на силу $\mathbf{F}$ (см. рис. 15):

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r} \times \mathbf{F}].$$

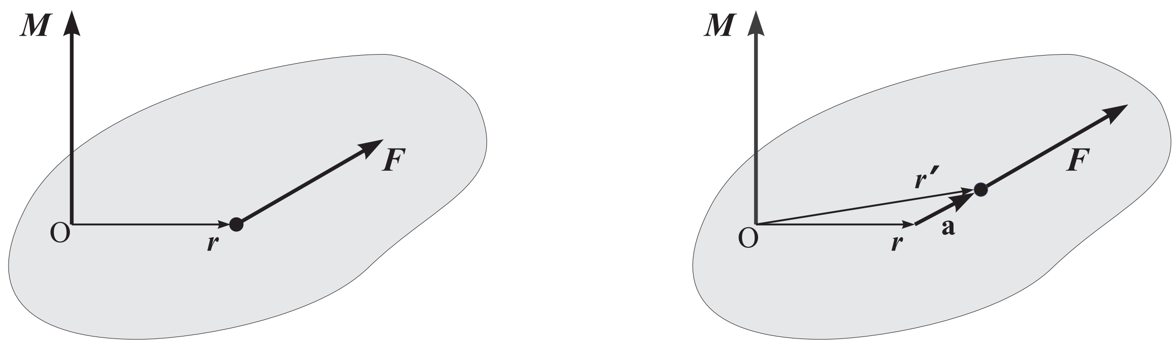

Рис. 15.

Момент силы не изменяется, если точку приложения силы перенести вдоль линии действия силы. Для доказательства перенесем точку приложения силы на $\mathbf{a}$. Тогда

$$\mathbf{M}' = [\mathbf{r}' \times \mathbf{F}] = [(\mathbf{r} + \mathbf{a}) \times \mathbf{F}] = [\mathbf{r} \times \mathbf{F}] + [\mathbf{a} \times \mathbf{F}] = [\mathbf{r} \times \mathbf{F}] = \mathbf{M},$$

что и доказывает наше утверждение.

Если на тело действует несколько сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, ...$, то

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1] + [\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2] + [\mathbf{r}_3 \times \mathbf{F}_3] + ... = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 + ...$$

В случае, если линии действия сил лежат в одной плоскости (и среди нет параллельных), то суммарный момент этих сил равен моменту их равнодействующей

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + ...$$

5.2 Момент импульса относительно точки

$\surd$ Моментом импульса $\mathbf{p}$ относительно точки называется векторное произведение радиуса-вектора $\mathbf{r}$ на импульс $\mathbf{p}$:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \mathbf{p}] \tag{25}$$

$\surd$ Для системы материальных точек:

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1] + [\mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2] + [\mathbf{r}_3 \times \mathbf{p}_3] + ... = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3 + ...$$

5.3 Уравнение моментов

Продифференцируем уравнение (25) по времени

$$\dot{\mathbf{L}} = [\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p}] + [\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}]. \tag{26}$$

Так как $\mathbf{p} = m\dot{\mathbf{r}}$ первое слагаемое в (26) равно нулю, в соответствии со II законом Ньютона $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{p}}$ и в результате

$$\dot{\mathbf{L}} = [\mathbf{r} \times \mathbf{F}] = \mathbf{M}$$

или

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}. \tag{27}$$

Полученное уравнение носит название уравнение моментов: производная по времени от момента импульса относительно неподвижного начала равна моменту силы относительного того же начала.

Рассмотрим систему материальных точек. Момент импульса системы материальных точек равен векторной сумме моментов импульса точек входящих в систему:

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3 + ...$$

Момент сил, действующих на систему, равен векторной сумме моментов сил:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_3 + ...$$

Записывая уравнения моментов для материальных точек, входящих в систему, и складывая их почленно получим

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}_{\text{внеш}}. \tag{28}$$

Причем в правой части остается только момент внешних сил, т.к. сумма моментов внутренних сил системы в силу III закона Ньютона равна нулю.

Если момент внешних сил в правой части (28) равен нулю, то $\dot{\mathbf{L}} = 0$, отсюда $\mathbf{L} = const$. В результате мы приходим к закону сохранения момента импульса:

$\surd\surd$ *если момент внешних сил относительно неподвижного начала O равен нулю, то момент импульса системы относительного того же начала остается постоянным во времени.*

Закон сохранения момента импульса выполняется, в частности, для замкнутой системы; для системы, на которую действуют центральные силы. Случай замкнутой системы очевиден. Если система находится в поле центральных сил, то момент этих сил относительно силового центра равен нулю, что приводит к тому, что сохраняется момент импульса такой системы. Закон сохранения момента импульса является фундаментальным законом физики.

5.4 Момент сил и момент импульса относительно оси

Запишем уравнение моментов (28) в проекциях на координатные оси:

$$\dot{L}_x = M_x^{\text{внеш}}, \quad \dot{L}_y = M_y^{\text{внеш}}, \quad \dot{L}_z = M_z^{\text{внеш}} \tag{29}$$

Здесь L_x носит название момент импульса относительно оси x, M_x – момент силы относительно оси x. Уравнение

$$\frac{dL_x}{dt} = M_x$$

носит название уравнение моментов относительно оси x.

Остальные уравнения в (29) — уравнения моментов относительно соответствующих осей. Выясним физический смысл M_x. Разложим вектора $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$ на взаимно перпендикулярные составляющие:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}_\parallel, \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_\perp + \mathbf{F}_\parallel.$$

Здесь $\mathbf{r}_\perp$ – составляющая радиуса-вектора, перпендикулярная к оси x, $\mathbf{r}_\parallel$ — параллельная оси x (см. рис. 16). Таким же образом мы представили и вектор $\mathbf{F}$. Тогда

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r} \times \mathbf{F}] = [\mathbf{r}_\perp \times \mathbf{F}_\perp] + [\mathbf{r}_\perp \times \mathbf{F}_\parallel] + \\ + [\mathbf{r}_\parallel \times \mathbf{F}_\perp] + [\mathbf{r}_\parallel \times \mathbf{F}_\parallel], \quad (30)$$

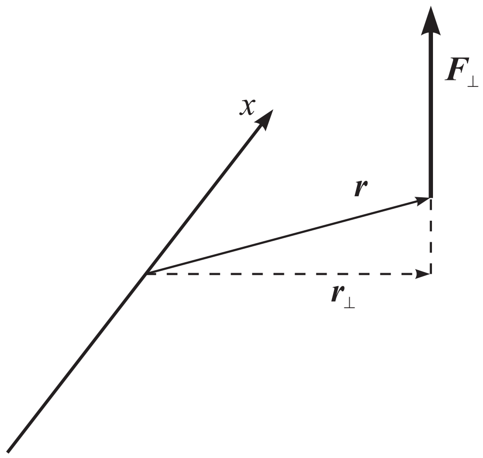

Рис. 16.

Последнее слагаемое в (30) равно нулю как векторное произведение параллельных векторов. Найдем составляющую вектора $\mathbf{M}$, параллельную оси x. Второе и третье слагаемые в (30) перпендикулярны оси x. Поэтому

$$\mathbf{M}_\parallel = [\mathbf{r}_\perp \times \mathbf{F}_\perp]. \quad (31)$$

Именно $\mathbf{M}_\parallel$ и определяет M_x. В элементарной физике плечом силы относительно оси называется кратчайшее расстояние между линией действия силы и осью, моментом силы относительно оси — произведение перпендикулярной к оси составляющей силы и ее плеча, взятое с определенным знаком. Очевидно, что эти определения согласуются с (31) и всеми выше данными определениями.

Также легко получить и для параллельной оси составляющей момента импульса

$$\mathbf{L}_\parallel = [\mathbf{r}_\perp \times \mathbf{p}_\perp].$$

5.5 Момент инерции

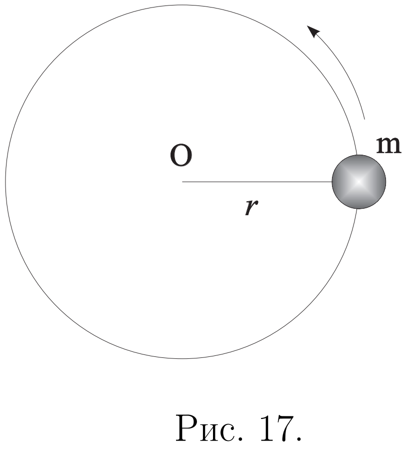

Рис. 17.

Для материальной точки, вращающейся по окружности радиуса r (см. рис. (17)):

$$L = mvr = mr^2\omega,$$

для системы материальных точек, вращающихся с одинаковой угловой скоростью:

$$L = \sum mr^2\omega = I\omega,$$

где

$$I = \sum mr^2. \tag{32}$$

$\surd$ Сумма произведений масс материальных точек на квадраты расстояний их до оси вращения называется моментом инерции системы относительно этой оси.

Кинетическая энергия вращения может быть записана в виде

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\omega^2\mathbf{r}^2}{2} = \frac{I\omega^2}{2}.$$

В случае твердого тела мы можем разбить его на малые элементы и в пределе сумма в (32) переходит в интеграл $I = \displaystyle\int dmr^2$.

С использованием момента инерции уравнение моментов $\dot{L} = M$ принимает вид:

$$\frac{d}{dt}(I\omega) = M.$$

Полученное уравнение — основное уравнение динамики вращательно движения вокруг неподвижной оси. Оно аналогично второму закону Ньютона для материальной точки. В случае неизменяемой системы материальных точек

$$I\frac{d\omega}{dt} = M.$$

5.6 Теорема Гюйгенса-Штейнера

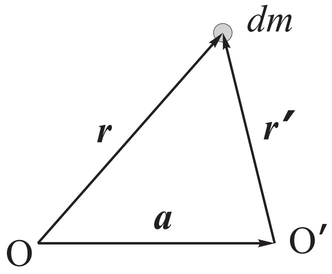

Рис. 18.

Найдем связь между моментами инерции тела, вычисленными относительно двух параллельных осей O и O' (см. рис. 18). По определению

$$I' = \int dm\, r'^2 = \int dm\,(\mathbf{r} - \mathbf{a})^2 = $$
$$= \int dm\,(\mathbf{r}^2 + \mathbf{a}^2 - 2\mathbf{ra}) = $$
$$= \int dm\,\mathbf{r}^2 + \mathbf{a}^2 \int dm - 2\mathbf{a}\int dm\,\mathbf{r}.$$

В соответствии с определением центра масс $\displaystyle\int dm\mathbf{r} = m\mathbf{R}$, где $\mathbf{R}$ – радиус-вектор центра масс. Тогда

$$I_{O'} = I_O + ma^2 - 2m(\mathbf{aR})$$

Если ось O проходит через центр масс, то $R = 0$ и

$$I_{O'} = I_O + ma^2$$

Полученное формула выражает теорему Гюйгенса-Штейнера:
$\surd$ момент инерции тела массой m относительно какой-либо оси равен моменту инерции его относительно параллельной оси, проходящей через центр масс, сложенному с величиной ma^2, где a – расстояние между осями.

5.7 Вычисление моментов инерции

Рассмотрим несколько примеров на нахождение моментов инерции простых, обладающих определенной симметрией, тел. Для удобства кроме моментов инерции относительно осей I_x, I_y, I_z, введем момент инерции относительно точки – начала координат

$$I_0 = \sum mr^2 \quad \text{или} \quad I_0 = \int dm\, r^2\,,$$

где r – расстояние от материальной точки системы (или от элементарной массы dm) до начала координат. Для одной материальной точки

$$I_x = m(y^2+z^2),\;\; I_y = m(x^2+z^2),\;\; I_z = m(x^2+y^2),\;\; I_0 = m(x^2+y^2+z^2).$$

Очевидно, что

$$I_x + I_y + I_z = 2I_0. \tag{33}$$

Это соотношение остается справедливым и для системы материальных точек. Если выполнить преобразование поворота системы координат, то, очевидно, моменты инерции тела относительно осей изменятся, но момент инерции относительно начала координат останется неизменным, и, следовательно, останется постоянной и сумма моментов инерции относительно трех осей.

Рассмотрим случай плоского распределения масс, например, бесконечно тонкую пластинку. Пусть она лежит в плоскости xy. Для нее

$$I_0 = \sum mr^2 = \sum m(x^2+y^2) = I_z.$$

Тогда с учетом (33) получаем $I_x + I_y + I_z = 2I_z$, отсюда

$$I_x + I_y = I_z \tag{34}$$

Рассмотрим несколько примеров на вычисление моментов инерции.

Бесконечно тонкий диск радиуса R

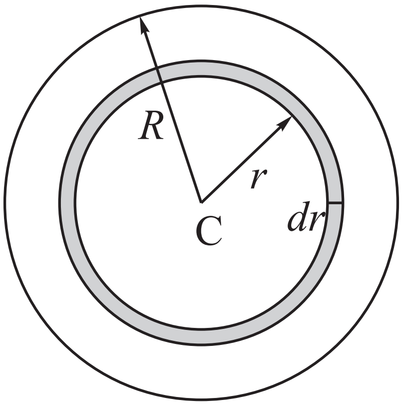

Рис. 19.

Пусть ось z проходит через центр диска перпендикулярно его плоскости, а сам диск лежит в плоскости xy. Вычислим I_z. Для этого выделим на диске бесконечно тонкое кольцо толщины dr и радиуса r. Его масса будет равна $dm = \rho V = \rho 2\pi r dr$. Тогда с учетом однородности диска $\rho = m/\pi R^2$ получим

$$I_z = \int\limits_0^R \rho 2\pi r^3 \, dr = \frac{2m}{R^2} \int\limits_0^R r^3 \, dr = \frac{mR^2}{2}\,.$$

Т.е.,

$$I_z = \frac{mR^2}{2} \tag{35}$$

Очевидно, что полученный результат будет справедлив и для цилиндра, ось которого совпадает с осью z.

Из соображений симметрии $I_x = I_y$ и с учетом (34) получаем

$$I_x = I_y = \frac{mR^2}{4}.$$

Цилиндр высотой H и радиусом R

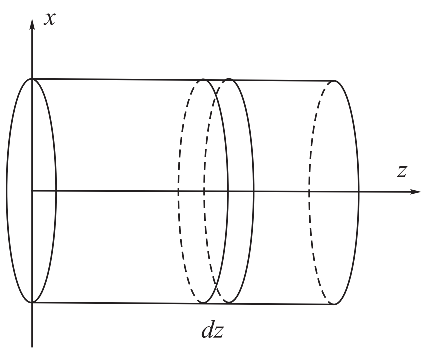

Рис. 20.

Момент инерции относительно продольной оси мы же вычислили (35). Найдем момент инерции относительно поперечной оси x (см. рис. 20). Для этого разобъем цилиндр на бесконечно тонкие диски перпендикулярные оси x, и воспользуемся предыдущим результатом. Очевидно, что с соответствии с теоремой Гюйгенса-Штейнера момент инерции диска толщиной dz

$$dI_x = dm\, z^2 + \frac{dm\, R^2}{4}.$$

Тогда для всего цилиндра

$$I_x = \int dm\, z^2 + \int \frac{dm\, R^2}{4} = \int dm\, z^2 + \frac{m\, R^2}{4}\,.$$

Масса нашего диска $dm = \rho\pi R^2 dz = \dfrac{m}{\pi R^2 H}\pi R^2 dz = \dfrac{m}{H}dz$ и получаем

$$I_x = \frac{m}{H}\int\limits_0^H z^2 dz + \frac{m\,R^2}{4} = \frac{1}{3}mH^2 + \frac{1}{4}m\,R^2.$$

Воспользовавшись теоремой Гюйгенса-Штейнера, найдем момент инерции цилиндра относительно поперечной оси, проходящей через центр масс

$$I_C = I_x - m\frac{H^2}{4} = \frac{1}{12}mH^2 + \frac{1}{4}m\,R^2\,.$$

Полый шар с бесконечно тонкими стенками радиуса R

Запишем момент инерции шара относительно центра $I_0 = mR^2$. Из соображений симметрии $I_x = I_y = I_z$ и с учетом (34) получаем

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3}I_0 = \frac{2}{3}mR^2$$

Сплошной однородный шар радиуса R

Разобъем шар на бесконечно тонкие полые шары (сферы) массами dm

$$dm = \rho 4\pi r^2 dr = \frac{m}{(4/3)\pi R^3}4\pi r^2 dr = \frac{3m}{R^3}r^2 dr.$$

Тогда момент инерции относительно центра

$$I_0 = \int dm r^2 = \frac{3m}{R^3}\int\limits_0^R r^4 dr = \frac{3}{5}mR^2.$$

Следовательно,

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{3}I_0 = \frac{2}{5}mR^2.$$

5.8 Законы сохранения и симметрия пространства и времени

Законы сохранения (закон сохранения энергии, законы сохранения импульса и момента импульса) можно получить из второго закона Ньютона, если к нему присоединить свойства симметрии пространства и времени: однородность пространства и времени, изотропию пространства. Дадим определения этих свойств.

$\surd$ Однородность времени означает, что если в два любые момента времени все тела замкнутой системы поставить в совершенно одинаковые условия, то начиная с этих моментов все явления в ней будут протекать совершенно одинаково.

$\surd$ Однородность пространства означает, что если замкнутую систему тел перенести из одного места пространства в другое, поставив при этом все тела в ней в те же условия, в каких они находились в прежнем положении, то это не отразится на ходе всех последующих явлений.

$\surd$ Изотропия пространства означает, что если замкнутую систему тел повернуть вокруг некоторой оси на любой угол, поставив при этом все тела в ней в те же условия, в каких они находились с прежнем положении, то это не изменит ход последующих явлений.

Закон сохранения энергии следует из однородности времени, закон сохранения импульса — из однородности пространства, закон сохранения момента импульса — из изотропии пространства.

6 Механика твердого тела

Твердым телом в механике называют систему материальных точек, при любых движениях которой взаимные расстояния между материальными точками системы остаются неизменными. В этом определении, как и положено в классической механике, под материальными точками понимаются достаточно малые но макроскопические части, на которые мысленно можно разделить рассматриваемое тело. Классическая механика рассматривает твердое тело как сплошную среду, между элементами которой действуют внутренние силы, которые условно разделяют на нормальные и касательные напряжения. Причиной возникновения напряжений в твердом теле являются различные деформации. В пределе абсолютно твердого тела деформациями а, следовательно, и возникающими напряжениями пренебрегают.

6.1 Уравнения движения и равновесия твердого тела

Твердое тело является механической системой с шестью степенями свободы. Следовательно, для описания его движения необходимо 6 независимых скалярных уравнения. Они записываются в виде 2 векторных уравнений:

$$m\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{внешн}} \text{ – уравнение движения центра масс;} \qquad (36)$$

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}_{\text{внешн}} \text{ – уравнение моментов.} \qquad (37)$$

Уравнение моментов может быть записано относительно центра масс или произвольного неподвижного начала, или движущегося начала, скорость которого в любой момент времени параллельна скорости центра масс.

В случае, если твердое тело покоится, уравнения (36), (37) переходят в:

$$\mathbf{F}_{\text{внешн}} = 0, \qquad \mathbf{M}_{\text{внешн}} = 0. \qquad (38)$$

Уравнения (38) являются необходимыми но недостаточными условиями покоя твердого тела, потому что при их выполнении тело может равномерно двигаться и вращаться с сохранением момента импульса. Из уравнений (38) следует, что сумма внешних сил, действующих на тело, равна нулю. В этом случае точку, относительно которой записывается уравнение моментов, можно выбирать произвольно.

6.2 Мгновенная ось вращения

Рассмотрим распределение скоростей во вращающемся вокруг неподвижной оси твердом теле. Для этого достаточно выяснить распределение скоростей в каком-либо поперечном сечении твердого тела, перпендикулярном оси вращения. Очевидно, что траектории всех точек в поперечном сечении – концентрические окружности с центрами в точке O (см. рис. 21). Для всех точек твердого тела угловая скорость одна и та же, а линейная скорость связана с угловой по формуле $v = \omega r$, поэтому линейная скорость точек будет возрастать пропорционально расстоянию до центра, как схематически показано на рис. 21.

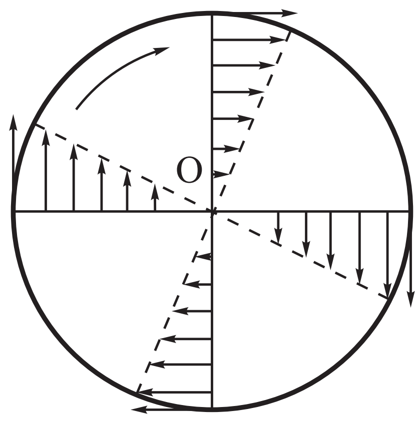

Рис. 21.

Рассмотрим теперь произвольное (поступательное и вращательное) движение плоского твердого тела. Теперь у нас уже нет неподвижной оси вращения. Выберем две произвольные точки в поперечном сечении: А и В. Расстояние между ними по определению остается постоянным. Т.е., $(\mathbf{r}_\mathrm{B} - \mathbf{r}_\mathrm{A})^2 = const$. Продифференцируем это равенство по времени:

$$2(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)(\dot{\mathbf{r}}_B - \dot{\mathbf{r}}_A) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A)(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) = 0.$$

Если обозначить расстояние между точками $\mathbf{r}_{AB} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A$, то мы получаем $\mathbf{r}_{AB}(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) = 0$. Если предположить, что точка А такая точка, мгновенная скорость которой в данный момент равна нулю $\mathbf{v}_A = 0$, то мы получаем

$$\mathbf{r}_{AB}\mathbf{v}_B = 0. \tag{39}$$

Из произвольности точки B и (39) сразу следует ортогональность векторов $\mathbf{r}_{AB}$ и $\mathbf{v}_B$. Так как мгновенная скорость точки А в определенный момент равна нулю, то можно утверждать что через точку А проходит мгновенная ось вращения (таких точек на самом деле в твердом теле бесконечно много в каждый момент времени, т.к. мы говорим только о данном поперечном сечении). Т.е. в данный момент времени движение твердого тела можно представить как чистое вращение вокруг оси проходящей через точку А.

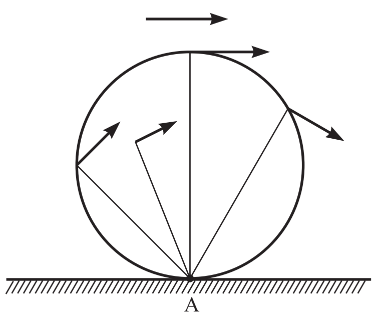

Рис. 22.

√ *Прямая, проходящая через точки тела, скорости которых в данный момент времени равны нулю, называется мгновенной осью вращения.*

Очевидно, что мгновенная ось перемещается как в теле, так и в пространстве. Рис. 22 иллюстрирует использование мгновенной оси при качении колеса по горизонтальной поверхности. Отметим, что мгновенная ось служит для описания мгновенного распределения только скоростей.

6.3 Угловая скорость

Рассмотрим твердое тело, вращающееся вокруг оси ОА с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. Линейная скорость вращения произвольной точки В тела по определению равна $v = \omega r_\perp$.

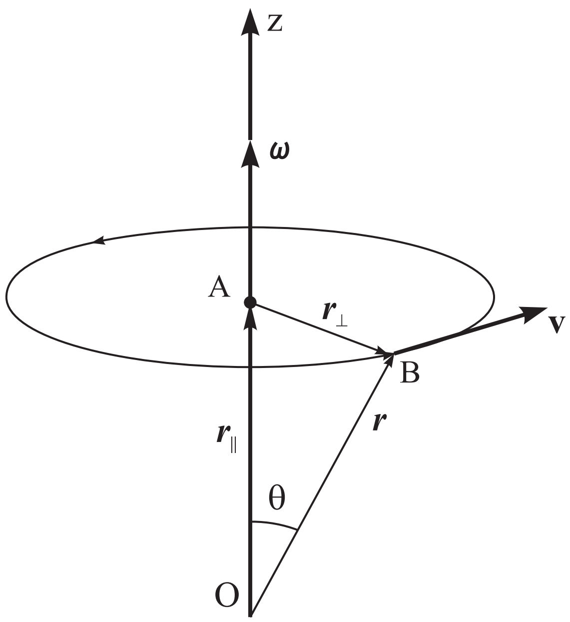

Рис. 23.

Определим вектор угловой скорости как

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{[\mathbf{r}_\perp \times \mathbf{v}]}{\mathbf{r}_\perp^2}, \tag{40}$$

где $\mathbf{r}_\perp$ – составляющая радиус-вектора, проведенная от оси вращения к точке B, перпендикулярная этой оси. Из (40) следует, что $\omega = v/r_\perp$, а направление угловой скорости – вдоль оси вращения, причем с направлением вращения составляет правый винт. Из рис. 23 видно, что

$$\mathbf{v} = [\omega \times \mathbf{r}_\perp].$$

С учетом $\mathbf{r} = \mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}_\parallel$ получаем

$$\mathbf{v} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}].$$

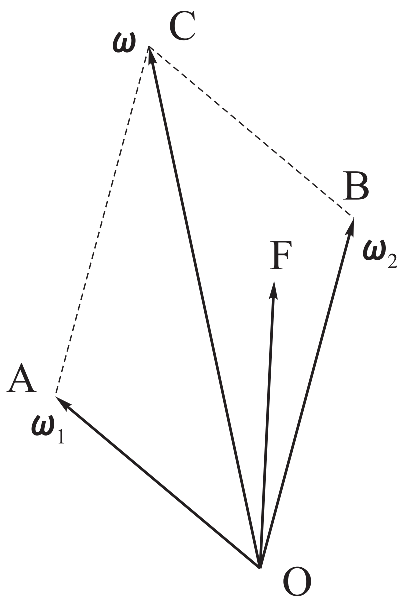

Рис. 24.

Рассмотрим сложение вращений, а именно: пусть тело вращается вокруг оси OA с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$ (см. рис. 24), а сама ось OA вращается с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_2$ вокруг оси OB. Возьмем произвольную точку F. В связи с первым вращением точка F приобретает линейную скорость $\mathbf{v}_1 = [\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}]$, в связи со вторым – $\mathbf{v}_2 = [\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}]$. Тогда ее результирующая скорость может быть найдена сложением:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = [\boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}] + [\boldsymbol{\omega}_2 \times \mathbf{r}] = \\ = [(\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{r}] = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}].$$

где $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$.

$\surd$ $\surd$ Два вращения с угловыми скоростями $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$ складываются в одно вращение вокруг мгновенной оси с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$. Мгновенная ось в каждый момент времени направлена вдоль диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{\omega}_1$ и $\boldsymbol{\omega}_2$.

6.4 Теорема Эйлера

$\surd$ Плоское движение твердого тела — такое движение, при котором все точки тела движутся параллельно одной плоскости.
Произвольное плоское движение твердого тела может рассматриваться как вращение вокруг мгновенной оси, движущейся как в теле, так и в пространстве.

Теорема Эйлера: твердое тело, имеющее одну неподвижную точку, может быть переведено из произвольного положения в другое произвольное положение путем поворота вокруг некоторой оси, проходящей через эту неподвижную точку.

В общем случае всякое движение твердого тела можно разложить на поступательное со скоростью $\mathbf{v}_0$ (ск-ть точки O) и вращательное вокруг мгновенной оси, проходящей через точку O.

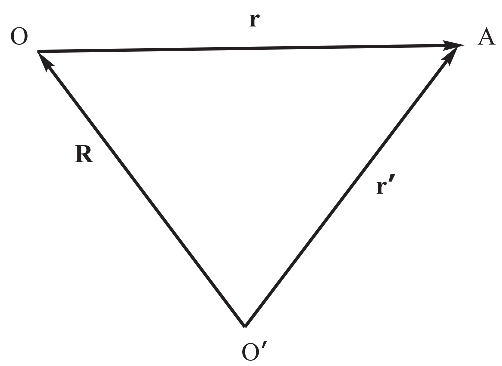

Рис. 25.

Для произвольной точки A

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_O + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}].$$

Относительно точки O$'$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{O'} + [\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}'].$$

Учитывая, что речь идет о скорости одной и той же точки, а также

$$\mathbf{v}_\text{O} = \mathbf{v}_{O'} + [\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{R}]$$

Тогда с учетом $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{R}$

$$\mathbf{v}_O + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] = \mathbf{v}_{O'} + [\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}'],$$

$$\mathbf{v}_{O'} + [\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{R}] + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] = \mathbf{v}_{O'} + [\boldsymbol{\omega}' \times (\mathbf{r} + \mathbf{R})].$$

Отсюда получаем $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}'$. Таким образом, мы доказали, что угловая скорость относится ко всему твердому телу и не зависит от выбора точки O.

Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижного начала координат O. Его кинетическая энергия равна

$$K = \frac{1}{2} \int \mathbf{v}^2 \, dm.$$

Мы можем записать $\mathbf{v}^2 = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) = ([\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] \cdot \mathbf{v}) = (\boldsymbol{\omega} \cdot [\mathbf{r} \times \mathbf{v}])$ с учетом свойств смешанного произведения. Т.к. угловая скорость одинакова для все точек тела, то мы можем ее вынести из под знака интеграла

$$K = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \int [\mathbf{r} \times \mathbf{v}]\, dm,$$

или

$$K = \frac{1}{2}(\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\omega}), \tag{41}$$

где $\mathbf{L} = \displaystyle\int [\mathbf{r} \times \mathbf{v}] dm$ – момент импульса тела относительно O.

6.5 Скатывание тел с наклонной плоскости

Рассмотрим движение симметричных по отношению к вращению тел. Будем считать, что скатывание происходит без проскальзывания. Запишем уравнение моментов относительно мгновенной оси, проходящей через точку A

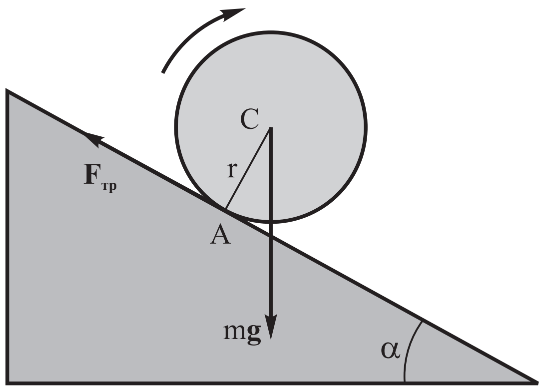

Рис. 26.

$$I_A \frac{d\omega}{dt} = M_A,$$

где I_A – момент инерции скатывающегося тела относительно мгновенной оси, проходящей через точку A, M_A – момент внешних сил относительно той же оси.

$$I_A \frac{d\omega}{dt} = mgr \sin\alpha. \tag{42}$$

$v_C = v_A + \omega r$, $v_A = 0$, $v_C = v = \omega r$, $a = \dfrac{dv}{dt} = r\dfrac{d\omega}{dt}$. С учетом (42) получаем

$$a = \frac{mgr^2}{I_A} \sin\alpha$$

По теореме Гюйгенса-Штейнера $I_A = I_C + mr^2$

$$a = \frac{mgr^2}{I_C + mr^2} \sin\alpha$$

☐ **Упражнение.** К концу нити, намотанной на блок с моментом инерции I и радиусом R, привязали тело массой m и отпустили. Найти ускорение тела.
Ответ: $a = g/(1 + I/mR^2)$.

6.6 Главные оси инерции

$\surd$ Теорема о главных осях инерции: для любой точки тела существуют три взаимно перпендикулярные оси, при вращении относительно которых вектор $\mathbf{L}$ параллелен оси вращения: $\mathbf{L}_i = I_i \boldsymbol{\omega}_i$ ($i = 1,\ 2,\ 3$). Моменты инерции относительно этих осей называются главными моментами инерции. Если вращение происходит вокруг произвольной оси, то

$$\mathbf{L} = I_1\boldsymbol{\omega}_1 + I_2\boldsymbol{\omega}_2 + I_3\boldsymbol{\omega}_3,$$

где $\boldsymbol{\omega}_i$ – составляющие вектора $\boldsymbol{\omega}$ вдоль главных осей инерции.
$\surd$ Если главные оси проведены через центр масс, то их называют свободными осями. При свободном вращении устойчивым оказывается только вращение относительно двух свободных осей — с минимальными и максимальными моментами инерции.

6.7 Гироскопы

$\surd\surd$ Гироскопом называется быстро вращающееся твердое тело, ось вращения которого может изменять свое направление в пространстве.
Все явления, обусловленные быстрым вращением гироскопа, называются гироскопическими. Наибольшее значение для приложений имеют симметричные гироскопы. $\surd\surd$ Симметричным называется гироскоп, обладающий симметрией вращения относительно некоторой оси, называемой геометрической осью, или осью фигуры гироскопа.

Теория гироскопа, даже симметричного, весьма сложна, и мы приведем здесь лишь некоторые элементы теории симметричного гироскопа.

Как правило, одна из точек оси гироскопа закреплена, и ее называют точкой опоры гироскопа. Будем считать точку опоры гироскопа неподвижной.

Для удержания гироскопа свободным обычно используют так называемый карданов подвес. Он состоит из двух колец, внешнее из которых свободно поворачивается вокруг оси, проходящей через острие AA1, а внутреннее - вокруг перпендикулярной ей оси, проходящей через крепления BB1.

Ось CC1 гироскопа опирается на внутреннее кольцо карданова подвеса, что обеспечивает ей возможность свободно поворачиваться в пространстве в любых направлениях.

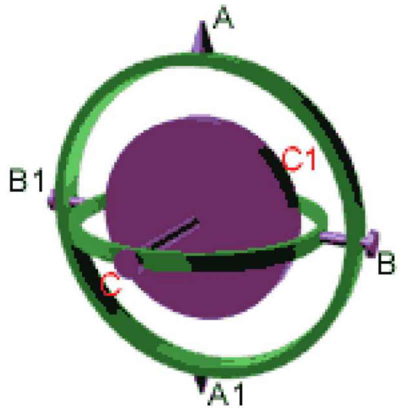

Рис. 27.

Из теоремы Эйлера следует, что движение гироскопа с неподвижной точкой опоры O можно представить как вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через эту точку. Можно показать, что момент импульса гироскопа **L** относительно этой точки и угловая скорость связаны соотношением:

$$\mathbf{L} = I_{\perp}\boldsymbol{\omega}_{\perp} + I_{\parallel}\boldsymbol{\omega}_{\parallel},$$

где $I_{\perp}$ – момент инерции гироскопа относительно оси, перпендикулярной к оси фигуры гироскопа, $I_{\parallel}$ – момент инерции гироскопа относительно оси фигуры гироскопа, $\boldsymbol{\omega}_{\perp}$ и $\boldsymbol{\omega}_{\parallel}$ – составляющие вектора угловой скорости перпендикулярная и параллельная оси фигуры гироскопа соответственно. Видно, что в общем случае направления векторов **L** и $\boldsymbol{\omega}$ не совпадают, за исключением ситуации когда вектор угловой скорости направлен вдоль оси фигуры гироскопа или перпендикулярен ей.

Кинетическая энергия вращающегося гироскопа согласно (41) записывается в виде:

$$K = \frac{I_{\parallel}\omega_{\parallel}^2}{2} + \frac{I_{\perp}\omega_{\perp}^2}{2},$$

т.е. кинетическая энергия вращающегося гироскопа есть сумма кинетических энергий двух вращений: вокруг оси фигуры и оси, ей перпендикулярной.

На практике гироскоп приводят во вращение вокруг оси фигуры, поэтому вращение вокруг перпендикулярной оси, возникающее по разным причинам, оказывается очень медленным. Поэтому направления векторов **L** и $\boldsymbol{\omega}$ практически совпадают между собой и с направлением оси фигуры гироскопа.

Теория гироскопа основана на уравнении

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}, \tag{43}$$

где моменты вычисляются относительно точки опоры гироскопа. Если $\mathbf{M} = 0$, то гироскоп называется свободным. Для него $\dot{\mathbf{L}} = 0$, т.е. выполняется закон сохранения момента импульса:

$$\mathbf{L} = I_\perp \boldsymbol{\omega}_\perp + I_\| \boldsymbol{\omega}_\| = const. \tag{44}$$

Закон сохранения энергии

$$K = \frac{1}{2}\mathbf{L}\boldsymbol{\omega} = \frac{I_\| \omega_\|^2}{2} + \frac{I_\perp \omega_\perp^2}{2} = const \tag{45}$$

Из (44) и (45) следует, что модули векторов $\boldsymbol{\omega}_\|$ и $\boldsymbol{\omega}_\perp$ остаются постоянными при движении свободного гироскопа. Значит, остаются постоянными соответствующие составляющие момента импульса $L_\| = I_\| \omega_\|$ и $L_\perp = I_\perp \omega_\perp$. Отсюда следует постоянство угла между векторами $\mathbf{L}$ и $\boldsymbol{\omega}$ и угла между вектором $\mathbf{L}$ и осью фигуры гироскопа. В результате мы получаем следующую картину движения гироскопа.

В каждый момент времени движение свободного гироскопа есть вращение вокруг мгновенной оси, проходящей через неподвижную точку опоры. С течением времени мгновенная ось и вектор $\mathbf{L}$ меняют свое положение в теле, описывая конусы вокруг оси фигуры гироскопа с одной и той же постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$, не равной $\boldsymbol{\omega}$. Направление вектора $\mathbf{L}$ постоянно в пространстве. Ось фигуры гироскопа и мгновенная ось равномерно вращаются в пространстве вокруг этого направления с той же угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_1$, но в противоположном направлении. Такое движение носит название свободной регулярной прецессии гироскопа.

Наиболее интересным видом движения гироскопа является вынужденная прецессия, возникающая под действием внешних сил. В этом случае $M \neq 0$. Рассмотрим тяжелый гироскоп, у которого центр масс смещен на расстояние d от точки закрепления и роль внешней силы будет играть сила тяжести. Сообщим гироскопу быстрое вращение вокруг его оси (см. рис. 28). В приближенной теории гироскопа пренебрегают возникающим вращением вокруг перпендикулярной оси и полагают

$$\mathbf{L} \approx I_\| \boldsymbol{\omega}_\| \approx I_\| \boldsymbol{\omega}.$$

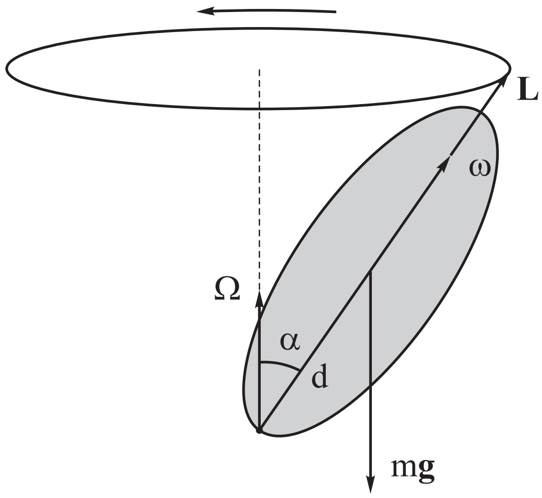

Рис. 28.

В таком приближении вектора $\mathbf{L}$ и $\boldsymbol{\omega}$ совпадают по направлению между собой и осью фигуры гироскопа. Об изменении направления оси вращения тогда можно судить по изменению направления вектора $\mathbf{L}$, который подчиняется уравнению моментов (43). Т.к. точка приложения внешней силы лежит на оси фигуры гироскопа, то она не может изменить угловую скорость его вращения и, следовательно, момент импульса $\mathbf{L}$. Т.е. такая внешняя сила может изменить только направление $\mathbf{L}$. Поэтому вектор $\mathbf{L}$ вместе с осью фигуры гироскопа будет совершать равномерное вращение вокруг вертикальной оси – вынужденная прецессия гироскопа. Вектор угловой скорости этой прецессии $\boldsymbol{\Omega}$ будет направлено вертикально. Если мы будем для удобства интерпретации рассматривать вектор $\mathbf{L}$, как радиус-вектор, то $\dot{\mathbf{L}}$ – скорость конца радиус-вектора. Тогда мы можем написать $\dot{\mathbf{L}} = [\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}]$ и из (43)

$$[\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}] = \mathbf{M}.$$

Отсюда находим угловую скорость прецессии

$$\Omega = \frac{mgd\sin\alpha}{I\omega\sin\alpha} = \frac{mgd}{I\omega}.$$

7 Движение относительно неинерциальных систем отсчета

7.1 Ускоренное поступательное движение системы отсчета

В инерциальной системе отсчета (ИСО) II закон Ньютона:

$$m\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{F}, \tag{46}$$

где $\mathbf{a}_{абс}$ – ускорение точки относительно ИСО. Получим уравнения движения материальной точки в неинерциальной системе отсчета (НИСО). Для этого надо выяснить, как преобразуются силы и ускорения при переходе ИСО→НИСО. С точки зрения классической (нерелятивисткой) физики переход от одной к другой произвольно движущейся СО основан на следующем постулате: расстояния и промежутки времени инвариантны по отношению к переходу от одной системы отсчета к любой другой, произвольно движущейся системе отсчета. Будем называть неподвижной какую-нибудь выбранную ИСО. Движение относительно этой ИСО будем называть абсолютным. Если тело будет покоиться относительно какой-нибудь движущейся СО и при этом оно очевидно будет двигаться относительно нашей неподвижной СО, то такое движение тела называется переносным.

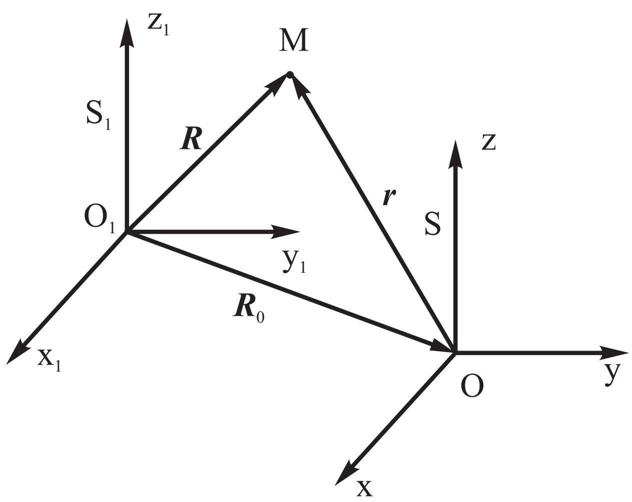

Рис. 29.

Рассмотрим две СО: S_1 – неподвижная, S – движущаяся система отсчета (см. рис. 29). Пусть $\mathbf{R}_O$ – радиус-вектор начала движущейся СО, $\mathbf{R}$ – радиус-вектор произвольной точки М в неподвижной СО S_1, $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки М в движущейся СО S. Тогда из рисунка $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + \mathbf{r}$, продифференцируем это равенство по времени:

$$\dot{\mathbf{R}} = \dot{\mathbf{R}}_0 + \dot{\mathbf{r}} \tag{47}$$

$$\ddot{\mathbf{R}} = \ddot{\mathbf{R}}_0 + \ddot{\mathbf{r}} \tag{48}$$

Начнем с простого случая поступательного движения СО. Производные по времени в (47) и (48) будут иметь следующий смысл:
$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v}_{абс}$ – абсолютная скорость точки М,
$\dot{\mathbf{R}}_0 = \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_{пер}$ — переносная скорость системы S,
$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_{отн}$ – относительная скорость точки М,
$\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{a}_{абс}$ – абсолютное ускорение точки М,
$\ddot{\mathbf{R}}_0 = \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_{пер}$ — переносное ускорение системы S,
$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{a}_{отн}$ – относительное ускорение точки М.

Таким образом, из (47) и (48) получаем связь между скоростями и ускорениями:

$$\mathbf{v}_{\text{абс}} = \mathbf{v}_{\text{пер}} + \mathbf{v}_{\text{отн}}\,, \tag{49}$$

$$\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{a}_{\text{пер}} + \mathbf{a}_{\text{отн}}\,. \tag{50}$$

Подставим (50) во второй закон Ньютона (46):

$$m\mathbf{a}_{\text{отн}} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_0 \tag{51}$$

Последнее выражение — II закон Ньютона в НИСО. Сила $\mathbf{F}$ - есть “настоящая” сила в смысле механики Ньютона, она зависит только от разностей координат и разностей скоростей материальных точек, так что она инвариантна относительно перехода в НИСО. Второе слагаемое в (51) возникает из-за ускоренного движения НИСО и называется поступательной силой инерции: $\mathbf{F}_{\text{ин}} = -m\mathbf{a}_0$.

7.2 Ускоренное произвольное движение системы отсчета

Пусть теперь СО S движется относительно S_1 произвольно. В каждый момент времени это произвольное движение мы можем представить как сумму поступательного движения начала СО S со скоростью $\mathbf{v}_0$ и вращательного движения вокруг мгновенной оси, проходящей через начало движущейся СО, с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$. В этом случае радиус-вектор точки в S и его производная по времени имеют вид:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\,, \tag{52}$$

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} + x\dot{\mathbf{i}} + y\dot{\mathbf{j}} + z\dot{\mathbf{k}}\,. \tag{53}$$

Единичные вектора СО S остаются постоянными по модулю, но меняют направление вследствие вращения СО. Производные единичных векторов вычисляются по общему правилу:

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{i}], \quad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{j}], \quad \frac{d\mathbf{k}}{dt} = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{k}]. \tag{54}$$

Подставляя (54) в (53), получаем:

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_{\text{отн}} + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}].$$

Для абсолютной скорости с учетом $\mathbf{v}_{\text{пер}} = \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]$:

$$\mathbf{v}_{\text{абс}} = \mathbf{v}_{\text{отн}} + \mathbf{v}_{\text{пер}} = \mathbf{v}_{\text{отн}} + \mathbf{v}_0 + [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}].$$

Дифференцируя последнее равенство по времени, находим:

$$\mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{a}_{\text{отн}} + 2[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}}] + \dot{\mathbf{v}}_0 + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]] + [\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}]\,,$$

$$\text{или} \quad \mathbf{a}_{\text{абс}} = \mathbf{a}_{\text{отн}} + \mathbf{a}_{\text{кор}} + \mathbf{a}_{\text{пер}}, \tag{55}$$

где

$$\mathbf{a}_{\text{кор}} = 2[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}}]\,, \tag{56}$$

$$\mathbf{a}_{\text{пер}} = \dot{\mathbf{v}}_0 + [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]] + [\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}]. \tag{57}$$

$\mathbf{a}_{\text{отн}}$ – ускорение точки относительно СО S. $\mathbf{a}_{\text{пер}}$ зависит только от движения системы отсчета S относительно S_1, т.е. такое ускорение испытывала бы точка, если бы она покоилась в системе отсчета S, и это ускорение называется переносным ускорением. $\mathbf{a}_{\text{кор}}$ зависит как от относительного, так и переносного движения и называется кориолисовым ускорением. Теорема Кориолиса: абсолютное ускорение является векторной суммой относительного, кориолисова и переносного ускорений.

Второй закон Ньютона в случае произвольного движения системы отсчета S запишется следующим образом:

$$m\mathbf{a}_{\text{отн}} = \mathbf{F} - m\mathbf{a}_{\text{кор}} - m\mathbf{a}_{\text{пер}}\,.$$

Т.о. возникли две силы инерции – кориолисова сила

$$\mathbf{F}_{\text{кор}} = -m\mathbf{a}_{\text{кор}} = 2m[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{отн}}]$$

и переносная сила инерции:

$$\mathbf{F}_{\text{пер}} = -m\dot{\mathbf{v}}_0 - m[\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]] - m[\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}]. \tag{58}$$

Второе слагаемое в (58) можно преобразовать, если представить $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\shortparallel} + \mathbf{r}_{\perp}$ — сумма параллельной и перпендикулярной к оси вращения составляющих, с учетом $[\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\shortparallel}] = 0$:

$$[\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}]] = [\boldsymbol{\omega} \times [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{\perp}]] = -\omega^2 \mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{a}_{\text{цс}}$$

Таким образом, первое слагаемое в (58) есть поступательная сила инерции, возникающая из-за ускоренного поступательного движения СО, второе слагаемое называется центробежной силой инерции и возникает из-за вращения СО. Последнее слагаемое обусловлено неравномерностью вращения СО и не имеет специального названия.

Кориолисова сила инерции возникает только тогда, когда система отсчета S вращается, а материальная точка движется относительно этой системы. Кориолисова сила всегда перпендикулярна относительной скорости.

7.3 Движение в гравитационном поле Земли с учетом ее вращения

Для материальной точки в СО, связанной с Землей, второй закон Ньютона будет иметь вид:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_з + m\omega^2\mathbf{r}_\perp + 2m[\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}] + \mathbf{F} + \mathbf{F}_0 - m\dot{\mathbf{v}}_0$$

Здесь $\mathbf{F}_з$ – сила гравитационного притяжения со стороны Земли; $\mathbf{F}_0$ – сила гравитационного притяжения со стороны Луны, Солнца, других планет; $\mathbf{F}$ – равнодействующая остальных сил, действующих на материальную точку; $\mathbf{a}$ – ускорение материальной точки, т.е. относительное ускорение; $\mathbf{v}_0$ – скорость центра Земли; $\boldsymbol{\omega}$ – угловая скорость вращения Земли; $\mathbf{v}$ – скорость материальной точки, т.е. относительная скорость.

Воспользуемся обобщенным законом Галилея: гравитационное поле всем телам сообщает одно и тоже ускорение, независимо от массы тела. Считая гравитационные поля Солнца, Луны и других планет вблизи Земли приблизительно однородными, мы получаем, что $\mathbf{F}_0 = m\dot{\mathbf{v}}_0$. Если обозначить

$$m\mathbf{g} = \mathbf{F}_з + m\omega^2\mathbf{r}_\perp\,,$$

то уравнение движения материальной точки примет вид

$$m\mathbf{a} = m\mathbf{g} + 2m[\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}] + \mathbf{F}\,. \tag{59}$$

Из (59) следует физический смысл вектора $\mathbf{g}$ – ускорение свободно падающего тела относительно Земли ($\mathbf{F} = 0$) при условии, что его скорость в рассматриваемый момент равна нулю.

8 Гармонические колебания

8.1 Кинематическая модель гармонических колебаний

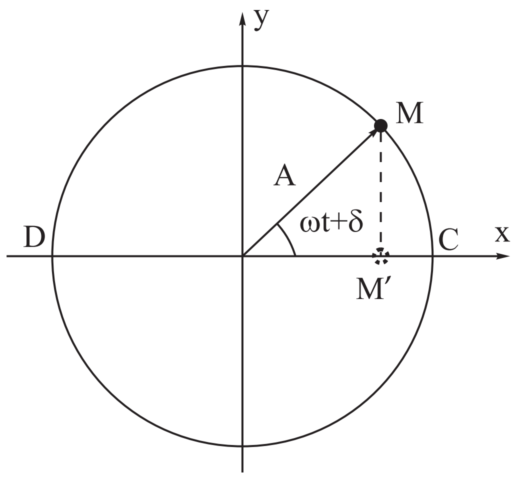

Рис. 30.

Лучшей наглядной иллюстрацией гармонических колебаний материальной точки является следующая модель. Пусть точка M равномерно (с постоянной угловой скоростью ω) вращается по окружности радиуса A (см. рис. 30). Ее проекция на ось x – точка M' будет совершать колебательное движение от C к D. Найдем закон изменения координаты x точки M и M'. Пусть в начальный момент ($t = 0$) радиус, проведенный в точку M, составлял с осью x угол δ. Тогда в произвольный момент времени t этот угол будет равен $\omega t + \delta$, следовательно (см. рис. 30)

$$x = A\cos(\omega t + \delta) \tag{60}$$

Закон (60) – закон гармонических колебаний. В нем величина A называется амплитудой колебаний, $\omega t + \delta$ – фазой колебаний, δ – начальной фазой колебаний. Период колебаний находится по формуле $T = 2\pi/\omega$. Скорость колеблющейся точки M' находится дифференцированием по времени (60):

$$v = \dot{x} = -wA\sin(\omega t + \delta)$$

Ускорение колеблющейся точки M'

$$a = \ddot{x} = -w^2 A\cos(\omega t + \delta) \tag{61}$$

Сравнивая (60) с (61), получаем:

$$a = -\omega^2 x \tag{62}$$

или

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{63}$$

Получившееся дифференциальное уравнение (63)– уравнение гармонических колебаний. Из (62) мы можем формально найти силу, которая вызывает гармонические колебания точки

$$F = ma = -m\omega^2 x.$$

Как видно, она пропорциональна отклонению x от положения равновесия и направлена к положению равновесия.

8.2 Гармонические колебания груза на пружине

Уравнение движения тела

$$m\ddot{x} = -kx, \tag{64}$$

с учетом силы тяжести

$$m\ddot{X} = -kX + mg.$$

Обозначая $kX_0 = mg$, получим

$$m\ddot{X} = -kX + mg = -kX + kX_0 = -k(X - X_0).$$

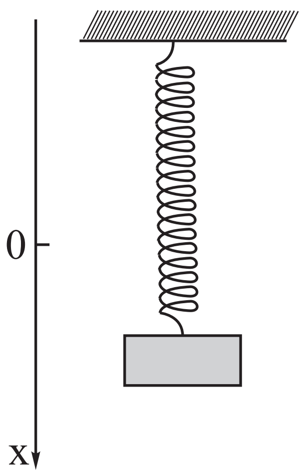

Рис. 31.

Переходя к новым координатам по формуле $x = X - X_0$, приходим к уравнению (64).

Сравнивая уравнение (64) с (63), находим

$$\omega^2 = \frac{k}{m}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Период колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{65}$$

Энергия колеблющегося тела $E = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}}$

$$E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2. \tag{66}$$

□ **Упражнение** Получить выражения

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{4}kA^2(1 - \cos 2(\omega t + \delta)) \tag{67}$$

$$E_{\text{пот}} = \frac{1}{4}kA^2(1 + \cos 2(\omega t + \delta)) \tag{68}$$

для кинетической и потенциальной энергий колеблющегося тела.

Из формул (67) и (68) очевидно, что полная энергия колеблющегося тела равна:

$$E = \frac{1}{2}kA^2. \tag{69}$$

Для колебаний произвольной механической системы с одной степенью свободы:

$$E_{\text{пот}} = \frac{1}{2}\alpha q^2, \qquad E_{\text{кин}} = \frac{1}{2}\beta\dot{q}^2,$$

где α и β – положительные постоянные, определяемые параметрами системы.

Закон сохранения энергии

$$E = \frac{1}{2}\alpha q^2 + \frac{1}{2}\beta\dot{q}^2$$

полностью аналогичен (66). Оба этих соотношения можно рассматривать как уравнения колебаний. Решение последнего

$$q = q_0\cos(\omega t + \delta),$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

8.3 Физический маятник

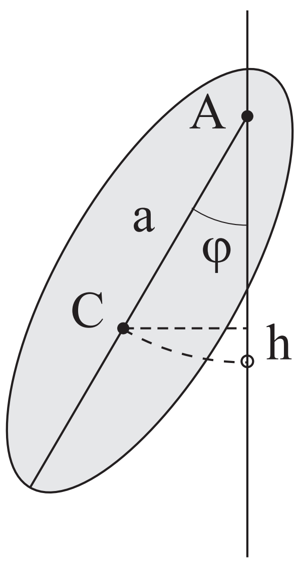

Рис. 32.

√ Физическим маятником называется твердое тело, которое может качаться вокруг неподвижной горизонтальной оси. Точка пересечения оси с вертикальной плоскостью, проходящей через центр масс маятника, называется точкой подвеса маятника.

Кинетическая энергия качающегося маятника

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2.$$

Здесь I – момент инерции маятника относительно оси А.

Потенциальная энергия $E_{\text{пот}} = mgh$, где h – высота поднятия центра масс над самым нижним положением. Если a – расстояние между центром масс C и точкой подвеса A, то

$$E_{\text{пот}} = mg\mathrm{a}(1 - \cos\varphi) = 2mga\sin^2(\varphi/2).$$

Для малых колебаний $\sin(\varphi/2) \approx \varphi/2$, тогда

$$E_{\text{пот}} = \frac{1}{2}mga\varphi^2.$$

Таким образом, для физического маятника

$$\alpha = mga, \qquad \beta = I.$$

Колебания физического маятника будут приблизительно гармоническими с циклической частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{I}}$$

и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}}.$$

$\surd$ Если период колебаний не зависит от амплитуды, то такие колебания называются изохронными. Малые колебания физического маятника ($\varphi \lesssim 1^\circ \div 3^\circ$) изохронны.

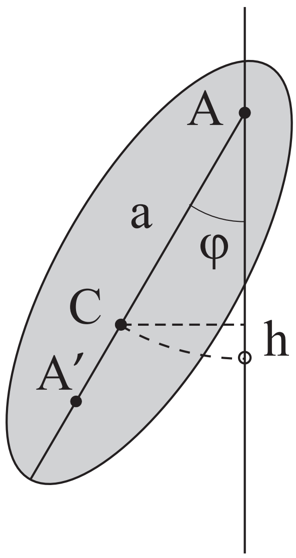

Рис. 33.

$\surd$ Маятник, вся масса которого сосредоточена в одной точке, называется математическим. Пример: шарик на длинной нити. В этом случае $a = l$, $I = ml^2$ и

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Очевидно, что физический маятник колеблется также как и математический с длиной

$$l = \frac{I}{ma}.$$

$\surd$ l называется приведенной длиной физического маятника. Пусть $AA' = l$, тогда A' – центр качания.

$\surd$ Центр качания – математическая точка, в которой можно сосредоточить всю массу физического маятника, при этом его период не изменится. По теореме Штейнера $I = I_c + ma^2$. Тогда

$$l = \frac{I}{ma} = a + \frac{I_c}{ma}.$$

Следствия:

1) точка подвеса и центр качания лежат по разные стороны от центра масс;

2) всем точкам подвеса, одинаково удаленным от центра масс маятника, соответствует одна и та же приведенная длина, и соответственно, один и тот же период колебаний.

$\surd\surd$ Теорема Гюйгенса: если маятник подвесить за центр качания, то период его колебаний не изменится, и прежняя точка подвеса сделается новым центром качания.

□ **Упражнение** Доказать теорему Гюйгенса.

9 Механика упругих тел

Определения:

Деформация – изменение формы или объема тела под действием приложенной силы.

Упругие деформации – деформации, исчезающие после прекращения действия вызвавшей их силы.

Пластические (остаточные) деформации – деформации, которые сохраняются в теле после прекращения действия внешних сил.

Идеально упругие тела – тела, которые могут претерпевать только упругие деформации. Для идеально упругих тел существует однозначная зависимость между действующими силами и вызываемыми ими деформациями.

Твердые тела разделяются на изотропные и анизотропные. Изотропными называются тела, свойства которых одинаковы оп всем направлениям. Анизотропными называются тела, свойства которых в разных направлениях различны.

9.1 Упругие напряжения

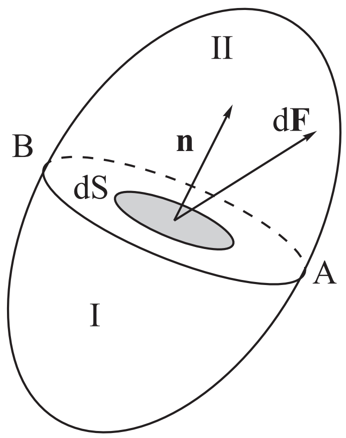

Рис. 34.

Рассмотрим деформированное тело и мысленно разделим его на две части: I и II. Рассмотрим, как силы взаимодействия между частями I и II распределены по сечению AB.

$d\mathbf{F}$ – сила, с которой на площадке $d\mathbf{S}$ тело II действует на тело I.
Сила, отнесенная к единице площади,

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{d\mathbf{F}}{dS}$$

называется напряжением, действующим в соответствующей точке на границе AB тела I. Напряжение, действующее в той же точке на границе тела II, будет таким же, но противоположно направленным.

9.2 Растяжение и сжатие стержней

Для стержня

$$\sigma = \frac{F}{S},$$

где F – сила, действующая в поперечном сечении стержня.

Если l_0 – длина недеформированного стержня, l – текущая длина, $\Delta l = l - l_0$ – удлинение стержня, то отношение

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

называется относительным удлинением стержня.

Для не слишком больших упругих деформаций напряжение пропорционально относительному удлинению (закон Гука):

$$\sigma = E\frac{\Delta l}{l},$$

где E – постоянная, зависящая только от материала стержня и его физического состояния – называется модуль Юнга.

Под действием растягивающей или сжимающей силы F изменяются не только продольные, но и поперечные размеры стержня. Если сила F

– растягивающая, то поперечные размеры стержня уменьшаются, если сжимающая, то увеличиваются. Относительное поперечное сжатие

$$\delta = -\frac{\Delta a}{a_0} \approx -\frac{\Delta a}{a}$$

Коэффициент Пуассона

$$\mu = \frac{\delta}{\varepsilon} = -\frac{\Delta a}{\Delta l} \cdot \frac{l}{a}.$$

Коэффициент Пуассона зависит только от материала тела. Модуль Юнга E и коэффициент Пуассона μ полностью характеризуют упругие свойства изотропного материала. Все прочие упругие постоянные могут быть выражены через E и μ.

Потенциальная энергия растянутого стержня (пружины)

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2.$$

Так как $F = k\Delta l$, то $U = \dfrac{1}{2}F\Delta l$. Объемная плотность упругой энергии:

$$u = \frac{U}{V} = \frac{U}{Sl} = \frac{F\Delta l}{2Sl} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon.$$

С учетом закона Гука $\sigma = E\varepsilon$:

$$u = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2E}.$$

9.3 Сдвиг

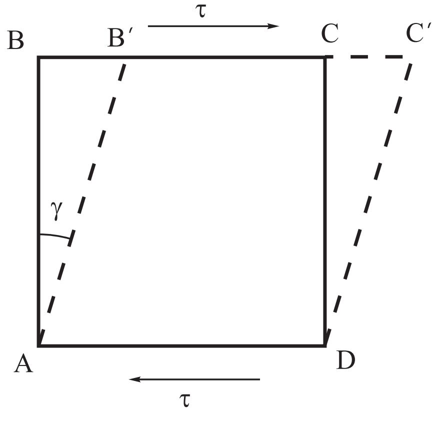

Рис. 35.

Прикладывая к противоположным граням куба равные и противоположно направленные силы, деформируем куб (см. рис. 35.) Получившаяся деформация называется деформацией сдвига. При деформации сдвига все слои куба, параллельные основанию AD, сдвигаются в одном направлении, параллельном этому же основанию, γ – угол сдвига.

Закон Гука для деформации сдвига

$$\tau = G\gamma,$$

τ – касательное напряжение, G – модуль сдвига.

Найдем выражение для плотности упругой энергии при деформации сдвига. Основание AD закрепим неподвижно, будем производить сдвиг квазистатически – вся работа, затрачиваемая на сдвиг, пойдет на увеличение упругой энергии тела.

$$A = \frac{1}{2}F\Delta x = \frac{1}{2}\tau S\Delta x = \frac{1}{2}\tau Sa\gamma = \frac{1}{2}V\tau\gamma,$$

где $\Delta x = a\gamma$, a – сторона куба, $V = aS$ – объем куба, S – площадь грани куба.

Плотность упругой энергии

$$u = \frac{U}{V} = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{\tau^2}{2G}.$$

9.4 Скорость распространения возмущений в стержнях

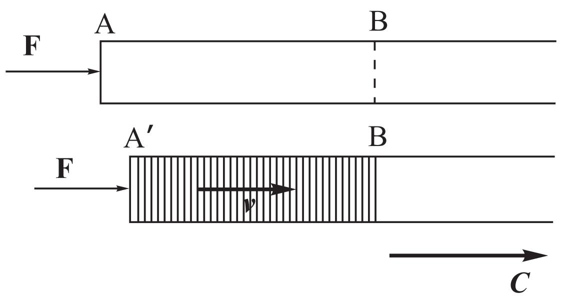

Рис. 36.

Пусть к свободному концу стержня в некоторый момент приложена сила **F**. Вычислим скорость распространения малых продольных возмущений, возникших под действием этой силы. Будем считать, что в возмущенной области стержня все вещество в любой момент времени t (отсчет с момента начала действия силы) движется с постоянной скоростью **v**, а сам стержень в этой области деформирован одинаково. Пусть m – масса деформированной части стержня в момент t, Тогда мы может записать

$$d(mv) = Fdt.$$

За время t возмущение проходит путь $l = ct$, поэтому $m = \rho Sct$. С учетом $F = \sigma S$, получаем

$$\sigma = \rho cv. \tag{70}$$

Так как $\sigma = E\varepsilon$, $\Delta l = vt$, то

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{v}{c},$$

$$\sigma = E\frac{v}{c}. \tag{71}$$

Из (70) и (71) находим

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

9.5 Скорость распространения продольных и поперечных возмущений в неограниченной среде

В неограниченной среде при распространении продольных возмущений частицы среды не испытывают боковых смещений, в отличие от распространения возмущения в стержне. В этом случае необходимо модуль Юнга заменить модулем одностороннего растяжения E', который следующим образом выражается через E и μ:

$$E' = E\frac{1-\mu}{1-\mu-2\mu^2}.$$

Тогда для скорости распространения продольных возмущений

$$c_{\parallel} = \sqrt{\frac{E'}{\rho}}.$$

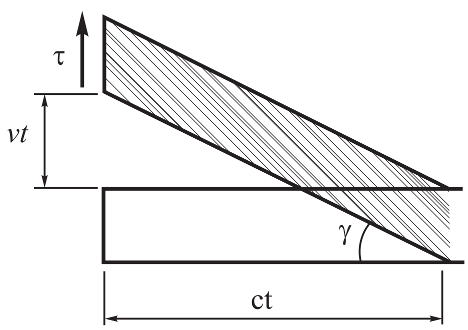

Рис. 37.

$\surd$ Поперечные возмущения – возмущения, в которых частицы среды смещаются перпендикулярно к направлению распространения возмущения.

Мысленно выделим в среде произвольный “стержень”, ось которого параллельна направлению распространения возмущения. Если к основанию этого “стержня” в начальный момент приложить постоянное касательное напряжение τ, то в стержне возникнет деформация сдвига, скорость ее распространения $c_\perp$. Рассуждая также как и в п. 9.4 приходим к формуле, аналогичной (70):

$$\tau = \rho c_\perp v. \tag{72}$$

Здесь $\tau = G\gamma$, γ – угол сдвига. За произвольное время t свободный конец стержня перемещается на расстояние vt, а возмущение распространяется на расстояние $c_\perp t$. Так как $v \ll c_\perp$, то

$$\gamma = \frac{vt}{c_\perp t} = \frac{v}{c_\perp}.$$

Из последнего соотношения и (72) получаем

$$c_\perp = \sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

10 Механика жидкостей и газов

10.1 Общие определения

$\surd$ Раздел механики, занимающийся изучением движения и равновесия жидкостей, называется гидродинамикой. Газ рассматривается как частный случай жидкости.

$\surd$ В отличие от твердых тел жидкости и газы не обладают упругостью формы, а только объемной упругостью.

$\surd$ В состоянии равновесия напряжение в жидкости и газе всегда нормально к площадке, на которую оно действует, и не зависит от ее ориентации.

$\surd$ Жидкости и газы могут быть определены как такие среды, в которых в состоянии равновесия касательные напряжения существовать не могут.

10.2 Основное уравнение движения жидкости

$\surd$ Объемная плотность массовых сил

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{F}}{dV}. \tag{73}$$

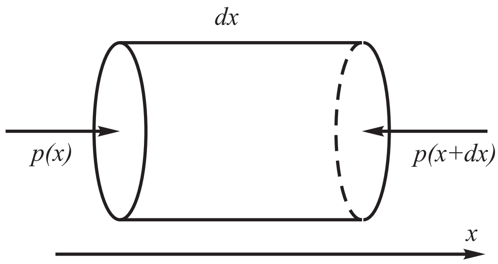

Рис. 38.

Определим равнодействующую сил давления, действующих на бесконечно малый элемент объема жидкости dV. Возьмем в качестве элемента объема dV бесконечно малый цилиндр с площадью основания dS и высотой dx. Если обозначить $\mathbf{s}$ – объемная плотность сил давления, то

$$s_x dV = p(x)dS - p(x+dx)dS = -(p(x+dx) - p(x))dS =$$
$$= -\frac{\partial p}{\partial x}dxdS = -\frac{\partial p}{\partial x}dV\,.$$

Отсюда,

$$s_x = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Аналогично,

$$s_y = -\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad s_z = -\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{s} = -\frac{\partial p}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial p}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial p}{\partial z}\mathbf{k}\,,$$

или

$$\mathbf{s} = -\operatorname{grad} p.$$

Объемная плотность результирующей сил давления, действующих на элементы объема жидкости, равна градиенту давления, взятому с противоположным знаком. В состоянии равновесия сила $\mathbf{s}$ должна уравновешиваться массовой силой $\mathbf{s} = -\mathbf{f}$, или

$$\operatorname{grad} p = \mathbf{f}. \tag{74}$$

Полученное уравнение — основное уравнение гидростатики. Из него следует, что при равновесии жидкости сила $\mathbf{f}$ должна выражаться градиентом однозначной скалярной функции, т.е. сила $\mathbf{f}$ должна быть консервативной. Таким образом, для равновесия жидкости необходимо, чтобы силовое поле, в котором она находится, было консервативным. В неконсервативных силовых полях равновесие невозможно.

Получим основное уравнение гидродинамики. Для этого запишем уравнение движения $m\mathbf{a} = \sum \mathbf{F}$, для элемента объема dV

$$\rho dV\mathbf{a} = \mathbf{f}dV + \mathbf{s}dV.$$

В результате получаем

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{f} - \operatorname{grad} p. \tag{75}$$

$\surd$ Уравнение (75) – уравнение Эйлера.

10.3 Применение основного уравнения движения жидкости

1. Отсутствие внешних (массовых) сил.

Тогда $f = 0$, и

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Таким образом, если нет внешних (массовых) сил, то при равновесии давление во всех точках жидкости одинаково (закон Паскаля). Следствия:
– при отсутствии массовых сил жидкость может находиться в равновесии только тогда, когда внешнее давление на ее поверхность во всех точках одинаково;
– при отсутствии массовых сил одинаковое давление на поверхность жидкости вызывает такое же давление во всех точках ее объема.

2. Жидкость в поле тяжести.

В этом случае $\mathbf{f} = \rho\mathbf{g}$ и основное уравнение гидростатики в скалярном виде

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

Отсюда, для однородной и несжимаемой ($\rho = const$) жидкости

$$p = p_0 - \rho g z.$$

3. Закон Архимеда.

Если тело, погруженное в жидкость, удерживается в механическом равновесии, то со стороны окружающей жидкости оно подвергается выталкивающей силе гидростатического давления, численно равной весу жидкости в объеме, вытесненном телом. Эта выталкивающая сила направлена вертикально вверх и приложена в центре масс жидкости, вытесненной телом

$$F_a = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{пчт}}.$$

4. Жидкость в сосуде, равномерно вращающемся вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω.

Будем считать, что жидкость вращается вместе с сосудом и сосуд имеет осевую симметрию. Перейдем во вращающуюся систему отсчета. Тогда

$$\mathbf{f} = \rho\mathbf{g} + \rho\omega^2\mathbf{r}.$$

Из (74) получаем

$$\operatorname{grad} p = \rho\mathbf{g} + \rho\omega^2\mathbf{r}$$

или по компонентам

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\omega^2 x, \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho\omega^2 y, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g.$$

Интегрируем и получаем

$$p = \frac{1}{2}\rho\omega^2(x^2+y^2) - \rho g z + p_0$$

или

$$p = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z + p_0.$$

Уравнение свободной поверхности $p = const$

$$\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2) - gz = const.$$

Полученное уравнение описывает параболоид вращения. Если начало координат поместить в вершину параболоида, то p_0 – атмосферное давление, а уравнение свободной поверхности жидкости будет иметь вид:

$$\frac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2) = gz.$$

10.4 Кинематическое описание движения жидкости

Два подхода к описанию движения жидкости:
– рассматривать движение каждой конкретной частицы жидкости, найти положение и скорость каждой частицы жидкости, в результате будут

найдены траектории всех частиц жидкости;
– рассматривать, что происходит с течением времени в каждой точке пространства. Т.е., найти скорость различных частиц жидкости, которые в различные моменты времени проходят через одну и ту же точку пространства.

В последнем случае, если зафиксировать время t и рассмотреть все точки пространства, то получится мгновенная картина распределения скоростей жидкости. Т.е. в каждой точке пространства, занятой жидкостью, будет задано значение вектора скорости, мы получаем векторное поле — поле скоростей.

√ Линия, касательная к которой указывает направление скорости частицы жидкости, проходящей в данный момент времени через точку касания, называется линией тока.
√ Если поле скоростей (и линий тока) не меняются с течением времени, то такое движение жидкости называется стационарным или установившимся.

Таким образом, в стационарном случае $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$ $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Только при стационарном течении линии тока совпадают с траекториями частиц жидкости.

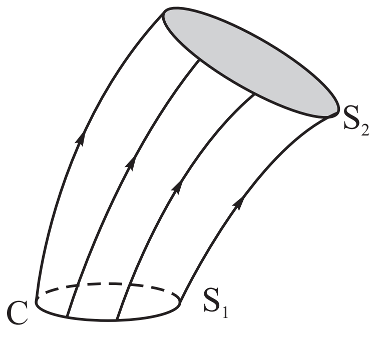

Рис. 39.

Возьмем произвольный замкнутый контур C и через каждую его точку в данный момент времени проведем линии тока. Они все будут лежать на поверхности, которая называется трубкой тока. Скорости частиц жидкости направлены по касательным к линиям тока, поэтому при течении жидкость не может пересекать боковую поверхность трубки тока.

Для трубки тока, чье поперечное сечение бесконечно мало, можно считать, что скорость жидкости одна и та же во всех точках поперечного сечения. Масса жидкости, протекающая за время dt через поперечное сечение трубки S равна $dm = \rho v S dt$. Для сечений S_1 и S_2:

$$dm_1 = dm_2 \quad \Rightarrow \quad \rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2$$

Для несжимаемой жидкости $\rho_1 = \rho_2$:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{S_2}{S_1}.$$

Т.о., скорость жидкости в одной и той же трубке тока тем больше, чем у́же поперечное сечение трубки.

10.5 Стационарное движение идеальной жидкости.

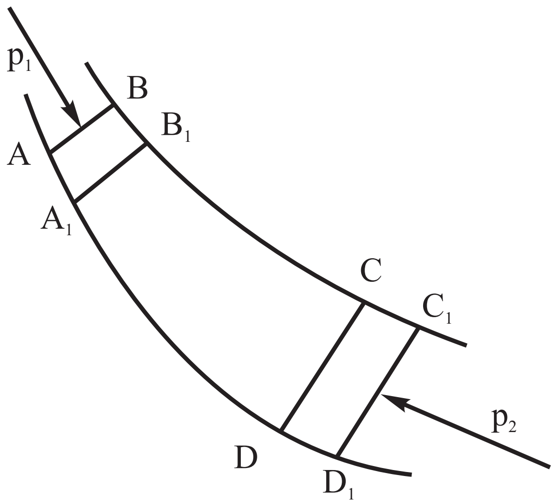

Рис. 40.

$\surd$ Идеальная жидкость — жидкость, в которой при любых движениях не возникают касательные и нормальные силы внутреннего трения. Будем рассматривать стационарное течение идеальной жидкости в консервативном силовом поле.

Выделим бесконечно узкую трубку тока и рассмотрим часть жидкости, занимающую объем $ABCD$. Эта часть перемещается в бесконечно близкое положение $A_1B_1C_1D_1$. Найдем работу, совершаемую при этом силами давления

$$A = p_1S_1l_1 - p_2S_2l_2 = p_1\Delta V_1 - p_2\Delta V_2 = \\ = p_1\frac{\Delta m}{\rho_1} - p_2\frac{\Delta m}{\rho_2} = \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right)\Delta m.$$

Эта работа должна быть равна приращению полной энергии рассматриваемой части жидкости

$$A = \Delta E. \tag{76}$$

Так как энергия жидкости в объеме A_1B_1CD не изменяется, то надо рассмотреть изменение энергии жидкости массой Δm в положениях ABB_1A_1 и DCC_1D_1. Пусть ε – энергия единицы массы жидкости. Тогда

$$\Delta E = \varepsilon_2\Delta m - \varepsilon_1\Delta m = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\Delta m.$$

С учетом (76) получаем

$$(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\Delta m = \left(\frac{p_1}{\rho_1} - \frac{p_2}{\rho_2}\right)\Delta m.$$

Отсюда,

$$\varepsilon_1 + \frac{p_1}{\rho_1} = \varepsilon_2 + \frac{p_2}{\rho_2}.$$

Таким образом, мы доказали, что при стационарном течении идеальной жидкости вдоль одной и той же линии тока остается постоянной величина $\varepsilon + p/\rho$, т.е.

$$\varepsilon + \frac{p}{\rho} = const. \tag{77}$$

Полученное соотношение – уравнение Бернулли. Для несжимаемой жидкости в поле тяжести

$$\varepsilon = \frac{v^2}{2} + gh. \tag{78}$$

В этом случае уравнение Бернулли будет иметь вид

$$\frac{v^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} = const. \tag{79}$$

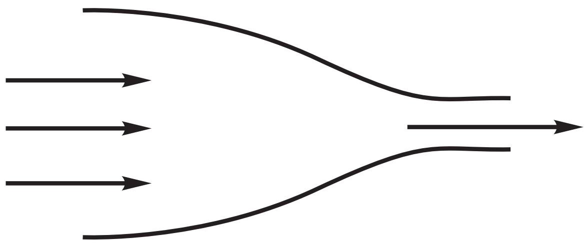

Рис. 41.

Рассмотрим частный случай, когда ось трубки тока горизонтальна. Уравнение Бернулли будет иметь вид

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = const.$$

Отсюда видно, что давление жидкости больше там, где скорость меньше, и наоборот.

Рассмотрим истечение идеальной жидкости через малое отверстие в боковой стенке или на дне широкого сосуда. Применим уравнение Бернулли к линии тока АВ

$$gh + \frac{p_0}{\rho} = \frac{v^2}{2} + \frac{p_0}{\rho},$$

где p_0 – атмосферное давление. Отсюда получаем формулу Торричелли

$$v = \sqrt{2gh}.$$

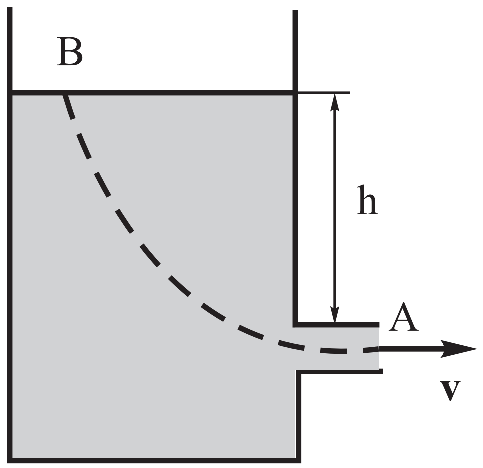

Рис. 42.

Найдем силу, действующую на сосуд со стороны вытекающей струи. Для этого воспользуемся вторым законом Ньютона $F\Delta t = \Delta p$. Изменение импульса воды за время Δt

$$\Delta p = \Delta m v = \rho \Delta V v = \rho v \Delta t S v = \rho v^2 S \Delta t.$$

Тогда

$$F = \rho v^2 S.$$

С учетом формулы Торричелли

$$F = 2\rho g h S.$$

Список литературы

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики : в 5 т. / Д.В. Сивухин. – М. : Физматлит, 2002. – Т.1 : Механика. – 560 с.

2. Черноуцан А.И. Краткий курс физики / А.И. Черноуцан. – М. : Физматлит, 2002. – 319 с.

3. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности / А. Н. Матвеев. – М. : Оникс 21 век : Мир и образование, 2003. – 431 с.

4. Иродов И.Е. Механика : основные законы / И.Е. Иродов. – М. : Лаборатория базовых знаний, 2003. – 309 с.

5. Савельев И.В. Курс общей физики : в 5 кн./ И.В. Савельев. – М. : Астрель, 2003. – Кн. 1 : Механика. – 336 с.

Учебное издание

Крыловецкий Александр Абрамович

ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ
ЧАСТЬ 1. МЕХАНИКА

Учебное пособие для вузов

Редактор Воронина А.П.