

Сухова Н.А.
Конспект лекций по сопротивлению
материалов
2002-2003 учебный год

Конспект подготовил студент группы РК5-41:
Демишкевич Эдуард.

Лекция 1

Сопротивление материалов - это дисциплина о прочности и устойчивости элементов конструкций.

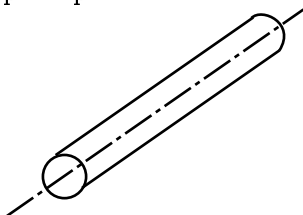
Первая книга о прочности конструкций была написана Галилеем в 1638 году.

Основные гипотезы о свойствах материалов

1. Гипотеза сплошности - материал сплошь занимает объем всего тела. Размеры конструкций и их элементов значительно больше структурных элементов материалов.
2. Гипотеза однородности - свойства материалов не зависят от координат точек. Также рассматриваются только изотропные материалы - их свойства не зависят от направления.

Формы тел в сопротивлении материалов

Самая простая математическая модель реальной конструкции - стержень (брус) - тело, один из размеров которого (длина) много больше других размеров.

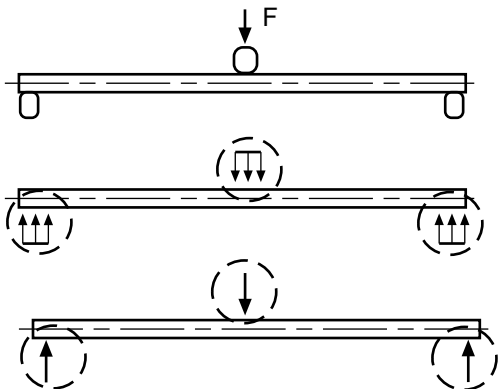


В зависимости от формы стержня, он может быть прямым, кривым, пространственным кривым.

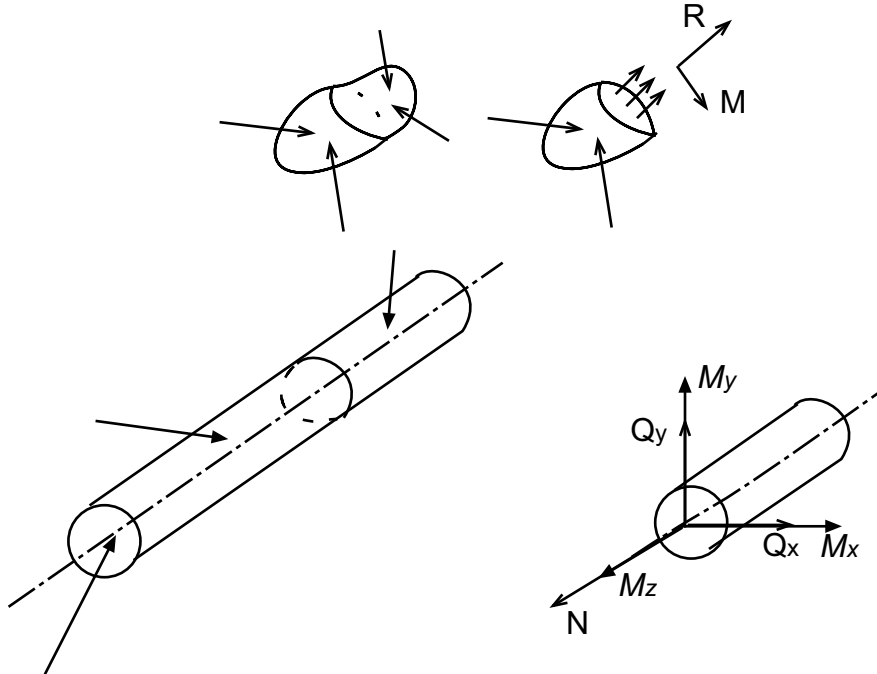
Силы внешние и внутренние

Внешние силы - могут быть распределенными и сосредоточенными.

Принцип Сен-Венана: Замена одной системы сил, распределенных по некоторой площадке статически эквивалентной системой сил, распределенных по той же площадке, влияет на состояние материала только в области, примыкающей к этой площадке и имеющей размеры порядка размеров этой площадки.



Внутренние силы - дополнительные силы взаимодействия между частицами тела, возникающими вследствие его деформации. Внутренние силы определяются с помощью метода сечений.



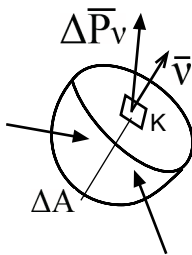
$Q_z = N$ - нормальная сила
 Q_x, Q_y - поперечные силы
 $M_z = M_k$ - крутящий момент
 $M_x, M_y = M_{mbox}$ - изгибающие моменты

Принцип наложения (суперпозиции) - Результат действия нескольких нагрузок равен сумме результатов действия каждой нагрузки в отдельности.

Внутренние силовые факторы определяют вид нагружения стержня. Если в поперечном сечении стержня не равна нулю только поперечная сила, то стержень находится в условиях растяжения-сжатия. Если не равен нулю только крутящий момент, то в условиях кручения. Если M_x и $M_y \neq 0$ или $M_x, M_y, Q_x, Q_y \neq 0$ то стержень находится в условиях изгиба.

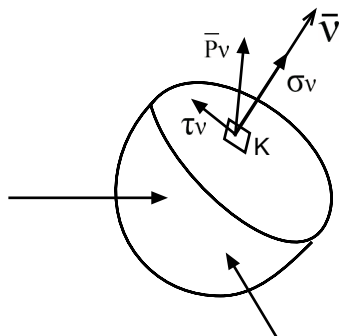
Напряжение

Напряжение - интенсивность внутренних сил.



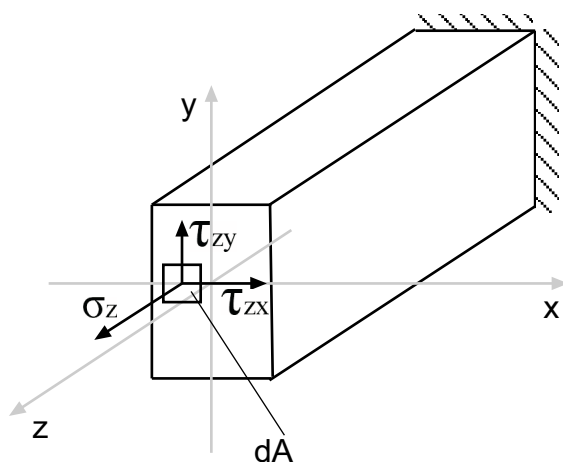
$P_v = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_v}{\Delta A}$ - напряжение по площадке ΔA в точке К.

Напряженное состояние - совокупность напряжений по всем площадкам, проходящим через данную точку.



σ_v - нормальное напряжение
 τ_v - касательное напряжение

Связь между внутренними силовыми факторами
и напряжением в поперечном сечении стержня



$$N = \int_A \sigma_z dA$$

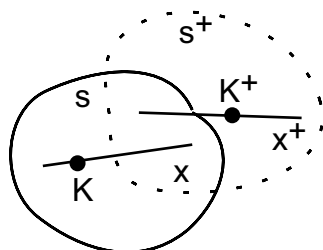
$$Q_x = \int_A \tau_{zx} dA$$

$$Q_y = \int_A \tau_{zy} dA$$

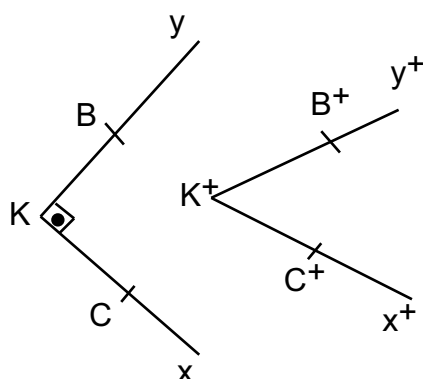
$$M_x = \int_A \sigma_{zy} dA$$

$$M_y = \int_A \sigma_{zx} dA$$

Деформация



$\epsilon_x = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^+ - s}{s}$ - линейная деформация



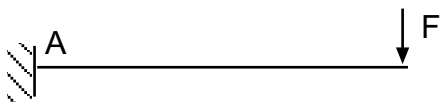
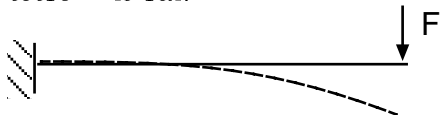
$$\lim_{\substack{BK \rightarrow 0 \\ CK \rightarrow 0}} (\angle BKC - \angle B^+K^+C^+) = \gamma_{xy}$$

- угловая деформация

Деформированное состояние - совокупность линейных и угловых деформаций по всем направлениям, проходящим через данную точку.

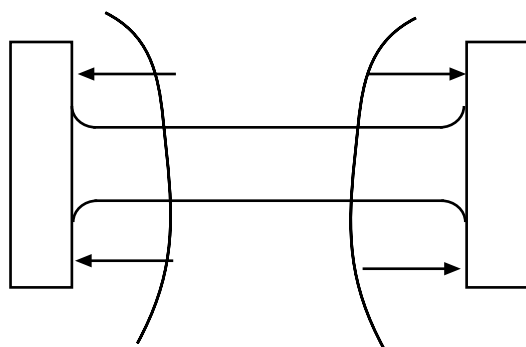
Принцип начальных размеров

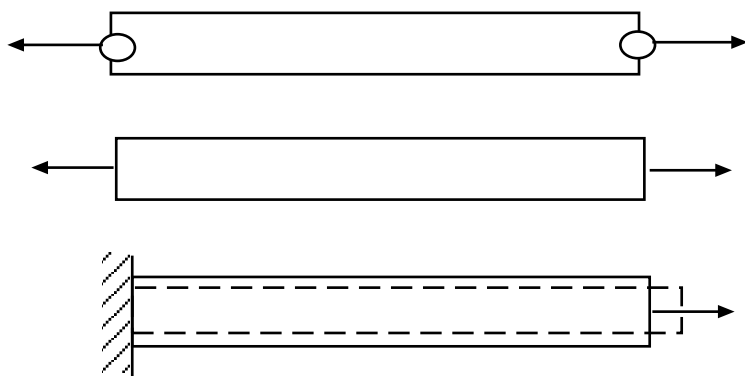
Уравнения равновесия записываются применительно к недеформированному состоянию тел.



$$M_A = Fl$$

Растяжение - сжатие прямого стержня

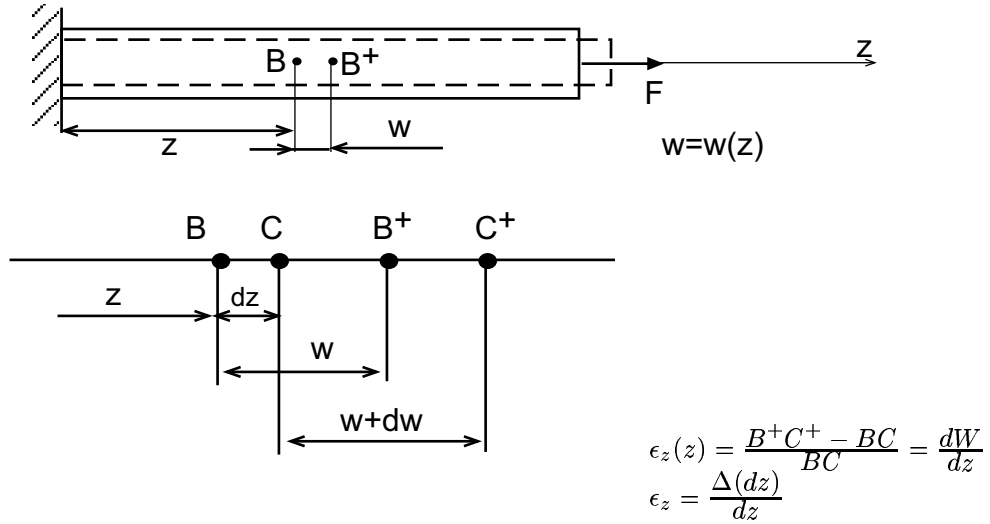




Гипотеза круглых сечений

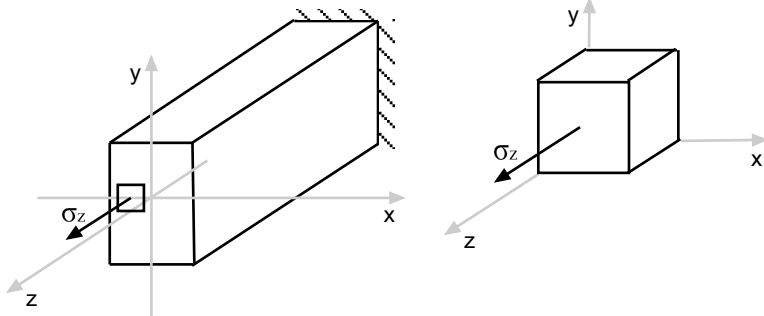
Поперечные сечения стержней, плоские до деформации, остаются плоскими и параллельными себе после деформации.

Лекция 2



Гипотеза о нормальных напряжениях

В поперечных сечениях стержней возникают только нормальные напряжения.



Закон Гука

$$\sigma_z = E\epsilon_z$$

E - модуль упругости I рода (модуль Юнга), зависит только от свойств материала, определяется экспериментально.

$$N = \int_A \sigma_z dA = \sigma_z A \Rightarrow \sigma_z = \frac{N}{A}$$

$$\Delta(dz) = \epsilon_z dz, \Delta l = \int_l \frac{N dz}{EA}$$

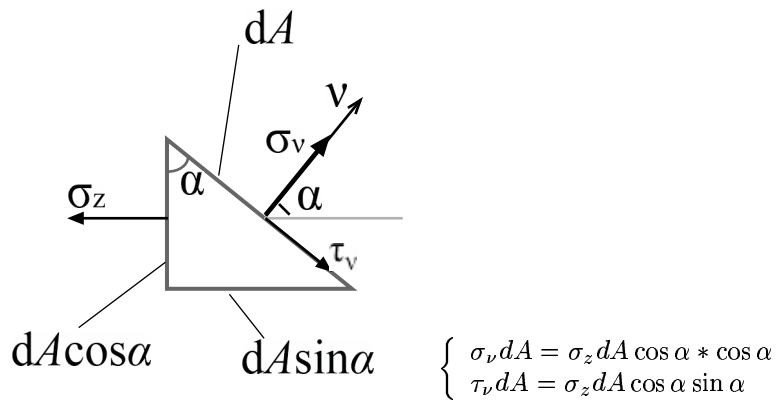
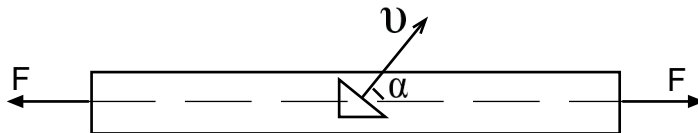
$$w = \int_z \frac{N dz}{EA} + C; \frac{dw}{dz} = \epsilon_z(z)$$

EA - жесткость стержня при растяжении-сжатии.

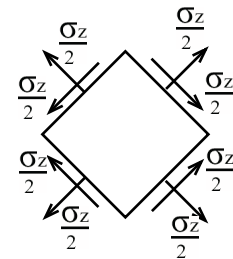
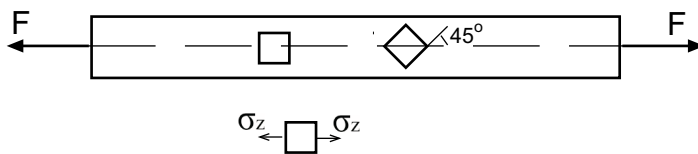
$$\epsilon_z - \epsilon_{\text{прод}}; \epsilon_{\text{поп}} = -\mu\epsilon_{\text{прод}}$$

μ - коэффициент Пуассона (коэффициент поперечной деформации)

Напряжения в наклонных площадках

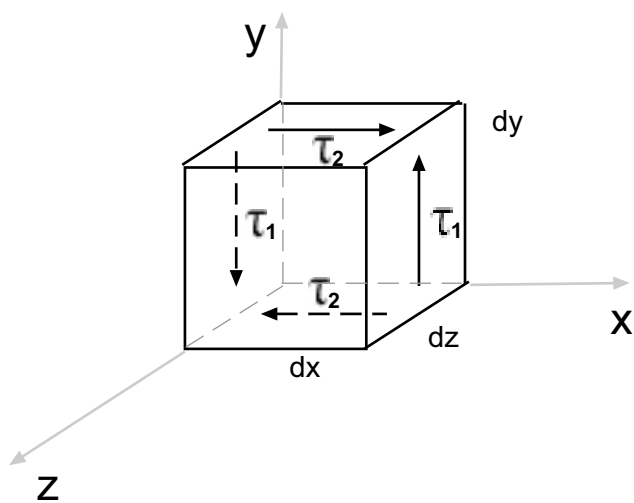


$$\sigma_\nu = \sigma_z \cos^2 \alpha, \tau_\nu = \frac{1}{2} \sigma_z \sin 2\alpha$$



Свойство парности касательных напряжений

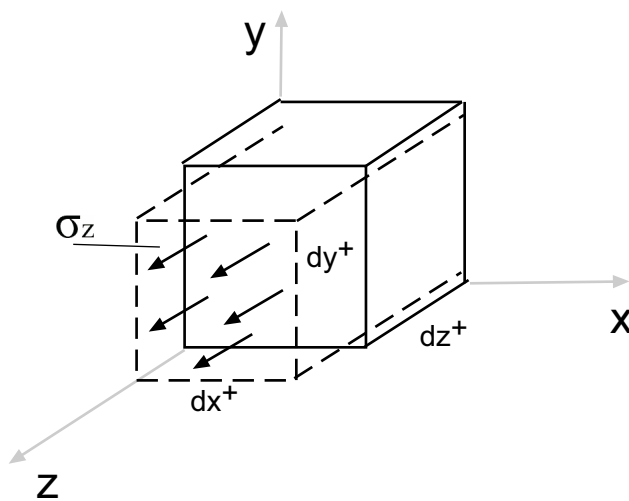
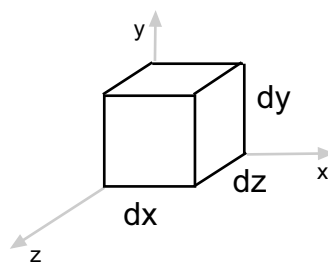
Касательные напряжения во взаимно перпендикулярных площадках, нормальные к линии пересечения этих площадок равны по величине и направлены либо оба к ребру, либо оба от ребра.



$$\begin{aligned} \sum M(z) &= 0 \\ \tau_2 dx dz dy &= \tau_1 dy dz dx \\ \tau_2 &= \tau_1 \end{aligned}$$

Объемная деформация

$$\theta = \frac{\Delta V^+ - \Delta V}{\Delta V} = \frac{\Delta V^+}{dx dy dz}$$

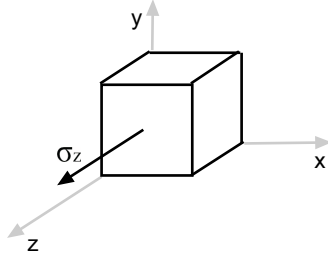


$$\Delta V^+ = dz^+ dy^+ dx^+$$

$$\begin{aligned} dx^+ &= (1 + \epsilon_x) dx \\ dy^+ &= (1 + \epsilon_x) dy \\ dz^+ &= (1 + \epsilon_x) dz \end{aligned}$$

$\Theta = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) - 1 = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z + \epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_x \epsilon_z + \epsilon_y \epsilon_z$
 Пренебрегая деформациями высших порядков малости ($\epsilon_x \epsilon_z$ и т.п.), получаем:

$$\Theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

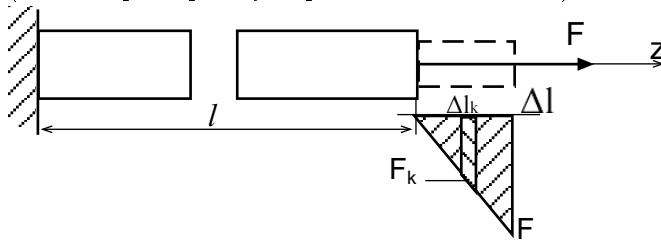


$$\epsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}$$

$$\epsilon_x = \epsilon_y = -\mu \frac{\sigma_z}{E}$$

Работа внешних сил и потенциальная энергия деформации

Статическое нагружение - такое медленное нагружение, при котором существует равновесие между внешними и внутренними силами в любой момент времени (можно пренебречь ускорениями частиц тела)



$W = U$, W - работа внешних сил, U - потенциальная энергия

$$\Delta l = \int_l \frac{N dz}{EA} = \frac{FL}{EA}, W = \frac{1}{2} F_k \Delta l_k = U$$

Системы, у которых перемещение точек приложения пропорционально величинам этих сил, называется линейно упругими.

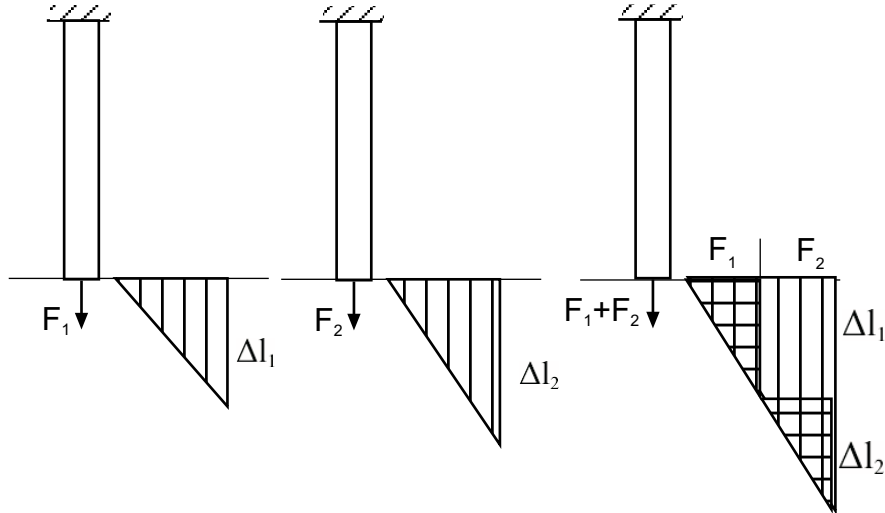
$$\Delta l_k = \frac{F_k l}{EA} = \frac{Nl}{EA}, U = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EA}$$

$U = \int_l \frac{N^2 dz}{2EA}$ - удельная потенциальная энергия деформации (условие: однородное напряженно-деформированное состояние)

$$a = \frac{U}{V} = \frac{1}{2} \frac{N^2 l}{EA * Al} = \frac{\sigma^2}{2E}$$

$a = \frac{\sigma^2}{2E}$ - удельная энергия деформации при растяжении-сжатии.

При растяжении-сжатии неприменим принцип независимости действия сил.



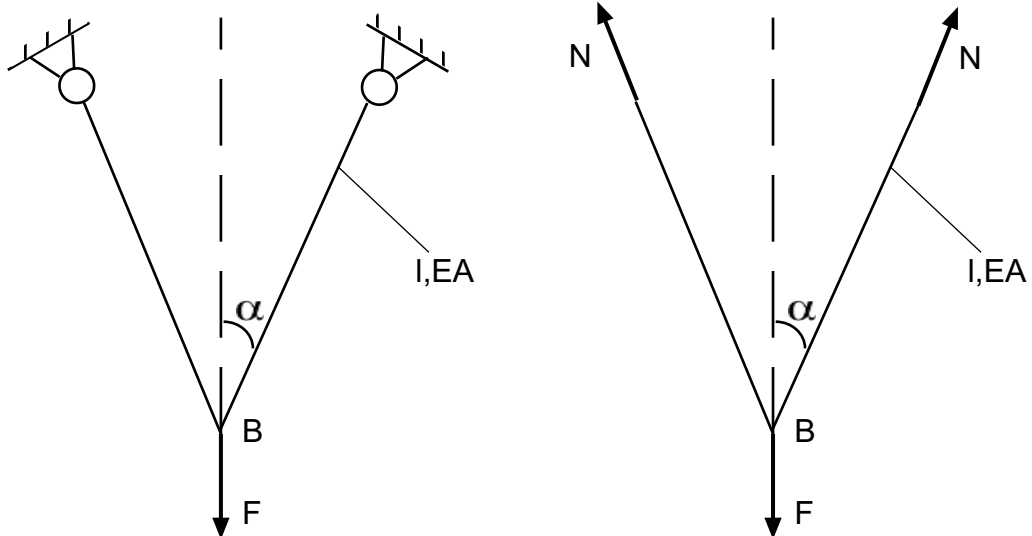
$$W_1 = U_1 = \frac{1}{2} F_1 \Delta l_1 \quad U_2 = \frac{1}{2} F_2 \Delta l_2 \quad U_3 = \frac{1}{2} F_{\Sigma} \Delta l_{\Sigma} = \frac{1}{2} (F_1 + F_2) (\Delta l_1 + \Delta l_2)$$

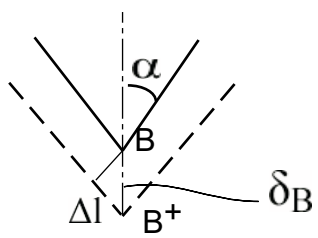
Потенциальная энергия действия нескольких сил не может быть подсчитана как сумма от действия каждой из этих сил в отдельности, если каждая из этих сил совершает работу на перемещении, вызываемом другой силой.

Статически определимые и неопределимые задачи

Статически определимые задачи - такие, в которых внутренние силы определяются с помощью уравнений статики, если этих уравнений недостаточно для определения внутренних сил, то такие задачи называются статически неопределимыми. В зависимости от количества недостающих уравнений определяется степень статической неопределимости.

Статически определимая задача:





$$2N \cos \alpha = F$$

$$N = \frac{F}{2 \cos \alpha}$$

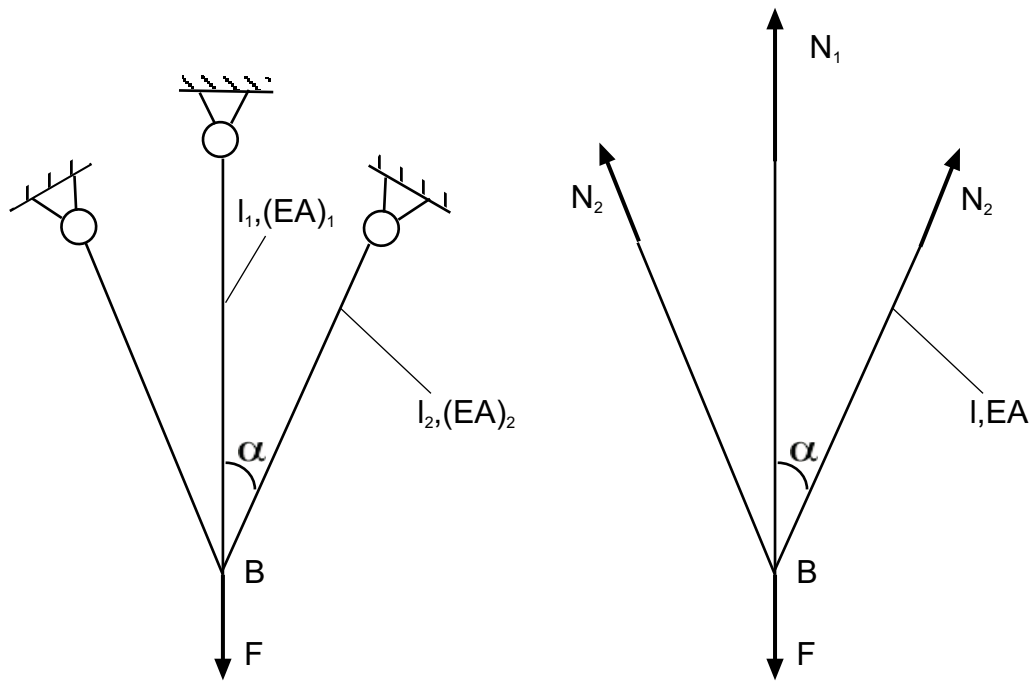
$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{2A \cos \alpha}$$

$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{Fl}{2EA \cos \alpha}$$

$$\delta_B = \frac{\Delta l}{\cos \alpha}$$

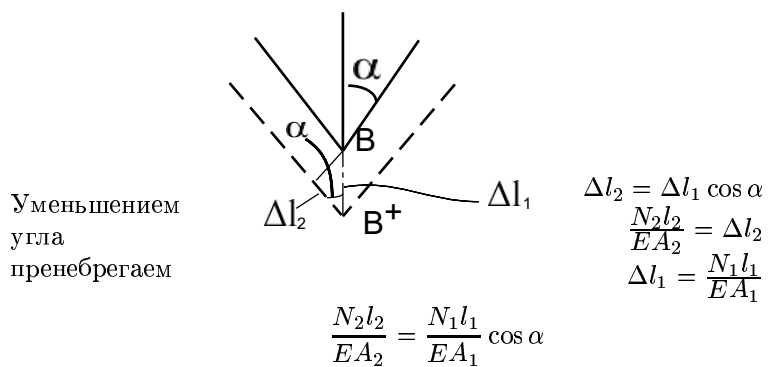
Лекция 3

Статически неопределимые задачи и их особенности

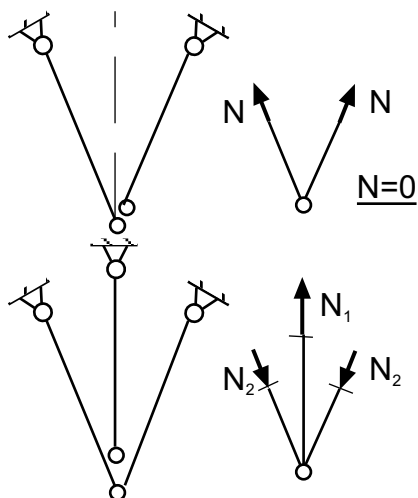


$N = ?$
 $\delta_b = ?$

$$N_1 + 2N_2 \cos \alpha = F$$



1. В статически неопределимых системах внутренние силы зависят от размеров элементов конструкций и от свойств материала этих элементов.



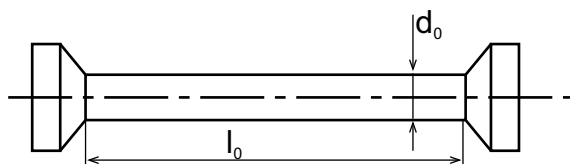
В статически неопределимых системах при сборке могут возникнуть так называемые монтажные напряжения, если какой-то элемент не соответствует по длине спроектированному.

Возникновение температурных напряжений

При нагревании элемента конструкции или всей конструкции возникают температурные напряжения. В статически неопределимых системах возможно наличие самоуравновешенных внутренних сил (внутренних сил без внешней нагрузки).

Механические характеристики материала при растяжении-сжатии

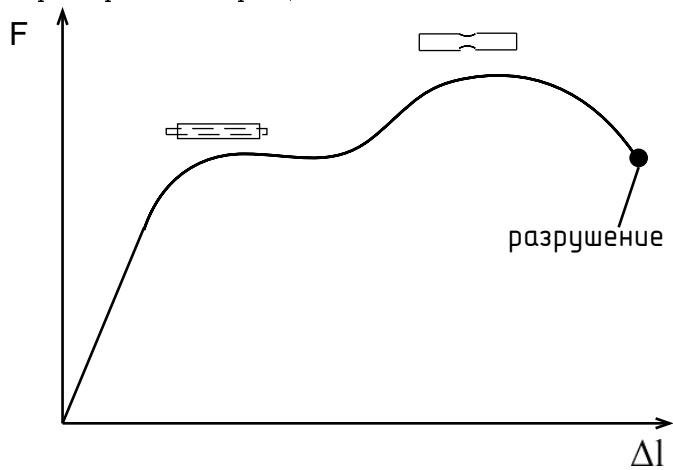
1. Растяжение



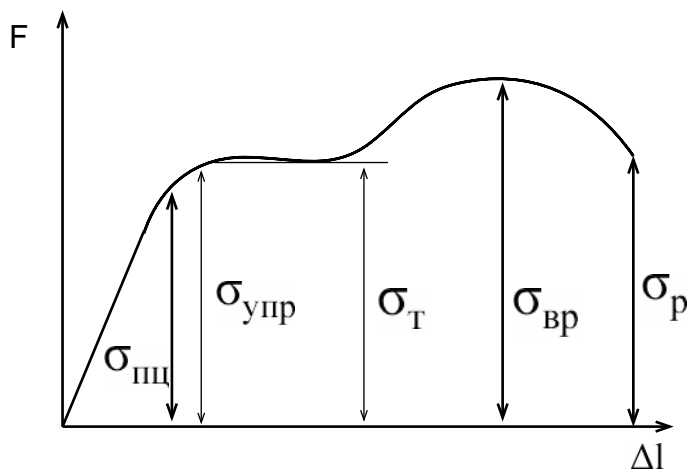
$$l_0/d_0 = 10$$

Для пластичных материалов:

Характеристика образца:

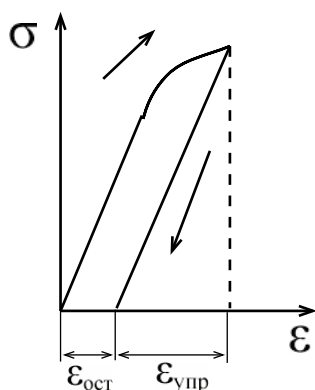


$$\sigma = \frac{F}{A_0}; \epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$



Деформации, исчезающие после снятия нагрузки, называются упругими.
 $\sigma_{пц}$ - предел пропорциональности - напряжение, до которого материал подчиняется закону Гука.

Свойство материала возвращаться к исходным размерам после снятия нагрузки называется упругостью.



Деформации, остающиеся после снятия нагрузки, называются остаточными или пластическими.

$\sigma_{упр}$ - предел упругости - напряжение, до которого деформации остаются упругими.

σ_T - предел текучести - напряжение, при котором деформации растут при почти постоянной нагрузке.

$\sigma_{вр}$ - предел прочности по напряжению - напряжение, равное отношению максимальной нагрузки, выдерживаемой образцом при растяжении к первоначальной площади поперечного сечения образца.

σ_r - разрушение.

Для большинства классических машиностроительных материалов (металлов)

$$\sigma_{упр} \approx \sigma_{щ} \approx \sigma_T$$

σ_T по ГОСТу - напряжение, при котором остаточная деформация равна 0.2

Характеристики пластичности

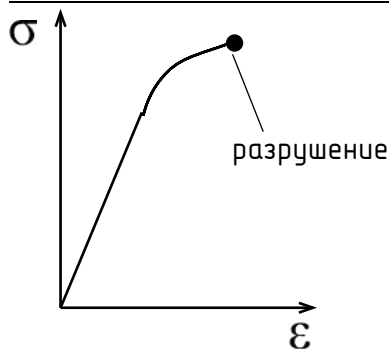
Относительное остаточное удлинение после разрыва определяется как удлинение после разрыва, отнесенное к начальной длине.

$$\delta_{10} = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Ψ - относительное остаточное поперечное сужение после разрыва.

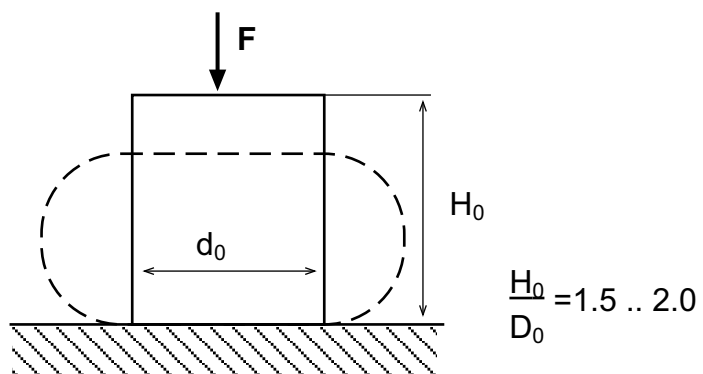
$$\Psi = \frac{A_0 - A_{min}}{A_0} * 100\%$$

Для хрупких материалов (чугун и т.п.):

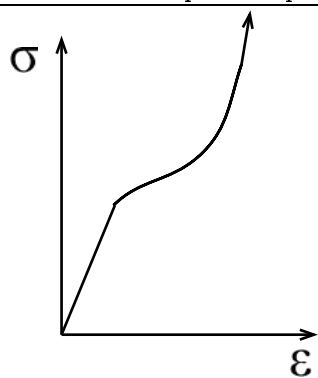


Материалы называются пластичными, если они при растяжении ведут себя как малоуглеродистая сталь и хрупкими, если ведут себя как чугун.

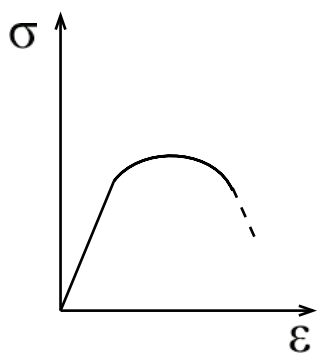
2. Сжатие



Пластичные материалы при сжатии не разрушаются

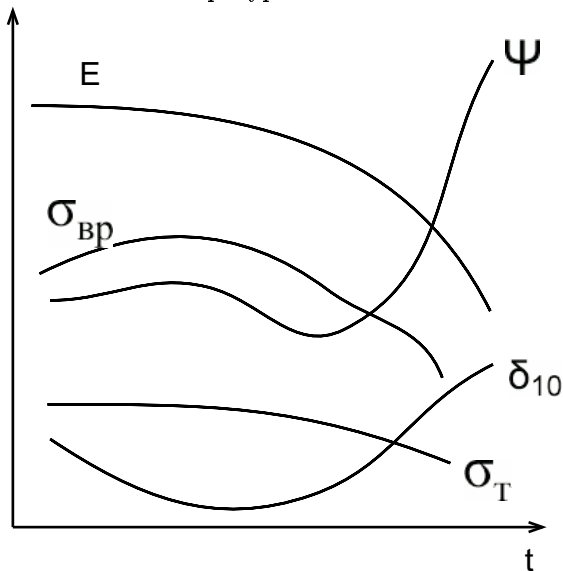


$$\sigma = \frac{F}{A_0}, \epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \left(\frac{\Delta H}{H_0} \right)$$

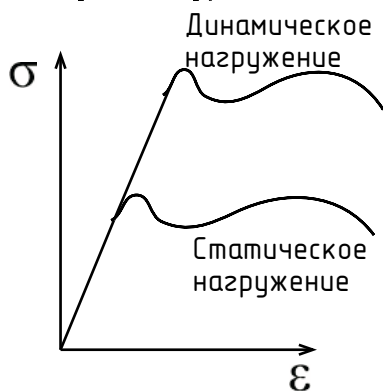


Влияние различных факторов на свойства материалов

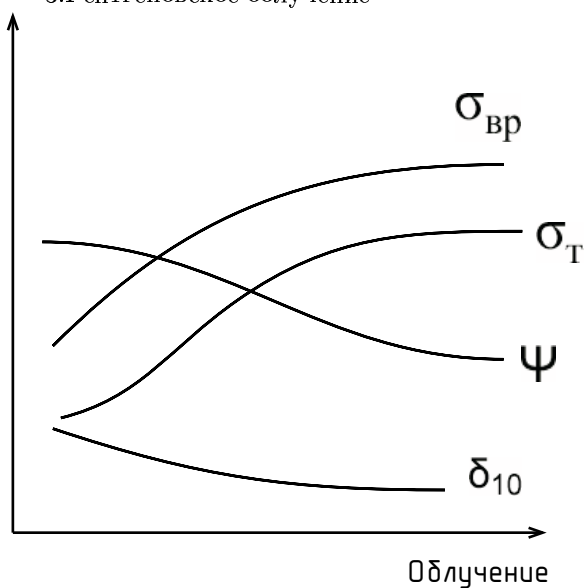
1. Влияние температуры



2. Скорость нагружения



3.Рентгеновское облучение



Расчет на прочность

Расчет на прочность может производиться:

- а). по допускаемым напряжениям
- б). по предельным нагрузкам

Расчет на прочность по допускаемым напряжениям

Конструкция считается неработоспособной, если максимальное напряжение в ней (в точке, сечении) достигает предельного значения.

$$\sigma_{max} \leq \frac{\sigma_L}{n}, \sigma_L = \begin{cases} \sigma_T \\ \sigma_B \end{cases}$$

n - коэффициент запаса

$$n = \begin{cases} n_T & \text{— по текучести} \\ n_B & \text{— по разрушению} \end{cases}$$

n всегда больше 1

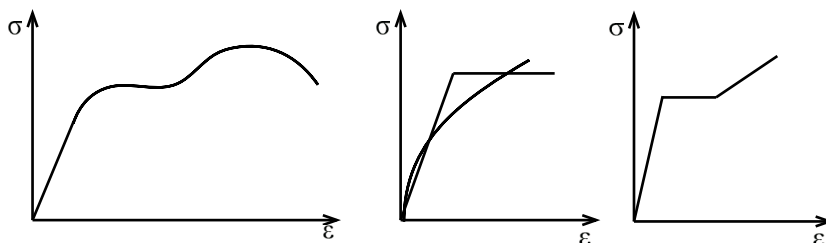
$[n]$ - нормативный коэффициент запаса

$\frac{\sigma_L}{[n]} = [\sigma]$ - допускаемое напряжение.

$$\sigma_{max} \leq [\sigma]$$

Лекция 4

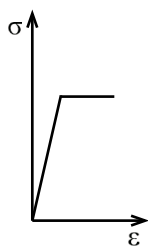
Расчеты за пределами упругости



Вид аппроксимации определяется реальной характеристикой и величинами деформаций, предполагаемых в конструкции.

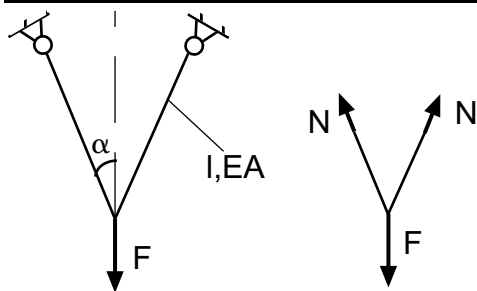
Идеальный упруго-пластичный материал

Диаграмма Прандтля



материал имеет такую характеристику и при растяжении и при сжатии

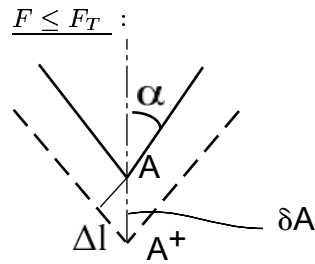
Рассмотрим статически определимую систему:



$$F = 2N \cos \alpha \Rightarrow N = \frac{F}{2 \cos \alpha}$$

$$\sigma = \frac{F}{2A \cos \alpha} = \sigma_T \rightarrow F_T = 2\sigma_T A \cos \alpha$$

$N_{max} = \sigma_T A$. При $F > F_T$ не будет равновесия системы (исчерпывается несущая способность системы).



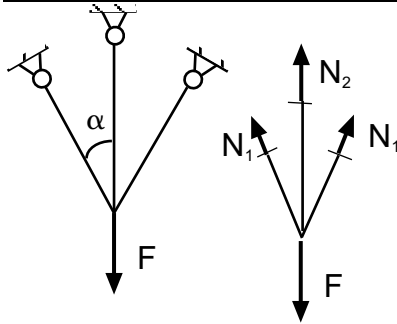
$$\Delta l = \frac{Nl}{EA} = \frac{Fl}{2EA \cos \alpha}$$

$$\delta_A = \frac{\Delta l}{\cos \alpha} = \frac{Fl}{2EA \cos^2 \alpha}$$

$$\delta_A^T = \frac{F_T l}{2EA \cos^2 \alpha} = \frac{\sigma_T l}{E \cos \alpha}$$

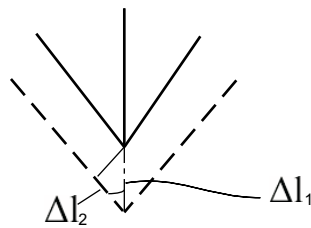
$F_{пр}$ - предельная сила, при которой система превращается в механизм, начинается движение точки без изменения силы в направлении нагрузки.

Для статически неопределимых систем:



$$F = N_2 + 2N_1 \cos 60^\circ$$

$$N_1 + N_2 = F$$



$$2\Delta l_1 = \Delta l_2$$

$$\sigma_{max} \leq \sigma_T$$

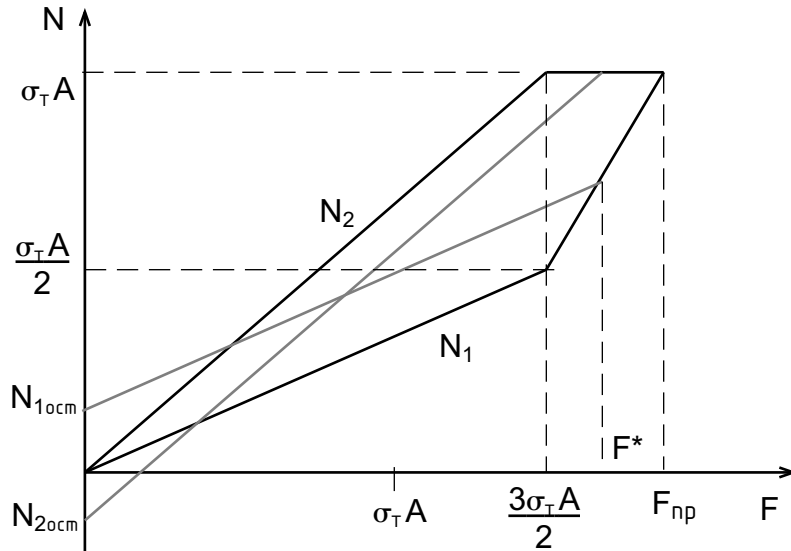
$$F \leq F_T = \frac{3}{2} \sigma_T A$$

$$\Delta l_i = \frac{N_i l_i}{EA}$$

$$2 \frac{N_1 l}{EA} = \frac{N_2 l}{EA} \Rightarrow 2N_1 = N_2$$

$$\begin{cases} N_1 + N_2 = F \\ 2N_1 = N_2 \end{cases} \Rightarrow N_1 = \frac{F}{3}; N_2 = \frac{2F}{3}$$

$$\sigma_{max} = \sigma_2 = \frac{2F}{3A} = \sigma_T \Rightarrow F_T = \frac{3}{2} \sigma_T A$$



$$F_T \leq F \leq F_{np} = 2\sigma_T A$$

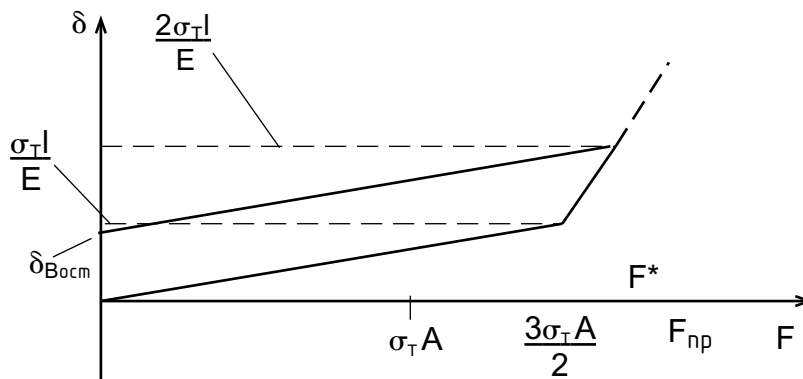
$$N_2 = \sigma_T A$$

$$N_1 = F - N_2 = F - \sigma_T A$$

$$N_1 = \sigma_T A \rightarrow F_{np} = 2\sigma_T A$$

$$F = F_T; N_1^T = \frac{F_T}{3} = \frac{1}{2}\sigma_T A$$

$$N_2^T = \frac{2}{3}F_T = \sigma_T A$$



$$\delta_B = \Delta l_2; F \leq F_T$$

$$\delta_B = \frac{N_2 l}{EA} = \frac{2}{3} \frac{Fl}{EA}$$

$$\delta_B^T = \frac{\sigma_T l}{E}$$

При $F > F_T$:

$$\delta_B = \Delta l_2 = 2\Delta l_1 =$$

$$= 2 \frac{(F - \sigma_T A)l}{EA}$$

$$F = F_{np} \rightarrow \sigma_B^{np} = \frac{2\sigma_T l}{E}$$

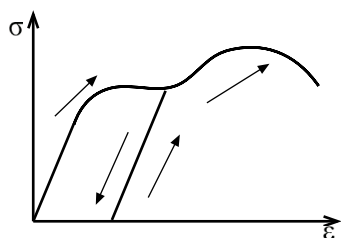
$$N_i^{ост} = N_{i\text{факт}} - N_{i\text{разр}}$$

$$F^* = \frac{7}{4}\sigma_T A$$

$$N_1^{ост} = F^* - \sigma_T A - \frac{F^*}{3} = \left(\frac{3}{4} - \frac{7}{4 \cdot 3}\right)\sigma_T A - \text{растягивающее остаточное напряжение}$$

$$N_2^{ост} = \sigma_T A - \frac{2}{3}F^* = -\frac{1}{6}\sigma_T A - \text{сжимающее остаточное напряжение}$$

$$\delta_B^{ост} = \frac{2(F^* - \sigma_T A)l}{EA} - \frac{2}{3} \frac{F^* l}{EA} = \frac{1}{3} \frac{\sigma_T l}{EA}$$

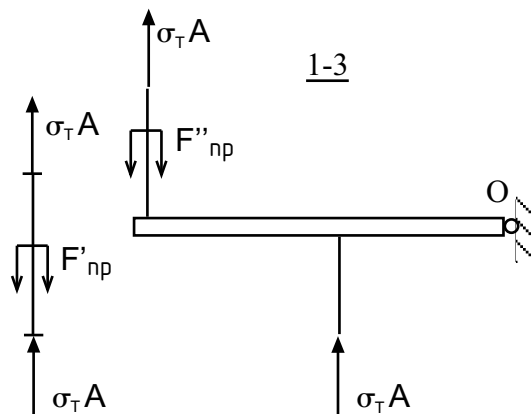
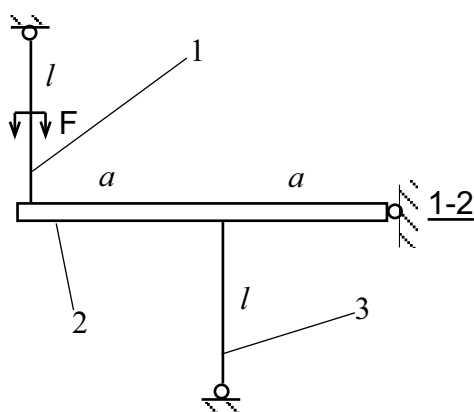
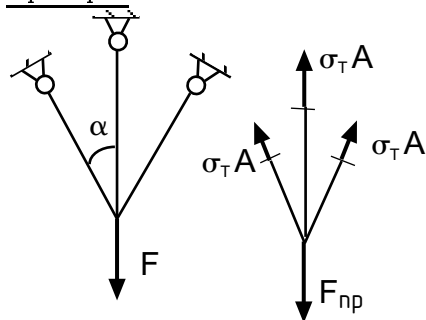


Расчет на прочность по предельным нагрузкам

Предельной называется нагрузка, при которой исчерпывается несущая способность системы.

$$F_{\text{раб}} \leq \frac{F_{\text{пр}}}{n}$$

Примеры:



$$\Sigma M_o = 0 : -\sigma_T A * 2a + F''_{\text{пр}} * 2a - \sigma_T A a = 0$$

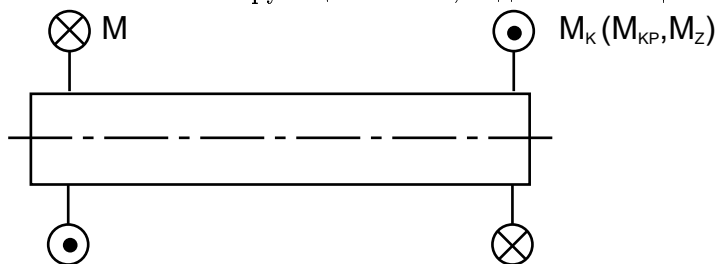
$$F_{\text{пр}} = F''_{\text{пр}} = \frac{3}{2} \sigma_T A$$

Лекция 5

Кручение

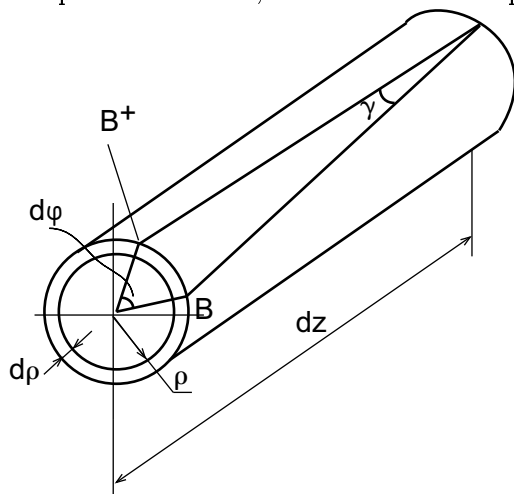
Кручение - такой вид нагружения стержня, при котором внутренние силы в его поперечном сечении приводятся к паре сил, лежащей в плоскости сечения, момент этой пары равен крутящему моменту.

Чтобы назвать крутящий момент, надо встать лицом к сечению.



Кручение стержня круглого поперечного сечения

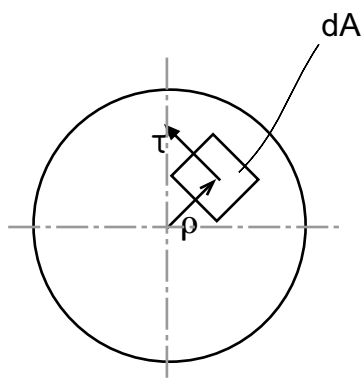
Гипотеза круглых сечений и прямых радиусов: при кручении стержня круглого поперечного сечения, сечения остаются круглыми, а радиусы - прямыми.



$$CC^+ = \rho d\phi = \gamma dz$$

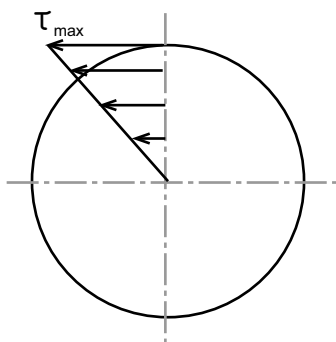
$$\gamma = \rho \frac{d\phi}{dz} = \rho \Theta$$

$$\frac{d\phi}{dz} = \Theta - \text{крутка}$$



$$\tau = G\gamma$$

G - модуль упругости 2го рода (модуль сдвига), определяется экспериментально, зависит от свойств материала.



$$M_k = \int_A \tau dA \rho$$

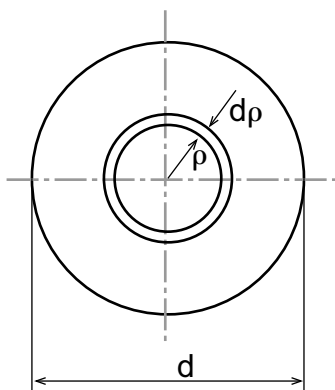
$$M_k = \int_A G\Theta \rho dA \rho = G\Theta \int_A \rho^2 dA$$

$$M_k = G\Theta I_p, G\Theta = \frac{M_k}{I_p}$$

$$\tau_{max} = \frac{M_k}{I_p} \rho_{max} = \frac{M_k}{W_p}, W_p = \frac{I_p}{\rho_{max}}$$

$$d\phi = \Theta dz ; \phi = \int_l \frac{M_k dz}{GI_p}$$

Жесткость стержня при кручении (крутильная жесткость)



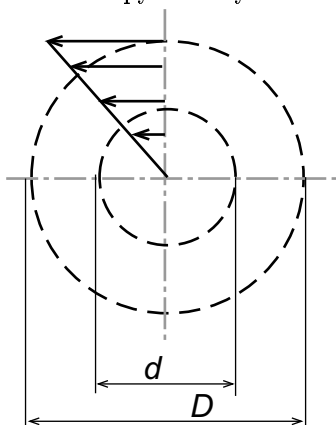
$$I_p = \int_A \rho^2 dA$$

$$I_p = \int_0^{d/2} \rho^2 2\pi\rho d\rho =$$

$$= 2\pi \frac{d^4}{4 * 2^4} = \frac{\pi d^4}{32}$$

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{max}} = \frac{\pi d^4 * 2}{32d} = \frac{\pi d^3}{16}$$

Гипотеза круглых сечений и прямых радиусов справедлива и для поперечных сечений круглых пустотелых цилиндров.



$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right)$$

Потенциальная энергия деформации при кручении

$$W = \frac{1}{2} M \phi$$

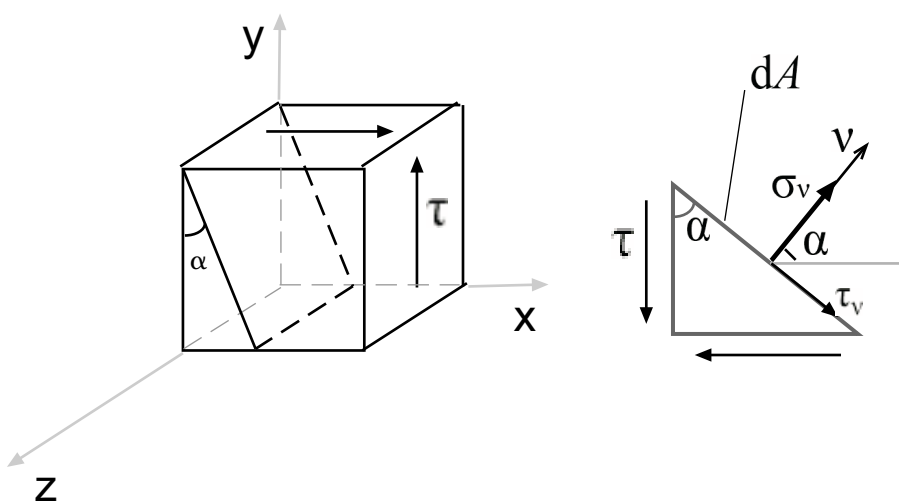
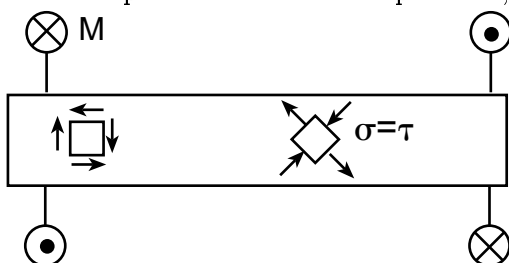
$$W = U$$

$$dU = \frac{1}{2} M_k d\phi = \frac{1}{2} M_k \frac{M_k dz}{G J_p}$$

$$U = \int_l \frac{M_k^2 dz}{2 G J_p}$$

Чистый сдвиг

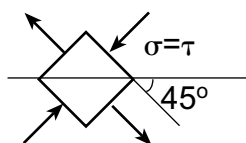
Плоское напряженное состояние, при котором по граням элемента действуют только парные касательные напряжения, называется чистым сдвигом.



$$\sigma_n dA = \tau dA \cos \alpha \sin \alpha + \tau dA \sin \alpha \cos \alpha = \tau dA \sin 2\alpha$$

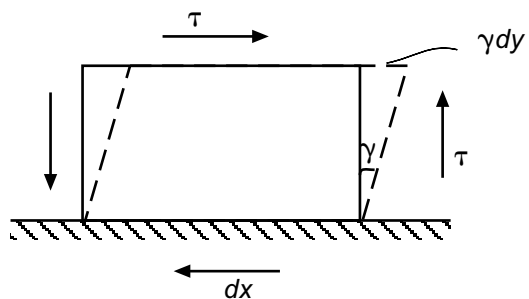
$$\tau_n dA = \tau dA \cos \alpha \cos \alpha - \tau dA \sin \alpha \sin \alpha = \tau dA \cos 2\alpha$$

$$\begin{cases} \sigma_n = \tau \sin 2\alpha \\ \tau_n = \tau \cos 2\alpha \end{cases}$$



Чистый сдвиг - такое напряженное состояние, когда элемент в одном направлении растягивается, а другом, перпендикулярном ему, сжимается равными напряжениями.

Удельная энергия деформации при чистом сдвиге

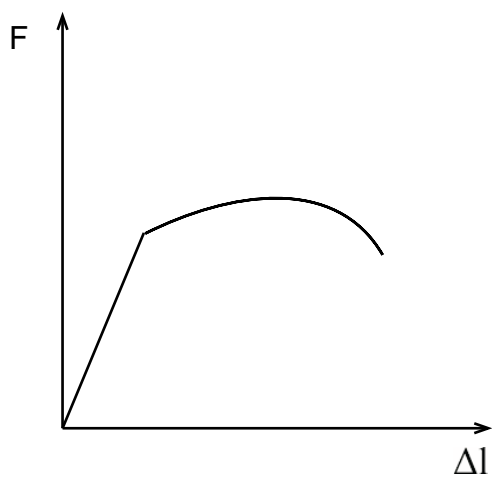


$$\frac{1}{2}\tau dz dx \gamma dy = dW = dU$$

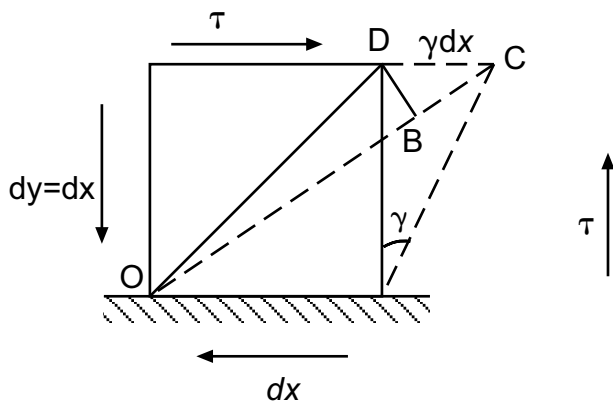
$$a = \frac{dU}{dx dy dx} = \frac{1}{2}\tau \gamma = \frac{\tau^2}{2G}$$

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

Механические характеристики материалов при чистом сдвиге



Связь между характеристиками упругости G, E и μ



$$\epsilon_u = \frac{BC}{OD} = \frac{\gamma dx}{\sqrt{2}dx\sqrt{2}} = \frac{\gamma}{2} = \frac{\tau}{2G}$$

$$BC = \gamma dx \cos 45^\circ$$

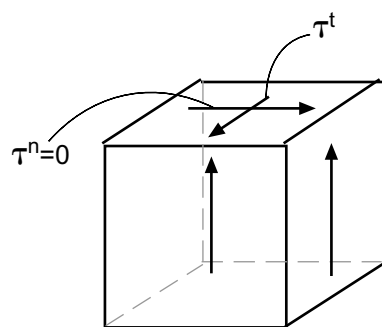
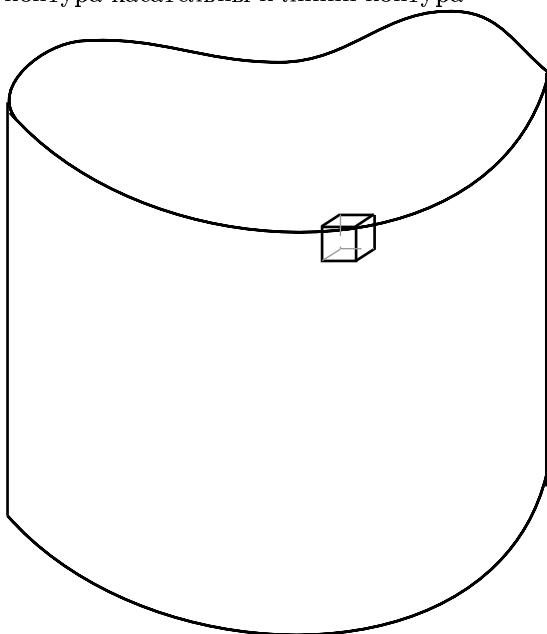
$$\epsilon_u = \frac{\sigma}{E} - \mu \left(-\frac{\sigma}{E} \right) = \frac{\tau}{E} (1 + \mu)$$

$$\frac{\tau}{E} (1 + \mu) = \frac{\tau}{2G}$$

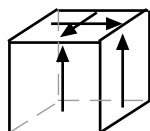
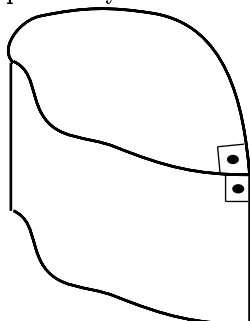
$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}$$

Следствия из свойства парности касательных напряжений

1. Касательные напряжения в поперечных сечениях стержней в точках у контура касательны к линии контура



2. В выходящих углах в поперечном сечении стержня касательные напряжения равны нулю

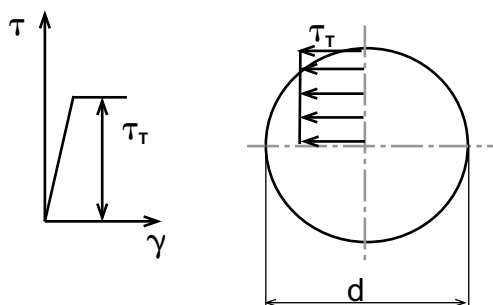


Лекция 6

Расчет на прочность по допускаемым напряжениям

$$\tau_{max} \leq \frac{\tau_T}{[n_T]} = [\tau] \text{ - для пластичных материалов}$$

$$\tau_{max} \leq \frac{\tau_b}{[n_b]} = [\tau] \text{ - для хрупких материалов}$$

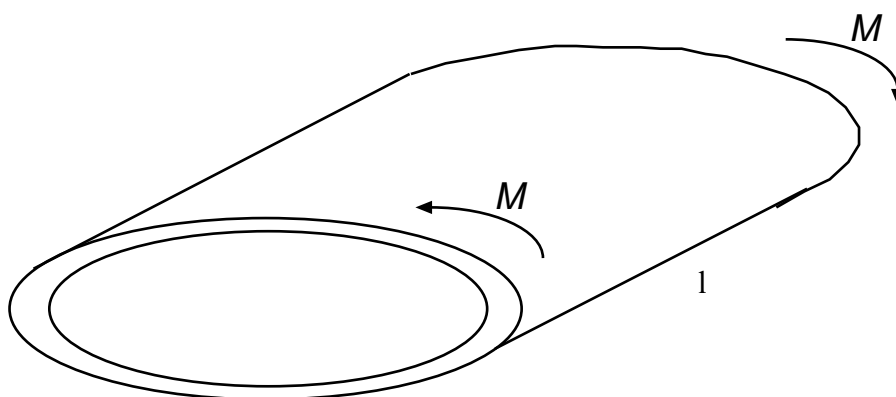


$$M_{KP} = \int_A \tau \rho dA = \int_0^{d/2} \tau \rho 2\pi \rho d\rho$$

$$M_{пред} = \int_0^{d/2} \tau_T \rho 2\pi \rho d\rho = \tau_T 2\pi \frac{d^3}{3 \cdot 8} = \tau_T \frac{\pi d^3}{12}$$

$$n = \frac{M_{пред}}{M_{факт}} \geq [n]$$

Кручение тонкостенных замкнутых профилей

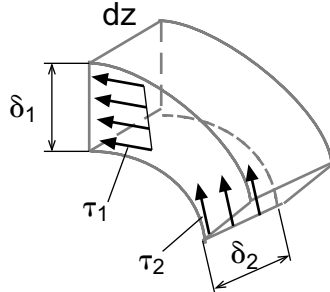


Основные положения

1. Считаем, что напряжения по толщине стенки распределены равномерно



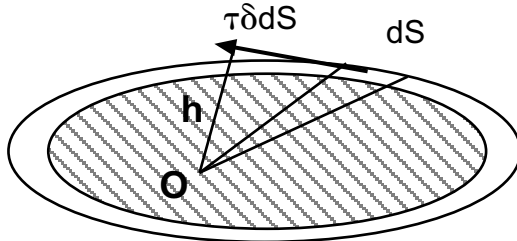
2. Касательные напряжения в каждом сечении, нормальном к средней линии стенки, параллельны между собой и параллельны касательной к средней линии стенки в этом месте.



$$\Sigma F_z : -\tau_2 \delta_2 dz + \tau_1 \delta_1 dz = 0$$

$$\tau_1 \delta_1 = \tau_2 \delta_2$$

$\tau \delta = const$ - закон распределения напряжений по толщине



$$M_k = \oint \tau \delta dS * h = \tau \delta \oint dS * h = 2\tau \delta f^*$$

$$\tau = \frac{M_k}{2f^* \delta}$$

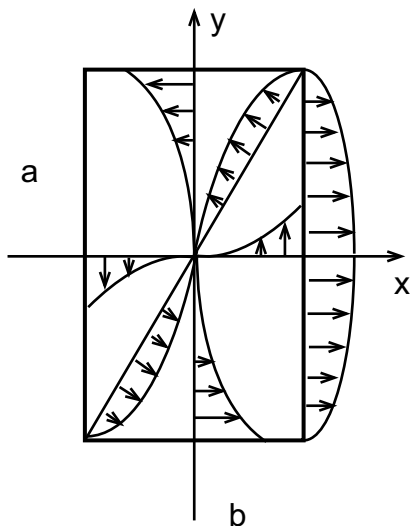
$$\tau_{max} = \frac{M_k}{2f^* \delta_{min}} = \frac{M_k}{W_k}; W_k = 2f^* \delta_{min}; W_k = W_p$$

$$\frac{1}{2} M \phi = U = \int_V a dV; a = \frac{\tau^2}{2G}$$

$$\frac{1}{2} M \phi = l \oint \frac{\tau^2}{2G} \delta dS = \frac{l}{2G} \oint \frac{M_k^2 \delta dS}{(2f^* \delta)^2} = \frac{M_k^2 l}{4f^{*2} 2G} \oint \frac{dS}{\delta}$$

$$M_{kпред} = \tau_T 2f^* \delta_{min}$$

Кручение стержня прямоугольного поперечного сечения



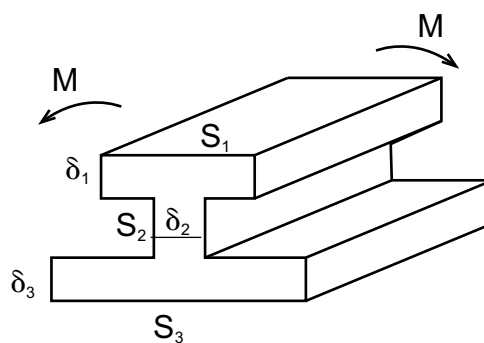
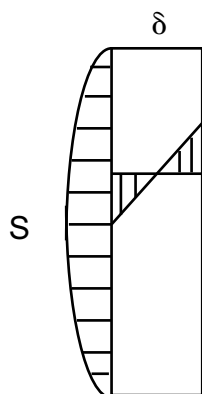
$$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_k}; W_k = \alpha b^2 a; \alpha = \alpha \left(\frac{a}{b} \right)$$

$$\phi = \int \frac{M_k dz}{G}$$

Задача о равновесии мембраны, натянутой на отверстие

Существует аналогия между задачей о кручении стержня и задачей о равновесии пленки, натянутой на контур и нагруженной равномерно распределенным давлением. Аналогом напряжения является угол, который составляет касательная к поверхности пленки с плоскостью контура, а аналогом крутящего момента - объем, заключенный между плоскостью контура и поверхностью пленки.

Задача о кручении тонкостенных открытых профилей



$$\frac{S}{\delta} \geq 10$$

$$\delta_i \ll S_i$$

$$M_1 + M_2 + M_3 = M$$

$$\phi = \phi_i = \frac{M_1 l}{G \frac{1}{3} \delta_i^3 S_i}; M_i = \frac{\phi}{l} G \frac{1}{3} \delta_i^3 S_i; M = \Sigma M_i = \frac{\phi}{l} G \Sigma \frac{1}{3} \delta_i^3 S_i;$$

$$I_k = \sum \frac{1}{3} \delta_i^3 S_i$$
$$\tau_{max}^i = \frac{M_i}{W_{ki}} = \frac{\phi}{l} G_i \frac{1/3 \delta_i^3 S_i}{1/3 \delta_i^2 S_i}$$
$$\tau_{max} = \frac{M_k}{W_k}; W_k = \frac{I_k}{\delta_{max}}$$

Понятие о свободном и стесненном кручении

При кручении стержня поперечное сечение остается плоским (депланация).

Если депланация ничем не ограничена, то такое кручение называется свободным, в противном случае кручение стесненное.

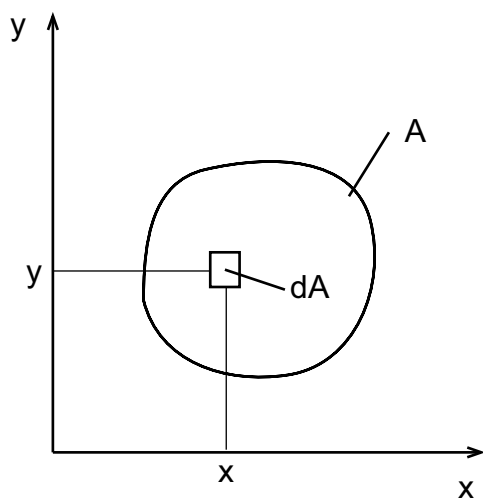
Полученные формулы применимы только для свободного кручения!

Лекция 7

Геометрические характеристики плоских фигур

1) Площадь

$$A = \int_A dA \quad [\text{м}]^2 > 0$$



2) Статические моменты площади

$$S_x = \int_A y dA \quad [\text{м}]^3$$

$$S_y = \int_A x dA \quad [\text{м}]^3$$

Статические моменты могут быть как положительными, так и отрицательными.

Ось, относительно которой статический момент равен нулю, называется центральной осью

3) Моменты инерции

осевые:

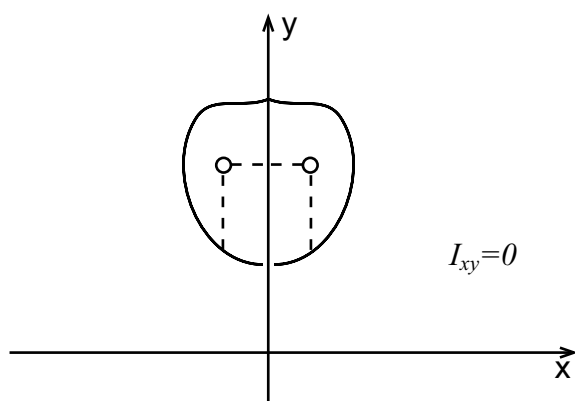
$$I_x = \int_A y^2 dA \quad [\text{м}]^4 > 0$$

$$I_y = \int_A x^2 dA \quad [\text{м}]^4 > 0$$

центробежный:

$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad [\text{м}]^4$$

Оси, относительно которых центробежные моменты инерции равны нулю, называются главными осями. Если из двух осей хотя бы одна - ось симметрии, то оси будут главными.



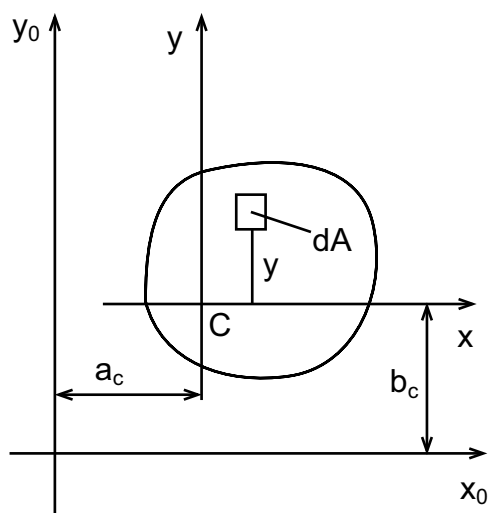
Осевые моменты инерции относительно главных осей - главные осевые моменты.

I_p - полярный момент инерции:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA > 0 \quad \rho^2 = x^2 + y^2$$

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA$$

Теорема о параллельном переносе осей



$$S_{x_0} = \int_A (x + b_c) dA = \int_A y dA + b_c dA$$

$\underbrace{\int_A y dA}_{S_x=0}$

$$b_x = \frac{S_{x_0}}{A} = y_c$$

$$a_c = \frac{S_{y_0}}{A} = x_c$$

$$S_{x_0} = \sum S_{x_0}^i = \sum y_c^i A_i \quad y_c = \frac{\sum y_c^i A_i}{\sum A_i}$$

Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей

$$I_{x_0} = \int_A (y + b_c)^2 dA = \underbrace{\int_A y^2 dA}_{I_x} + 2 \underbrace{\int_A y b_c dA}_{2b_c * S_x = 0} + \underbrace{\int_A b_c^2 dA}_{b_c^2 A}$$

$$I_{x_0} = I_x + b_c^2 A$$

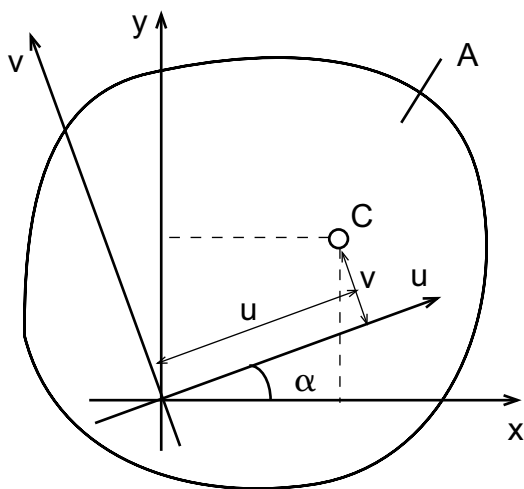
\downarrow \downarrow
 произв. ось центр. ось

$$I_{y_0} = I_y + a_c^2 A$$

$$I_{x_0 y_0} = I_{xy} + a_c b_c A$$

x, y - центральные оси
 x_0, y_0 - произвольные

Изменение моментов инерции при повороте осей



$$u = x \cos \alpha + y \sin \alpha$$

$$v = y \cos \alpha - x \sin \alpha$$

$$\begin{aligned}
 I_{uv} &= \int_A uv dA = \int_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - x \sin \alpha) dA = \\
 &= \cos^2 \alpha \int_A xy dA + \sin \alpha \cos \alpha \int_A y^2 dA - \sin \alpha \cos \alpha \int_A x^2 dA - \sin^2 \alpha \int_A xy dA = \\
 &= \cos 2\alpha I_{xy} + \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha
 \end{aligned}$$

$$I_{uv} = \cos 2\alpha I_{xy} + \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha$$

$$I_u = \int_A v^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA = \\ = \cos^2 \alpha \int_A y^2 dA - 2 \sin \alpha \cos \alpha \int_A xy dA + \sin^2 \alpha \int_A x^2 dA$$

$$I_u = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_v = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha$$

$$I_{uv} = 0 \rightarrow \alpha_0$$

$$\cos 2\alpha_0 I_{xy} + \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha_0 = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}$$

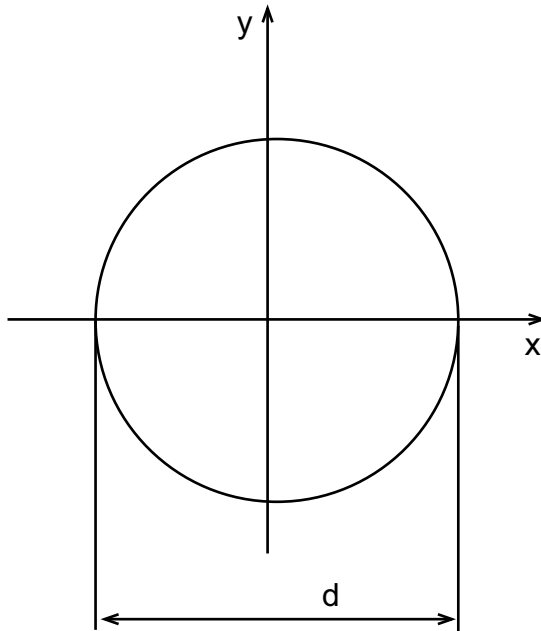
$$\frac{dI_u}{d\alpha} = \underbrace{-I_x 2 \cos \alpha^* \sin \alpha^* + I_y 2 \sin \alpha^* \cos \alpha^* - I_{xy} 2 \cos 2\alpha^*}_{\operatorname{tg} 2\alpha^* = \frac{2I_{xy}}{I_y - I_x}} = 0$$

Относительно главных осей осевые моменты инерции одинаковы.

Относительно главных осей один главный осевой момент инерции максимален, а другой минимален.

Моменты инерции простейших фигур

Круг:



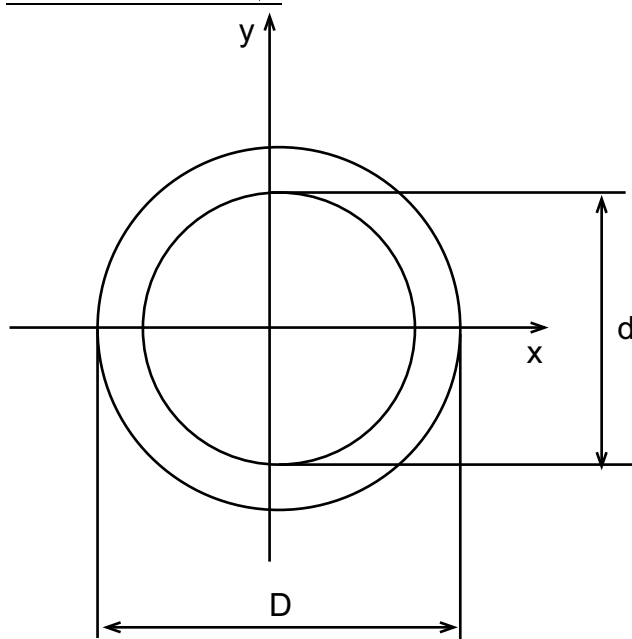
$$I_{xy} = 0$$

$$I_x + I_y = I_p$$

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

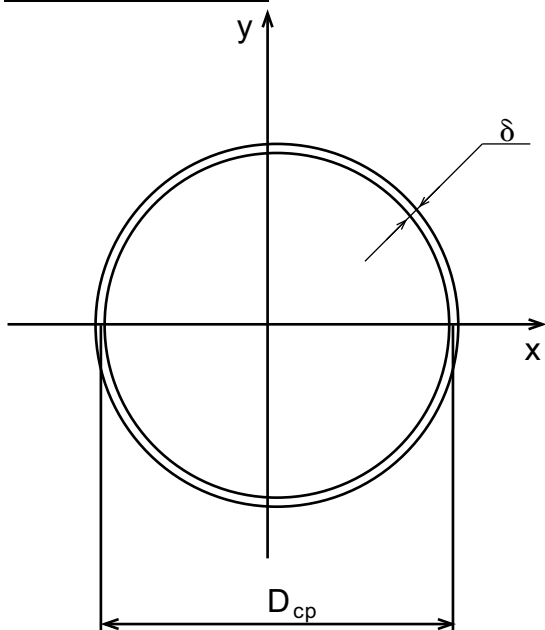
$$I_x = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi d^4}{64}$$

Толстостенное кольцо:



$$I_x = I_y = \frac{\pi D^4}{64} \left[1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right]$$

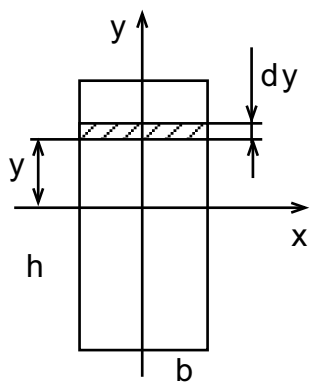
Тонкостенное кольцо:



$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \frac{D_{cp}}{4} \pi D_{cp} \delta$$

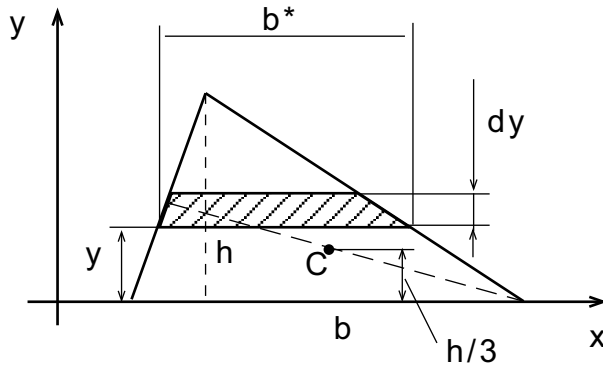
$$I_x = I_y = \frac{\pi D_{cp}^3 \delta}{8}$$

Прямоугольник:



$$I_x = \frac{bh^3}{12}; \quad I_y = \frac{hb^3}{12}; \quad I_{xy} = 0$$

Треугольник:



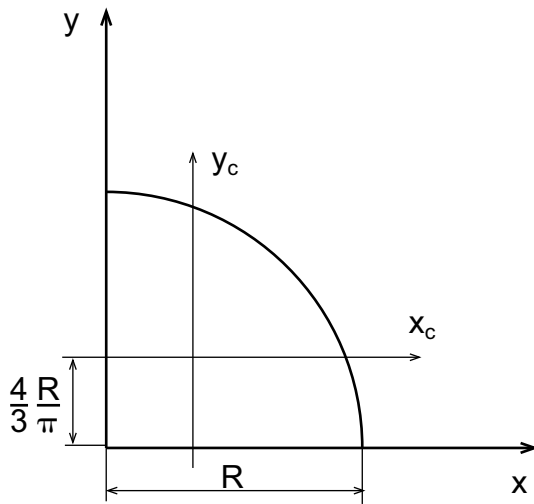
$$\frac{b^*}{b} = \frac{h-y}{h}$$

$$b^* = \frac{b}{h}(h-y)$$

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 b^* dy = \int_0^h y^2 \frac{b}{h}(h-y) dy = \frac{b}{h} \left(h * \frac{h^3}{8} - \frac{h^4}{4} \right) = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_x = I_{x_c} + b_c^2 A; \quad I_{x_c} = I_x - b_c^2 A = \frac{bh^3}{12} - \left(\frac{h}{3}\right)^2 \frac{1}{2}bh = \frac{bh^3}{36}$$

Четверть круга:



$$I_x = I_y = \frac{1}{4} \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi R^4}{16}$$

$$I_{x_c} = I_x - \left(\frac{4R}{3\pi}\right)^2 * \frac{\pi R^4}{4}$$

$$I_{xy} = \int_A xy dA = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^R \rho^3 \sin 2\phi d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{R^4}{4} \sin 2\phi d\phi = -\frac{1}{4} \frac{R^4}{4} \cos 2\phi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{R^4}{8}$$