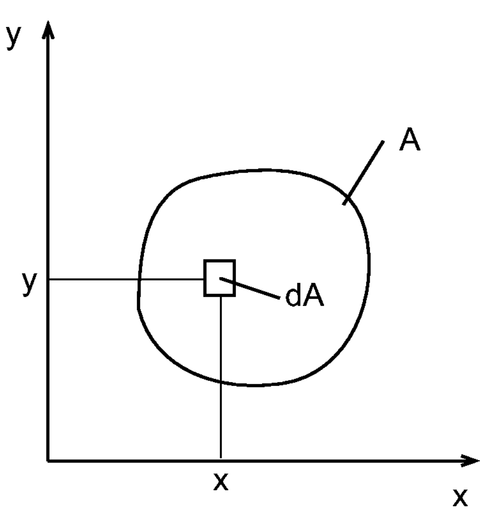
Лекция 7

Геометрические характеристики плоских фигур

1) Площадь

$$A = \int_A dA \qquad [\text{м}]^2 > 0$$



2) Статические моменты площади

$$S_x = \int_A y dA \qquad [\text{м}]^3$$

$$S_y = \int_A x dA \qquad [\text{м}]^3$$

Статические моменты могут быть как положительными, так и отрицательными.
Ось, относительно которой статический момент равен нулю, называется центральной осью

3) Моменты инерции
осевые:

$$I_x = \int_A y^2 dA \qquad [\text{м}]^4 > 0$$

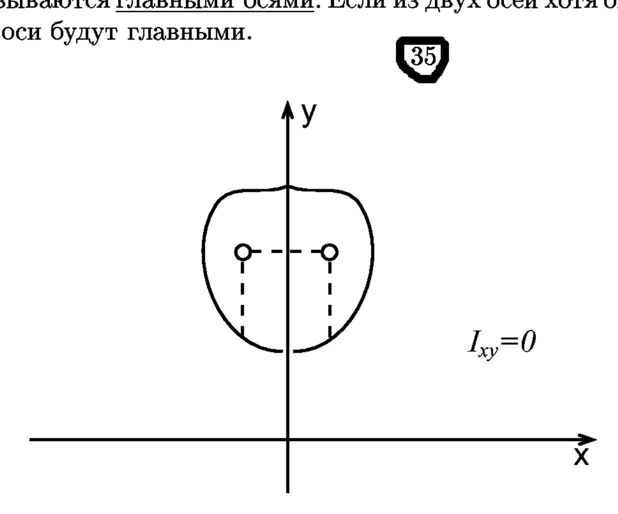
$$I_y = \int_A x^2 dA \qquad [\text{м}]^4 > 0$$

центробежный:

$$I_{xy} = \int_A xy dA \qquad [\text{м}]^4$$

Оси, относительно которых центробежные моменты инерции равны нулю, называются главными осями. Если из двух осей хотя бы одна - ось симметрии, то оси будут главными.

35



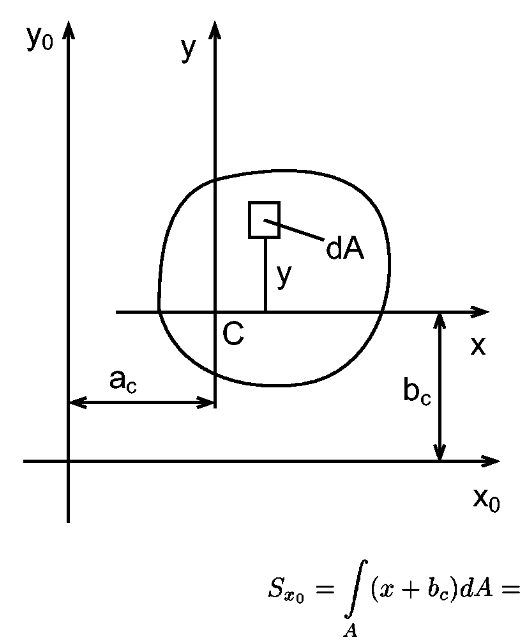
Осевые моменты инерции относительно главных осей - главные осевые моменты.

I_p - полярный момент инерции:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA > 0 \qquad \rho^2 = x^2 + y^2$$

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A \left(x^2 + y^2\right) dA$$

Теорема о параллельном переносе осей



$$S_{x_0} = \int_A (x + b_c) dA = \underbrace{\int_A y dA}_{S_x=0} + b_c dA$$

$$b_x = \frac{S_{x_0}}{A} = y_c$$

36

$$a_c = \frac{S_{y_0}}{A} = x_c$$

$$S_{x_0} = \sum S^i_{x_0} = \sum y^i_c A_i \qquad y_c = \frac{\sum y^i_c A_i}{\sum A_i}$$

Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей

$$I_{x_0} = \int_A \left(y + b_c\right)^2 dA = \underbrace{\int_A y^2 dA}_{I_x} + 2\underbrace{\int_A y b_c dA}_{2b_c * S_x = 0} + \underbrace{\int_A b_c^2 dA}_{b_c^2 A}$$

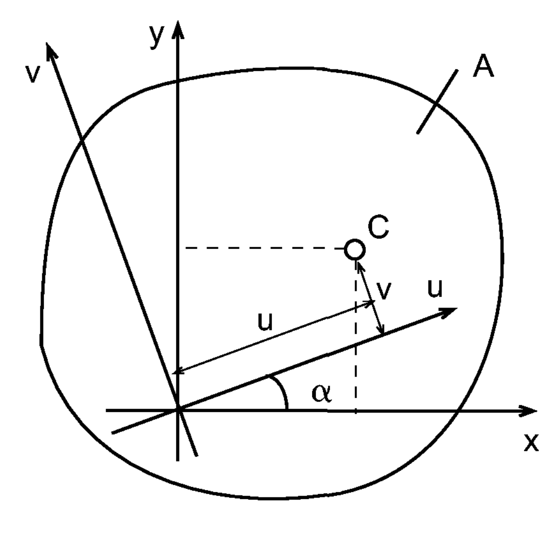
$$\begin{array}{cc} I_{x_0} = & I_x + b_c^2 A \\ \downarrow & \downarrow \\ \text{произв.} & \text{центр.} \\ \text{ось} & \text{ось} \end{array}$$

$$I_{y_0} = I_y + a_c^2 A$$

$$I_{x_0 y_0} = I_{xy} + a_c b_c A$$

x, y - центральные оси
x_0, y_0 - произвольные

Изменение моментов инерции при повороте осей



$$\underline{u = x\cos\alpha + y\sin\alpha}$$

$$\underline{v = y\cos\alpha - x\sin\alpha}$$

$$I_{uv} = \int_A uv dA = \int_A (x\cos\alpha + y\sin\alpha)(y\cos\alpha - x\sin\alpha) dA =$$
$$= \cos^2\alpha \int_A xy dA + \sin\alpha\cos\alpha \int_A y^2 dA - \sin\alpha\cos\alpha \int_A x^2 dA - \sin^2\alpha \int_A xy dA =$$
$$= \cos 2\alpha\, I_{xy} + \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha$$

37

$$\boxed{I_{uv} = \cos 2\alpha\, I_{xy} + \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha}$$

$$I_u = \int_A v^2 dA = \int_A \left(y\cos\alpha - x\sin\alpha\right)^2 dA =$$
$$= \cos^2\alpha \int_A y^2 dA - 2\sin\alpha\cos\alpha \int_A xy dA + + \sin^2\alpha \int_A x^2 dA$$

$$I_u = I_x\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha - I_{xy}\sin 2\alpha$$

$$I_v = I_x\sin^2\alpha + I_y\cos^2\alpha + I_{xy}\sin 2\alpha$$

$$I_{uv} = 0 \to \alpha_0$$

$$\cos 2\alpha_0 I_{xy} + \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\alpha_0 = 0$$

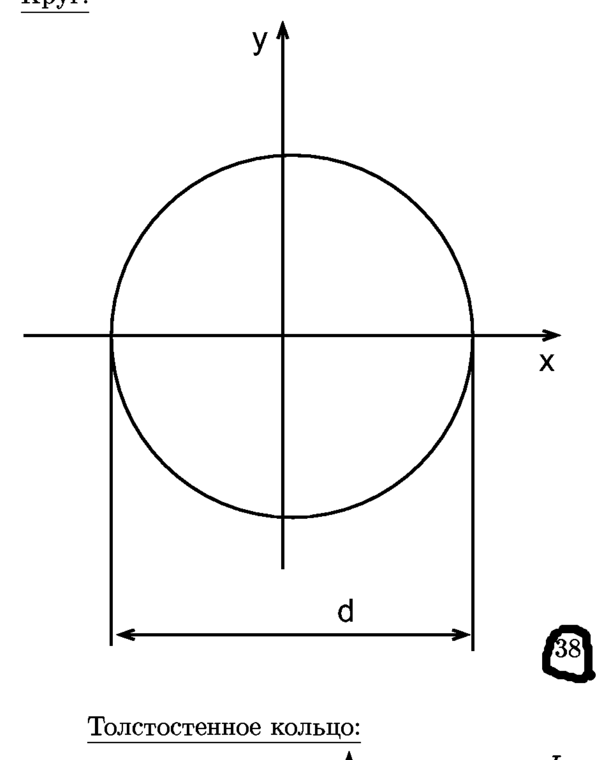
$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}}$$

$$\frac{dI_u}{d\alpha} = \underbrace{-I_x 2\cos\alpha^*\sin\alpha^* + I_y 2\sin\alpha^*\cos\alpha^*}_{\operatorname{tg} 2\alpha^* = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}} - I_{xy} 2\cos 2\alpha^* = 0$$

Относительно главных осей осевые моменты инерции одинаковы.
Относительно главных осей один главный осевой момент инерции максимален, а другой минимален.

Моменты инерции простейших фигур

Круг:



$$I_{xy} = 0$$

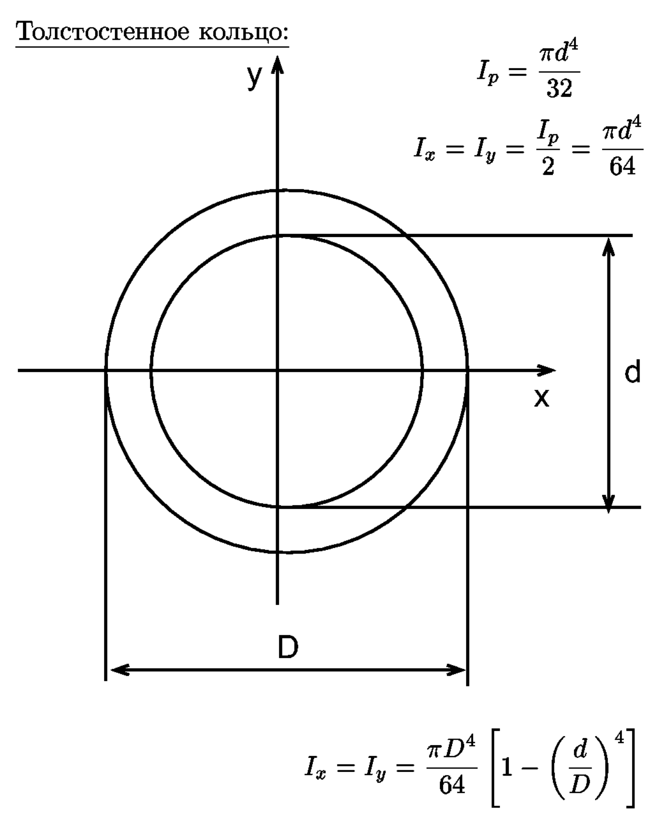
$$I_x + I_y = I_p$$

38

Толстостенное кольцо:

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

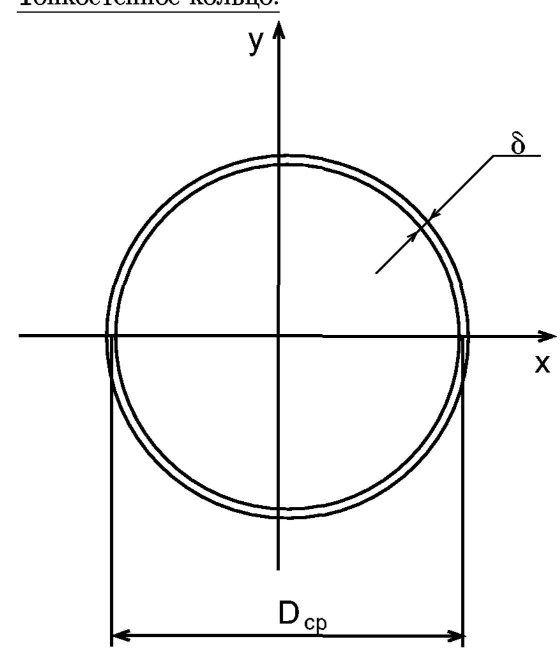
$$I_x = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi d^4}{64}$$



$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^4\right]$$

39

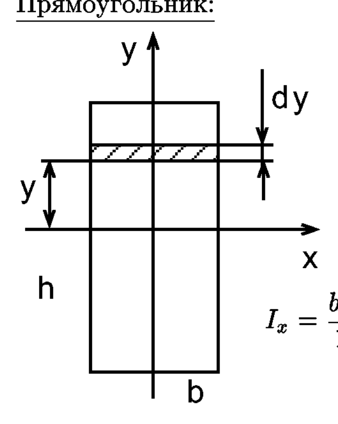
Тонкостенное кольцо:



$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \frac{D_{cp}}{4}\pi D_{cp}\delta$$

$$I_x = I_y = \frac{\pi D_{cp}^3 \delta}{8}$$

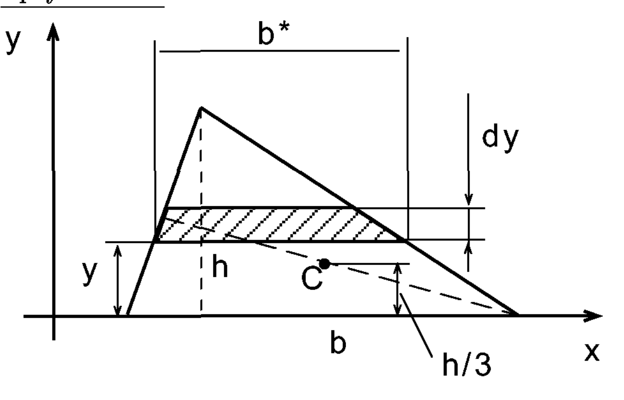
Прямоугольник:



$$I_x = \frac{bh^3}{12}; \qquad I_y = \frac{hb^3}{12}; \qquad I_{xy} = 0$$

40

Треугольник:



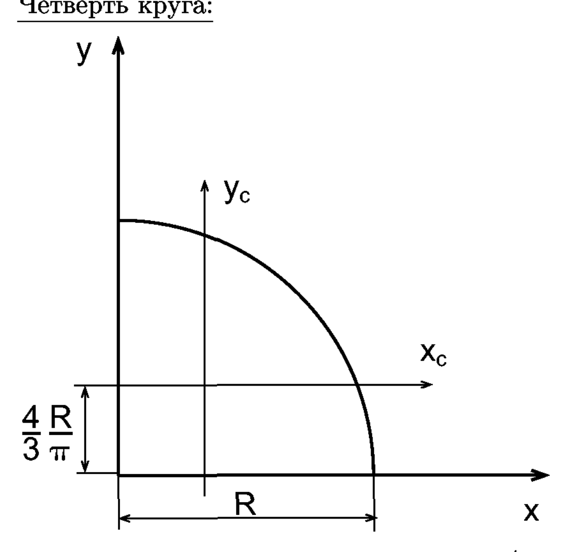
$$\frac{b^*}{b} = \frac{h - y}{h}$$

$$b^* = \frac{b}{h}(h - y)$$

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 b^* dy = \int_0^h y^2 \frac{b}{h}(b - y) dy = \frac{b}{h}\left(h * \frac{h^3}{8} - \frac{h^4}{4}\right) = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_x = I_{x_c} + b_c^2 A; \qquad I_{x_c} = I_x - b_c^2 A = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{1}{2}bh = \frac{bh^3}{36}$$

Четверть круга:



$$I_x = I_y = \frac{1}{4}\frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi R^4}{16}$$

$$I_{xc} = I_x - \left(\frac{4}{3}\frac{R}{\pi}\right)^2 * \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_{xy} = \int_A xy dA = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^R \rho^3 \sin 2\phi d\rho = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{R^4}{4}\sin 2\phi d\phi = -\frac{1}{4}\frac{R^4}{4}\cos 2\phi\Big|_0^{\pi/2} = \frac{R^4}{8}$$