

**Министерство образования и науки
Российской Федерации**

**«МАТИ» – Российский государственный
технологический университет им. К.Э. Циолковского**

Кафедра «Высшая математика»

Комплексные числа и операционное исчисление

**Справочный материал и методические указания
для студентов и преподавателей**

**Составители: Заварзина И. Ф.
Кулакова Р. Д.**

Москва 2004

Введение

Методические указания содержат материалы для практических занятий по действиям с комплексными числами и операционному исчислению. Введение комплексных чисел связано с решением уравнений вида $x^2 + 1 = 0$. В множестве R не существует решений данного уравнения, однако в множестве комплексных чисел – C решение существует. Множество C содержит элемент, квадрат которого равен (-1) . Так как этот элемент не может быть действительным, то его обозначают через i , т. е. $i^2 = -1$.

Комплексные числа находят широкое применение в задачах физики, геометрии, электротехники. Операционное исчисление изобретено английским ученым О. Хевисайдом, предназначено для решения, дифференциальных уравнений и систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами как однородных так и неоднородных. Многие прикладные задачи описываются такими уравнениями. В частности, методы операционного исчисления позволяют с большим успехом рассчитывать любые процессы в сложных электрических цепях при произвольном внешнем напряжении

Методические указания предназначены для студентов 3 факультета, а также для преподавателей.

1. Комплексные числа. Действия над ними

Комплексное число z - это число вида $z = x + iy$ (алгебраическая форма комплексного числа), где x, y называются соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа z и обозначаются $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$. Число $\bar{z} = x - iy$ называется сопряженным к числу $x + iy$.

$$(z_1 = z_2) \xLeftrightarrow{\det} (\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2)$$

Комплексное число $z = x + iy$ изображается в плоскости $ХОУ$ точкой M с координатами (x, y) или вектором с координатами (x, y) , (рис. 1.1)

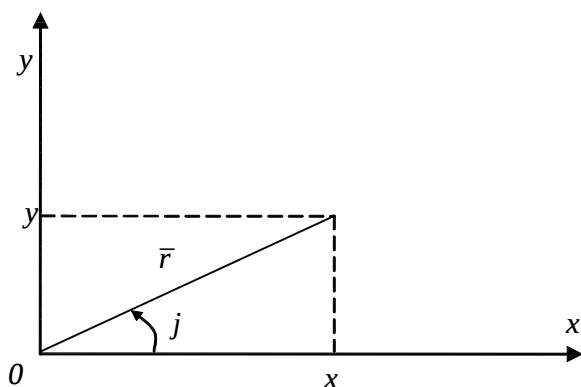


Рис. 1. 1.

Длина r вектора z называется модулем числа z и обозначается $|z|$. Угол j между положительным направлением оси OX и вектором z называется аргументом комплексного числа и обозначается $\operatorname{Arg} z$; он определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π . Значение $\arg z$ аргумента z , удовлетворяющее условию $0 \leq \arg z \leq 2\pi$ или $-\pi < \arg z < \pi$ называется главным. Имеем $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа имеют вид $z = r(\cos j + i \sin j) = re^{ij}$.

Связь между алгебраической и тригонометрической формами устанавливается при помощи формул $x = r \cos f, y = r \sin f, r = \sqrt{x^2 + y^2}, \operatorname{tg} f = \frac{y}{x}$.

Действия на комплексными числами осуществляются по следующим правилам

а) числа заданы в алгебраической форме:

$$z_1 = x_1 + iy_1; \quad z_2 = x_2 + iy_2;$$

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2);$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2};$$

б) числа заданы в тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1 (\cos f_1 + i \sin f_1); \quad z_2 = r_2 (\cos f_2 + i \sin f_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(f_1 + f_2) + i \sin(f_1 + f_2)];$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(f_1 - f_2) + i \sin(f_1 - f_2)];$$

$$z = r (\cos f + i \sin f);$$

$$z^n = r^n (\cos nf + i \sin nf);$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{f + 2kp}{n} + i \sin \frac{f + 2kp}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, (n-1).$$

Задача 1.

Задана комплексные числа: а) $z_1 = -1$; б) $z_2 = 2i$; в) $z_3 = 1+i$; г) $z_4 = -1+2i$; д) $z_5 = -1-i\sqrt{3}$; е) $z_6 = 2-i$.

Представить z_1, z_2, z_3 в тригонометрической, а z_4, z_5, z_6 – в показательной форме и изобразить точками на комплексной плоскости.

Решение:

а) имеем (см. рис. 1.2) $r = 1$; $\varphi = \pi$, $-1 = \cos p + i \sin p$ (1.1)

б) имеем (см. рис. 1.2) $r = 2$; $j = \frac{p}{2}$, $2i = 2 \left(\cos \frac{p}{2} + i \sin \frac{p}{2} \right)$;

в) имеем $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg} j = 1$; согласно рис. 1.2 точка z_3 принадлежит первому квадранту, поэтому $j = \frac{p}{4}$, так что $1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{p}{4} + i \sin \frac{p}{4} \right)$ (1.2);

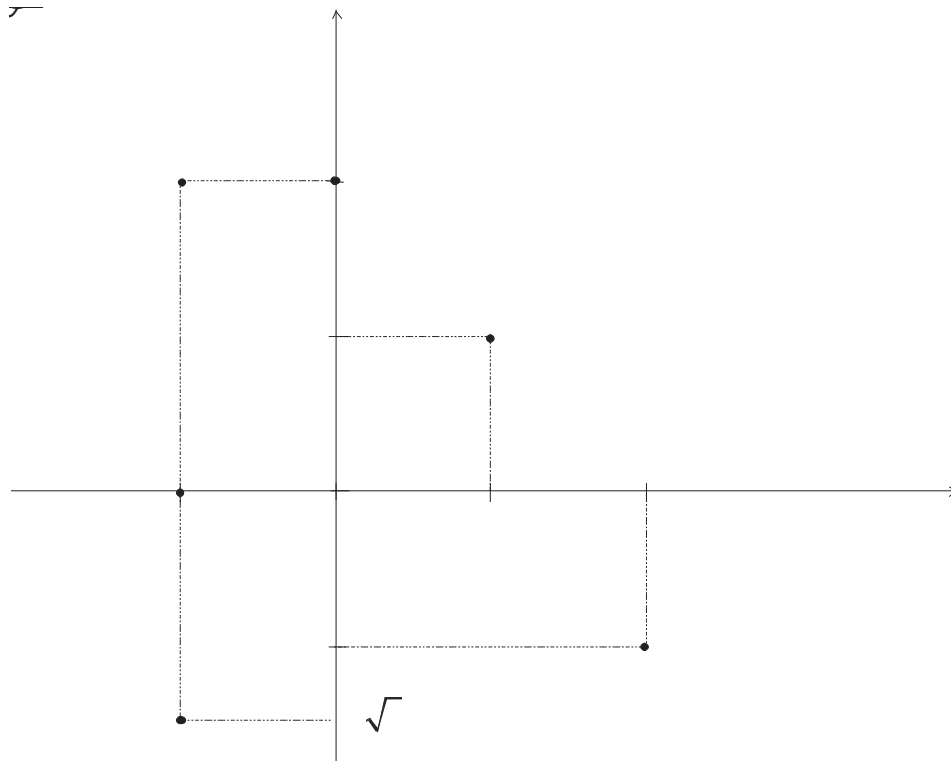


рис. 1.2

г) имеем $r = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$, $\operatorname{tg} j = -2$; согласно рис. 1.2, точка z_4 принадлежит второму квадранту, поэтому $j = p - \operatorname{arctg} 2$, так что $-1+2i = \sqrt{5}e^{i(p - \operatorname{arctg} 2)}$;

д) имеет $r = \sqrt{1+3} = 2$, $\operatorname{tg} 4 = -\sqrt{3}$, согласно рис. 1.2, точка z_5 принадлежит третьему квадранту, поэтому $j = \frac{4}{3}p$, так что $-1-i\sqrt{3} = e^{\frac{4}{3}p}$ (1.3);

е) имеем $r = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$, $\operatorname{tg} j = -\frac{1}{2}$, согласно рис. 1.2, точка z_6 принадлежит четвертому квадранту, поэтому $j = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$, $2-i = \sqrt{5}e^{i\left[\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]}$.

Задача 2.

Найти все значения корней: а) $\sqrt{2i}$; б) $\sqrt[3]{-1}$; в) $\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}$.

Решение:

а) имеем согласно (1.2)

$$\sqrt{2i} = \sqrt{2 \left[\cos\left(\frac{p}{2} + 2kp\right) + i \sin\left(\frac{p}{2} + 2kp\right) \right]} = \sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{p}{4} + kp\right) + i \sin\left(\frac{p}{4} + kp\right) \right], \quad k = 0, 1;$$

$$\text{при } k = 0 \quad (\sqrt{2i})_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{p}{4} + i \sin \frac{p}{4} \right)$$

$$\text{при } k = 1 \quad (\sqrt{2i})_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5p}{4} + i \sin \frac{5p}{4} \right)$$

б) имеем согласно (1.1)

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{\cos(p + 2kp) + i \sin(p + 2kp)} = \cos \frac{(2k+1)p}{3} + i \sin \frac{(2k+1)p}{3}, \quad k = 0, 1, 2;$$

$$\text{при } k = 0 \quad (\sqrt[3]{-1})_1 = \cos \frac{p}{3} + i \sin \frac{p}{3};$$

$$\text{при } k = 1 \quad (\sqrt[3]{-1})_2 = \cos \frac{p}{3} + i \sin \frac{p}{3};$$

$$\text{при } k = 2 \quad (\sqrt[3]{-1})_3 = \cos \frac{5p}{3} + i \sin \frac{5p}{3}.$$

в) Имеем согласно (1.3)

$$\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}} = \sqrt[4]{2 \left[\cos\left(\frac{4}{3}p + 2kp\right) + i \sin\left(\frac{4}{3}p + 2kp\right) \right]} = \sqrt[4]{2} \cos\left(\frac{p}{3} + k\frac{p}{2}\right) + i \sin\left(\frac{p}{3} + k\frac{p}{2}\right),$$

$k = 0, 1, 2, 3;$

$$\text{при } k = 0 \quad (\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}})_1 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{p}{3} + i \sin \frac{p}{3} \right);$$

$$\text{при } k = 1 \quad (\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}})_2 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{5p}{6} + i \sin \frac{5p}{6} \right);$$

$$\text{при } k = 2 \quad (\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}})_3 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{4p}{3} + i \sin \frac{4p}{3} \right)$$

$$\text{при } k = 3 \quad (\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}})_4 = \sqrt[4]{2} \left(\cos \frac{11p}{3} + i \sin \frac{11p}{3} \right)$$

Задача 3.

Представить в алгебраической форме $z = \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}+i} \right)^9$

Решение:

Пусть $z_1 = 1-i$, $z_2 = \sqrt{3}+i$. Имеем $r_1 = |z_1| = \sqrt{2}$, $\operatorname{tg} j_1 = -1$; точка z_1 принадлежит четвертому квадранту, поэтому

$$z = \left(\frac{z_1}{z_2} \right)^9 = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^9 \left[\cos 9(j_1 - j_2) + i \sin 9(j_1 - j_2) \right] = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^9 \left[\cos \frac{57}{4} p + i \sin \frac{57}{4} p \right] = \frac{1+i}{32}$$

Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение

Преобразование Лапласа функции $f(t), t \in R$, которая может принимать комплексные значения, называется функция $F(p)$ комплексного переменного p , определяемая следующим равенством: $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot f(t) dt$, $p = s + is$ (2.1).

Функция $f(t)$ называется оригиналом, если она удовлетворяет условиям: 1) $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$; 2) существуют также постоянные M и S , что $f(t) \leq M \cdot e^{St}$ при $t \geq 0$ ($\inf S = S_0$ называется показателем роста функции $f(t)$); 3) на любом конечном отрезке $[0, T]$ функция $f(t)$ имеет не более чем конечное число точек разрыва первого рода, причем считаем, что $f(0) = f(0+)$.

Функцию $F(p)$ называют изображением для $f(t)$ и при этом записывается $F(p) \stackrel{!}{=} f(t)$ или $f(t) \stackrel{!}{=} F(p)$. $F(p)$ является функцией, заданной в полуплоскости $\operatorname{Re} p > S_0$. Простейшей функцией оригиналом является единичная функция Хевисайде (рис 2.1)

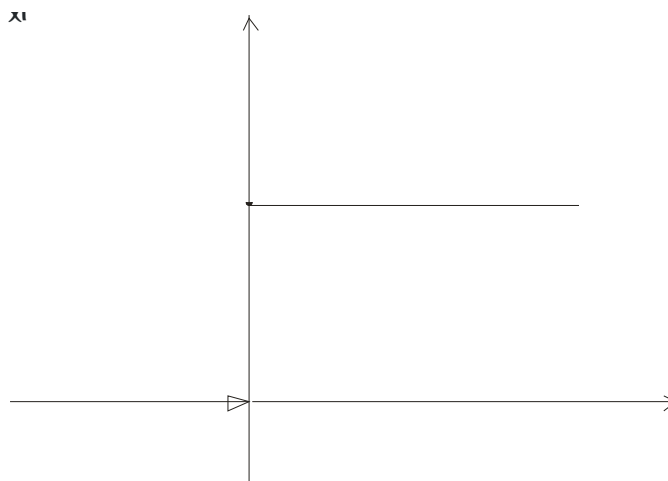


рис. 2.1

$$h(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0 \\ 0 & \text{при } t < 0 \end{cases}$$

В дальнейшем для сокращения записи будем, как правило, писать $f(t) \cdot h(t)$, считая, что $f(t) = 0$ при $t < 0$. Ниже приводятся основные теоремы операционного исчисления.

1) Свойство линейности.

Для постоянной C_k ($k = 1, \bar{n}$) $\sum_{k=1}^n C_k f_k(t) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n C_k F_k(p)$, $\operatorname{Re} p > \max[S_1, \dots, S_n]$ (2.2) (Здесь и всюду в дальнейшем считаем, что $f(t) \Leftrightarrow F(p)$);

2) теорема подобия.

Для любой постоянной $a > 0$, $a \in R$, $f(at) \Leftrightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$, $\operatorname{Re} p > aS_0$

3) Теорема смещения. Умножение оригинала на e^{at} соответствует запаздыванию изображения на a , т.е.

$$e^{at} f(t) \Leftrightarrow F(p-a), \operatorname{Re}(p-a) > S_0, \quad (2.4)$$

a - некоторая постоянная (действительная или комплексная величина).

4) Теорема запаздывания. Запаздыванию включения оригинала на $t > 0$ соответствует умножению изображения на e^{-pt} , т.е.

$$f(p-t) \Leftrightarrow e^{-pt} \cdot F(p), \operatorname{Re} p > S_0, \quad (2.5)$$

(при $t < t$ в силу первого условия, налагаемого на оригинал, $f(t-t) \equiv 0$).

5) Теорема о дифференцировании оригинала.

Если $f(t)$ и ее производные $f^{(k)}(t)$ ($k = 1, 2, \mathbf{K}, n$) являются оригиналами, то для любого $k = 1, 2, \mathbf{K}, n$

$$f^{(k)}(t) \Leftrightarrow pF(p) - p^{k-1}f(0) - p^{k-2}f'(0) - \mathbf{K} - f^{(k-1)}(0) \quad (2.6)$$

В частности

$$f'(t) \Leftrightarrow pF(p) - f(0), \operatorname{Re} p > S_0 \quad (2.7)$$

6) Интегрирование оригинала. Интегрирование оригинала сводится к делению изображения на p , т.е.

$$\int_0^t f(t) dt \Leftrightarrow \frac{F(p)}{p}, \operatorname{Re} p > S_0. \quad (2.8)$$

7) Дифференцирование изображения.

Если $F(p) \Leftrightarrow f(t)$, то $F'(p) \Leftrightarrow tf(t)$, в общем случае $F^{(n)}(p) \Leftrightarrow (-t)^n \cdot f(t)$ (2.9)

Задача 1.

Выяснить, какие из данных функций являются оригиналами:

$$\text{а) } f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{(3+4i)t}, & t \geq 0 \end{cases} \quad \text{б) } f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{t-4}, & t \geq 0 \end{cases}$$

Решение. а) функция $f(t)$ является оригиналом, т.к. удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к оригиналу: при $t < 0$ обращается в нуль, непрерывна, а для $t \geq 0$ $|f(t)| = |e^{(3+4i)t}| = e^{3t} |\cos 4t + i \sin 4t| = e^{3t} \leq M e^{st}$ при $M \geq 1, S \geq 3 (S_0 = \inf s = 3)$;

б) функция $f(t)$ не является оригиналом, т.к. в точке $t = 4$, принадлежащей промежутку $[0, +\infty[$, она имеет разрыв второго рода.

Задача 2. Найти изображение функций-оригиналов, используя определение:

$$\text{а) } f(t) = h(t); \quad \text{б) } f(t) = e^{5t}.$$

Решение. Для функции $f(t) = h(t)$ имеем

$$F(p) = \int_0^{+\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p}, \operatorname{Re} p > 0,$$

так как

$$|e^{-pt}| = |e^{-(s+is)t}| = e^{-st} |\cos st - i \sin st| = e^{-st}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st} = 0 \text{ при } s > 0, s = \operatorname{Re} p > 0.$$

Для функции $f(t) = e^{5t}$ имеем

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot e^{5t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-5)t} dt = -\frac{1}{p-5} e^{-(p-5)t} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-5} \text{ при } \operatorname{Re} p > 5.$$

Задача 3. Найти изображения следующих функций-оригиналов, используя теоремы операционного исчисления.

$$\text{а) } \operatorname{sh} 2t; \quad \text{б) } t \operatorname{sh} 2t; \quad \text{в) } \cos 3t; \quad \text{г) } e^t \cdot \cos 3t; \quad \text{д) } t^n, n \in \mathbb{N}.$$

Решение. а) Имеем $f(t) = \operatorname{sh} 2t = \frac{(e^{2t} - e^{-2t})}{2}$. Используя теорему смещения для

$$e^{2t} \rightarrow \frac{1}{p-2}; e^{-2t} \rightarrow \frac{1}{p+2}$$

и окончательно, учитывая свойство линейности (2.2), запишем

$$\operatorname{sh} 2t = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-2} - \frac{1}{p+2} \right) = \frac{2}{p^2 - 4};$$

б) для функции $f(t) = t \operatorname{sh} 2t$ используем теорему о дифференцировании изображения;

$$\text{если } \operatorname{sh} 2t \rightarrow \frac{2}{p^2 - 4}, \text{ то } t \operatorname{sh} 2t \rightarrow -\left(\frac{2}{p^2 - 4}\right)' = \frac{4p}{(p^2 - 4)^2};$$

$$\text{в) имеем } \cos 3t = \frac{e^{i3t} + e^{-i3t}}{2}.$$

Применяя теорему смещения к e^{i3t} и e^{-i3t} и используя свойство линейности (2.2), получаем

$$\cos 3t = \frac{1}{2}(e^{i3t} + e^{-i3t}) \rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p - 3i} + \frac{1}{p + 3i}\right) = \frac{p}{p^2 + 9};$$

г) для функции $f(t) = e^t \cdot \cos 3t$ воспользуемся результатом предыдущего примера и теоремой смещений (2.4):

$$\text{если } f(t) = \cos 3t \rightarrow \frac{p}{p^2 + 9}, \text{ то } f(t) \cdot e^t = \cos 3t \cdot e^t \rightarrow \frac{p - 1}{(p - 1)^2 + 9};$$

д) $f(t) = t^n$. Найти $F(p)$.

$$\text{Если } 1 \rightarrow \frac{1}{p}, \text{ то } t \rightarrow -\left(\frac{1}{p}\right)' = \frac{1}{p^2}; \text{ далее для } t^2 \rightarrow \frac{2!}{p^3}, t^3 \rightarrow \frac{3!}{p^4}, \dots, t^n \rightarrow \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Ниже приводится таблица основных операционных соотношений.

Таблица.

№ п/п	$f(t)$	$F(p)$
1	$h(t)$	$\frac{1}{p}$
2	$h(t-t), t > 0$	$\frac{1}{p} e^{-tp}$
3	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
4	$t^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
5	$t^n \cdot e^{at}, n \in \mathbb{N}$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
6	$\sin wt$	$\frac{w}{p^2 + w^2}$
7	$\cos wt$	$\frac{p}{p^2 + w^2}$
8	$\operatorname{sh} t$	$\frac{w}{p^2 - w^2}$
9	$\operatorname{ch} t$	$\frac{p}{p^2 - w^2}$
10	$e^{at} \sin wt$	$\frac{w}{(p-a)^2 + w^2}$
11	$e^{at} \cos wt$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + w^2}$
12	$t \sin wt$	$\frac{2pw}{(p^2 + w^2)^2}$
13	$t \cos wt$	$\frac{p^2 - w^2}{(p^2 + w^2)^2}$

Задача 4. Найти изображение следующих функций-оригиналов, используя теоремы операционного исчисления и таблицу.

а) $f(t) = 3 - 5t^2 + 2 \sin 4t - 3e^{-6t}$;

б) $f(t) = \cos^2 3t$; в) $f(t) = te^{5t}$.

Решение. а) используя свойство линейности и таблицу, получи

$$F(p) = \frac{3}{p} - 5 \frac{2!}{p^3} + 2 \frac{4}{p^2 + 16} - 3 \frac{1}{p + 6} = \frac{3}{p} - \frac{10}{p^3} + \frac{8}{p^2 + 16} - \frac{3}{p + 6};$$

б) применив формулу, получим

$$\cos^2 a = \frac{1}{2}(1 + \cos 2a)$$

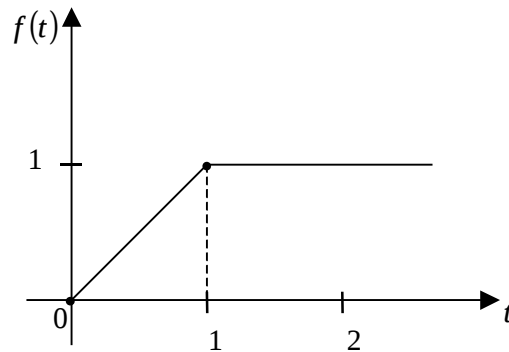
и используя свойство линейности, можем записать

$$\cos^2 3t = \frac{1}{2}(1 + \cos 6t) \Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 36} \right);$$

в) учитывая соотношение $t \Rightarrow \frac{1}{p^2}$ и теорему смещения

$$e^{at} f(t) \Rightarrow F(p - a), \text{ получим } te^{5t} \Rightarrow \frac{1}{(p - 5)^2}.$$

Задача 5. Найти изображение для функции-оригинала, представленного графически (рис. 2.2).



Решение. Имеем

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ 1, & t > 1 \end{cases}.$$

Это эквивалентно записи

$$f(t) = th(t) - th(t-1) + h(t-1) = th(t) - (t-1)h(t-1)$$

И теперь, используя теорему запаздывания, таблицу и свойство линейности, получим

$$th(t) - (t-1)h(t-1) \rightarrow \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} e^{-p}.$$

3. Нахождение оригинала по изображению.

Задача 1. Найти оригинал для изображения

$$F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$$

при помощи разложения на простейшие дроби.

Решение. Разложим $F(p)$ на сумму простейших дробей

$$\frac{1}{p(p-1)(p^2+4)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p-1} + \frac{Cp+D}{p^2+4}.$$

Найдем неопределенные коэффициенты A, B, C, D . Так как

$$1 \equiv A(p-1)(p^2+4) + Bp(p^2+4) + Cp^2(p-1) + Dp(p-1),$$

то, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях p , получаем

$$A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{1}{5}, \quad C = \frac{1}{20}, \quad D = -\frac{1}{5}.$$

Таким образом,

$$F(p) = -\frac{1}{4p} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{(p-1)} + \frac{1}{20} \cdot \frac{p}{(p^2+4)} - \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{(p^2+4)} \rightarrow -\frac{1}{4} + \frac{1}{5} e^t + \frac{1}{20} \cos 2t - \frac{1}{10} \sin 2t.$$

Свертка оригиналов. Пусть $f(t)$ и $g(t)$ - функции-ориентиры и $f(t) \rightarrow F(p)$,

$g(t) \rightarrow G(p)$. По определению, сверткой оригиналов $(f * g)(t)$ называется интеграл

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t)g(t-t)dt = \int_0^t f(t-t)g(t)dt \quad (3.1)$$

По теореме сложения изображений свертки оригиналов $(f * g)(t)$ соответствует произведение изображений

$$(f * g)(t) \rightarrow F(p) \cdot G(p).$$

Задача 2. Найти свертку функций $\sin t$ и $\cos t$.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned}\sin t * \cos t &= \int_0^t \sin(t-t) \cos t dt = \frac{1}{2} \int_0^t [\sin(t-2t) + \sin t] dt = \\ &= \frac{1}{2} t \sin t \Big|_0^t + \frac{1}{4} \cos(t-2t) \Big|_0^t = \frac{1}{2} t \sin t.\end{aligned}$$

Задача 3. Восстановить оригинал по изображению $F(p) = \frac{p}{(p^2+1)^2}$ при помощи свертки.

Решение. Представим $F(p)$ как произведение двух функций и используя теорему умножения, запишем

$$\frac{p}{(p^2+1)^2} = \frac{p}{p^2+1} \cdot \frac{1}{p^2+1} \stackrel{!}{=} \sin t * \cos t = \frac{1}{2} t \sin t. \quad (\text{см. задачу 2})$$

4. Решение линейных дифференциальных уравнений и систем.

Рассмотрим применение правил и теорем операционного исчисления к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и их систем при заданных начальных условиях. Предлагаем, что искомое решение, его производные и правая часть дифференциального уравнения являются оригиналами.

Схема решения дифференциального уравнения.

1. Искомая функция, ее производные, входящие в данное уравнение, правая часть уравнения заменяются их изображениями. В результате получается так называемое операторное уравнение.
2. Решаем операторное уравнение относительно изображения искомой функции.
3. Переходим от изображения искомой функции к оригиналу.

Схема решения систем дифференциальных уравнений такая же.

Задача 1. Решить дифференциальное уравнение

$$y'' + y' - 12y = 3, \text{ если } y(0) = 1, y'(0) = 0$$

Решение. Пусть $y = y(t)$ - искомое решение.

$$y \stackrel{!}{=} \bar{y}(p)$$

$$y' \stackrel{!}{=} p\bar{y}(p) - y(0) = p\bar{y}(p) - 1$$

$$y'' \stackrel{!}{=} p^2\bar{y}(p) - py(0) - y'(0) = p^2\bar{y}(p) - p$$

$$3! \frac{3}{p}.$$

Запишем операторное уравнение

$$p^2 \bar{y}(p) - p + p\bar{y} - 1 - 12\bar{y}(p) = \frac{3}{p}$$

или

$$\bar{y}(p) = \frac{3 + p + p^2}{p^3 + p^2 - 12p} = \frac{3 + p + p^2}{p(p+4)(p-3)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+4} + \frac{C}{p-3}$$

$$3 + p + p^2 = A(p+4)(p-3) + Bp(p-3) + Cp(p+4).$$

$$\text{Находим } A, B, C. \quad A = -\frac{1}{4}, \quad B = \frac{5}{28}, \quad C = \frac{5}{7}.$$

Итак,

$$\bar{y}(p) = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{p} + \frac{5}{28} \cdot \frac{p}{(p+4)} + \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{(p-3)} = -\frac{1}{4} + \frac{5}{28} e^{-4t} + \frac{5}{7} e^{3t}.$$

Задача 2. Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'' + 5y' - 2x = 0, \\ y'' - 5x' - 4y = 0, \end{cases}$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$

Решение. Пусть $x(t) \rightarrow \bar{x}(p)$, $y(t) \rightarrow \bar{y}(p)$. Тогда

$$x'(t) \rightarrow p\bar{x}(p); \quad y'(t) \rightarrow p\bar{y}(p); \quad x''(t) \rightarrow p^2\bar{x}(p) - 1; \quad y''(t) \rightarrow p^2\bar{y}(p).$$

Преобразованная система имеет вид

$$\begin{cases} (p^2 - 4)\bar{x}(p) + 5p\bar{y}(p) = 1, \\ -5p\bar{x}(p) + (p^2 - 4)\bar{y}(p) = 0. \end{cases}$$

Определяем $\bar{x}(p)$, $\bar{y}(p)$ по правилу Крамера

$$\bar{x}(p) = \frac{p^2 - 4}{(p^2 + 1)(p^2 + 16)}; \quad \bar{y}(p) = \frac{5p}{(p^2 + 1)(p^2 + 16)}$$

$$\bar{a}(p) = \frac{p^2 - 4}{(p^2 + 1)(p^2 + 16)} = \frac{A_1 p + B_1}{p^2 + 1} + \frac{A_2 p + B_2}{p^2 + 16}$$

Вычислим A_1, A_2, B_1, B_2 , получим

$$A_1 = A_2 = 0; \quad B_1 = -\frac{1}{3}; \quad B_2 = \frac{4}{3}$$

Итак,

$$\bar{x}(p) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{p^2 + 1} + \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{p^2 + 16} = \frac{1}{3} \cdot (-\sin t + \sin 4t) \Rightarrow$$

$$\bar{x}(p) = \frac{1}{3} \cdot (\sin 4t - \sin t)$$

$$\bar{y}(t) = \frac{5p}{(p^2 + 1)(p^2 + 16)} = \frac{M_1 p + N_1}{p^2 + 1} + \frac{M_2 p + N_2}{p^2 + 16}$$

Вычислим M_1, M_2, N_1, N_2 , получим $M_1 = \frac{1}{3}, M_2 = -\frac{1}{3}, N_1 = N_2 = 0$

$$\text{Тогда } \bar{y}(t) = \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{p^2 + 1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{p}{p^2 + 16} = \frac{1}{3} (\cos t - \cos 4t)$$

$$\text{Итак, } x(t) = \frac{1}{3} (\sin 4t - \sin 3t); y(t) = \frac{1}{3} (\cos t - \cos 4t).$$

Рассмотрим решение дифференциальных уравнений при нулевых начальных условиях с использованием интеграла Дюамеля.

Интеграл Дюамеля.

Если $f(t) = F(t)$ и $g(t) = G(t)$, то

$$pF(p)G(p) = f(t)g(0) + \int_0^t f(t)g'(t-t)dt \quad (4.1)$$

или

$$pF(p)G(p) = f(t)g(0) + \int_0^t g'(t) f(t-t)dt \quad (4.1')$$

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = h(t)$$

при $y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$ Если

$$y(t) = \bar{y}(p), y'(t) = p\bar{y}(p), \dots, y^{(n)}(t) = p^n \bar{y}(p), h(t) = H(p),$$

то получим

$$a_0 p^n \bar{y}(p) + a_1 p^{n-1} \bar{y}(p) + \dots + a_n \bar{y}(p) = H(p)$$

или $\bar{y}(p) \cdot B(p) = H(p)$, где $B(p)$ - многочлен n-ой степени;

отсюда

$$\bar{y}(p) = \frac{H(p)}{B(p)} \quad (4.2)$$

Если рассмотреть ещё одно дифференциальное уравнение, у которого правая часть равна единице,

$$a_0 y_1^{(n)} + a_1 y_1^{(n-1)} + \dots + a_n y_1 = 1$$

то при тех же нулевых начальных условиях в изображениях получим уравнение

$$\bar{y}_1(p) B(p) = \frac{1}{p}$$

$$\text{Отсюда } B(p) = \frac{1}{p \bar{y}_1(p)} \quad (4.3)$$

Подставим (4.3) в (4.2), получим

$$\bar{y}(p) = p H(p) \bar{y}_1(p) \quad (4.4)$$

Используя интеграл Дюамеля (4.1') для $f(t) = h(t)$, $g(t) = y(t)$ и учитывая, что $g(0) = y(0) = 0$, получаем

$$pH(p)\bar{y}(p) = y(t) = \int_0^t h(t) y_1'(t-t) dt = \int_0^t y_1'(t) h(t-t) dt \quad (4.5)$$

Итак, достаточно решить уравнение с правой частью равной единице, чтобы при помощи интеграла (4.5) получить решения при различных правых частях.

Задача 3.

Найти частное решение дифференциального уравнения, используя интеграл Дюамеля:

$$y'' + y' = t; \quad y(0) = y'(0) = 0 \quad (4.7)$$

Пусть $y_1(t) = \bar{y}(p)$, тогда $y_1'(t) = p\bar{y}_1(p)$, $y_1''(t) = p^2\bar{y}_1(p)$, $1 = \frac{1}{p}$.

Получим уравнение для изображения $\bar{y}(p)$

$$p^2\bar{y}_1(p) + p\bar{y}_1(p) = \frac{1}{p}$$

$$\text{Отсюда } \bar{y}_1(p) = \frac{1}{p^2(p+1)} = te^{-t} = \int_0^t (t-t) \cdot e^{-t} dt = t - 1 + e^{-t}$$

Возвращаясь к первоначальному уравнению для $y(t)$, Запишем

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t y_1'(t) h(t-t) dt = \int_0^t (1 - e^{-t})(t-t) dt = \\ &= \int_0^t [(t-t) - (te^{-t} + te^{-t})] dt = (tt - \frac{t^2}{2} + te^{-t} - te^{-t} - e^{-t})|_0^t = \\ &= \frac{t^2}{2} - e^{-t} + 1 \end{aligned}$$

Следует отметить, что преимущество операционного метода решения дифференциальных уравнений состоит в том, что благодаря этому методу мы заменяем решение дифференциального уравнения на решение алгебраического уравнения, что сильно упрощает вычисление.

Применение методов операционного исчисления в задачах электротехники.

Методы операционного исчисления широко используются в решениях специальных задач электротехники.

Задача 1.

Включение дополнительного источника ЭДС в цепь с ненулевыми начальными условиями.

Рассмотрим электрическую цепь с ненулевыми начальными условиями (рис. 5.1), где r – сопротивление; L – индуктивность; C – ёмкость конденсатора; k – выключатель.

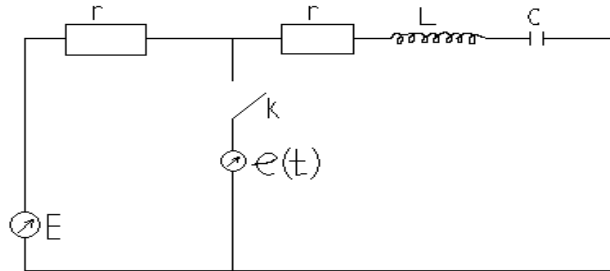


рис 5.1

Эта цепь характеризуется тем, что при отключении ЭДС E в цепи происходит зарядка конденсатора. После зарядки конденсатора ток в цепи становится равным нулю. Требуется найти ток $i(t)$ после подключения к цепи дополнительной ЭДС $e(t)$.

По второму закону Кирхгофа (алгебраическая сумма падения напряжения на сопротивлениях равна алгебраической сумме действующих в цепи ЭДС) для момента времени $t \geq 0$ имеем

$$e(t) = ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt + u_c(0), \quad (5.1)$$

где $\frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt$ – напряжение на конденсаторе;

$u_c(0)$ – начальное напряжение на конденсаторе, обусловленное тем, что конденсатор уже был ранее заряжен.

Решение.

Применяя к интегро-дифференциальному уравнению (5.1) преобразование Лапласа, запишем

$$i(t) = J(p); \frac{di}{dt} = pJ(p) - i(0);$$

$$\int_0^t i(t) dt = \frac{1}{p} J(p); e(t) = E(p); u_c(0) = \frac{u_c(0)}{p};$$

где $i(0)$ – начальный ток в цепи. Используя указанные соотношения, получаем алгебраическое уравнение в изображениях

$$E(p) = rJ(p) + pJ(p) - Li(0) + \frac{J(p)}{pC} + \frac{u_c(0)}{p}, \text{ где неизвестной величиной является } J(p).$$

Остальные величины известны ($E(p), i(0), u_c(0), L, r, C$). Из (5.2) получаем

$$J(p) = \frac{pE(p) + Lpi(0) - u_c(0)}{Lp^2 + rp + \frac{1}{C}}. \quad (5.3)$$

Рассмотрим конкретный пример. Пусть $e(t) = 1B; i(0) = 1A; u_c(0) = 1B; L = 1Гн; r = 2Ом; C = 1Ф$. Применяя преобразование Лапласа, получаем $U = \frac{U}{p}$; следовательно, $E(p) = \frac{1}{p}$. С учётом этих условий из (5.3) получаем

$$J(p) = \frac{p}{p^2 + 2p + 1} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2} = e^{-t} - te^{-t} = i(t). \quad (5.4)$$

Замечание. Из полученного решения (5.4) следует, что $i(t) \rightarrow 0$, при $t \rightarrow +\infty$, т.е.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} i(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (e^{-t} - te^{-t}) = 0$ Это означает что за некоторое время конденсатор дополнительно зарядится и ток станет равным нулю.

Задача 2.

Определить ток в цепи, состоящей из последовательно соединённых сопротивления r и конденсатора C , если в момент $t=0$ цепь подсоединяется к источнику ЭДС (рис 5.2) в виде треугольного импульса (рис 5.3).

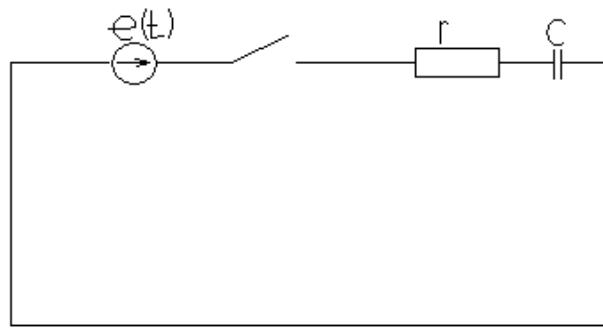


рис 5.2

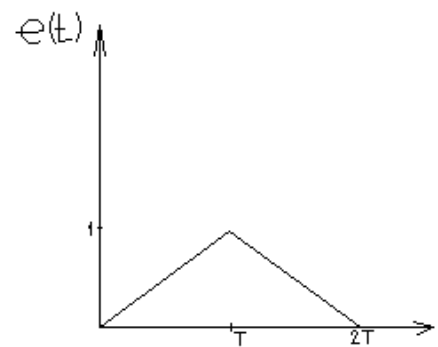


рис 5.3

В задаче задано

$$e(t) = \begin{cases} \frac{t}{T}, & 0 \leq t \leq T \\ -\frac{1}{T}(t-2T), & T \leq t \leq 2T \end{cases}$$

Решение.

Используя второй закон Кирхгофа, получим интегральное уравнение для рассматриваемого контура

$$e(t) = ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(t) dt \quad (5.5)$$

Решение уравнения (5.5) выразим при помощи интеграла Дюамеля (4.1)

$$i(t) = e(0)j(t) + \int_0^t e'(t')j(t-t') dt', \quad (5.6)$$

где $j(t)$ - решение вспомогательного уравнения

$$1 = rj(t) + \frac{1}{C} \int_0^t j(t) dt \quad (5.7)$$

Применяя преобразование Лапласа, имеем

$$j(t) = J(p); \frac{1}{C} \int_0^t j(t) dt = \frac{1}{p} J(p); 1 = \frac{1}{p}$$

Уравнение (5.7) преобразуется к алгебраическому уравнению для нахождения $J(p)$

$$\frac{1}{p} = rJ(p) + \frac{1}{Cp} J(p), \quad \text{откуда} \quad J(p) = \frac{1}{r(p + \frac{1}{rC})} = j(t) = \frac{1}{r} e^{-t/Cr} \quad (5.8)$$

Подставляя найденное решение (5.8) вспомогательного уравнения (5.7) в интеграл Дюамеля (5.6) получаем решение исходного уравнения (5.5)

$$i(t) = \frac{1}{rT} \int_0^t e^{-\frac{t-t}{rC}} dt - \frac{1}{rT} \int_T^{2T} e^{-\frac{t-t}{rC}} dt = -\frac{C}{T} e^{-\frac{t}{rC}} (1 - e^{-\frac{T}{rC}})^2.$$

Пример контрольной работы по операционному исчислению и комплексным числам.

Вариант 1.

1. Восстановить оригинал по изображению:

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + 2p + 5}$$

2. Решить задачу Коши операторным методом:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2t}, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

3. Найти все значения корней

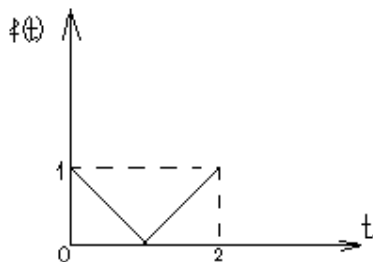
а) $\sqrt[3]{-1}$;

б) $\sqrt[4]{1+i}$;

4. Представить в алгебраической форме:

а) $(1+i\sqrt{3})^8$; б) $\left(\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^6$

5. Найти изображение оригинала, заданного графически



6. Решить систему

$$\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = 10x - 4y \end{cases}; x(0) = 1; y(0) = 5$$

Вариант 2.

1. Найти изображение функции:

$$f(t) = t^2 \sin 3t \cdot e^{2t}$$
2. Решить задачу Коши операторным методом:

$$y'' - 4y' + 5y = t, y(0) = 2, y'(0) = -1$$
3. Найти все значения корней

$$a) \sqrt[4]{16};$$

$$б) \sqrt[3]{8i};$$
4. Представить в алгебраической форме:

$$a) (-1 - i\sqrt{3})^8; б) \left(\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}} \right)^9$$
5. Восстановить оригинал по изображению

$$F(p) = \frac{p+1}{(p-1)(p+2)(p-3)}$$
6. Решить систему

$$\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}; x(0) = -1; y(0) = 0$$

Вариант 3.

1. Восстановить оригинал по изображению:

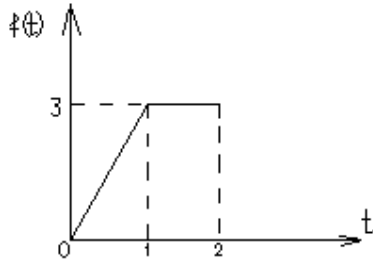
$$F(p) = \frac{p}{p^2 + 2p + 5}$$
2. Решить задачу Коши операторным методом:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2t}, y(0) = 1, y'(0) = 0.$$
3. Найти все значения корней

$$a) \sqrt[3]{-8};$$

$$б) \sqrt[4]{1-i};$$
4. Представить в алгебраической форме:

$$a) (-1 + i\sqrt{3})^7; б) \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^5$$
5. Найти изображение оригинала, заданного графически:



6. Решить систему

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -x - 3y \end{cases}; x(0) = -1; y(0) = 5$$

Вариант 4.

1. Найти изображение функции:

$$f(t) = te^{-t} \cos 2t$$

2. Решить задачу Коши операторным методом:

$$y'' + 4y' = \cos 3t; y(0) = 1; y'(0) = 0$$

3. Найти все значения корней

$$a) \sqrt[6]{-1};$$

$$б) \sqrt[3]{i};$$

4. Представить в алгебраической форме:

$$a) (\sqrt[3]{3} + i)^7; б) \left(\frac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \right)^5$$

5. Восстановить оригинал по изображению

$$F(p) = \frac{p^2 + 1}{p^2(p+1)^2}$$

6. Решить систему

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + 4y \end{cases}; x(0) = -1; y(0) = 0.$$

Вариант 5.

1. Восстановить оригинал по изображению:

$$F(p) = \frac{3}{p^2 - 4p - 5}$$

2. Решить задачу Коши операторным методом:

$$y'' - 2y' + 5y = e^{2t} \sin t, y(0) = 2, y'(0) = 0.$$

3. Найти все значения корней

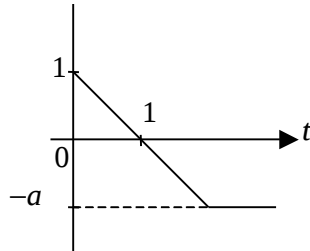
$$a) \sqrt[3]{1};$$

б) $\sqrt[3]{-1-i}$

4. Представить в алгебраической форме:

а) $(\sqrt{3}-i)^8$; б) $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}}\right)^4$

5. Найти изображение оригинала, заданного графически:



6. Решить систему

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -5x - 3y \end{cases}; x(0) = 1; y(0) = 0$$

Вариант 6.

3. Найти изображение функции:

$$f(t) = t^2 e^{-t} \sin t$$

4. Решить задачу Коши операторным методом:

$$y'' + 3y' - 10y = te^{3t}; y(0) = 2; y'(0) = -1$$

3. Найти все значения корней

а) $\sqrt[6]{-64}$;

б) $\sqrt[4]{-1-i\sqrt{3}}$

4. Представить в алгебраической форме:

а) $(-\sqrt{3}+i)^7$; б) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^8$

6. Восстановить оригинал по изображению

$$F(p) = \frac{1}{p(p-1)(p^2+4)}$$

6. Решить систему

$$\begin{cases} x' = -x - 2y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}; x(0) = 0; y(0) = 1.$$

Вариант 7.

1. Восстановить оригинал по изображению:

$$F(p) = \frac{1}{p^2(p^2 + 1)}$$

2. Решить задачу Коши операторным методом:

$$y'' + 4y' + 13y = 10te^{2t}, y(0) = 5, y'(0) = 0.$$

3. Найти все значения корней

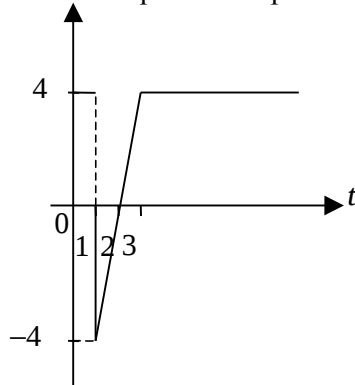
а) $\sqrt[3]{-8i}$;

б) $\sqrt[4]{-1+i\sqrt{3}}$;

4. Представить в алгебраической форме:

а) $(1+i)^{14}$; б) $\left(\frac{-1+i}{-1-i}\right)^5$

5. Найти изображение оригинала, заданного графически:



6. Решить систему

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -2x + 4y \end{cases}; x(0) = 0; y(0) = -1$$

Вариант 8.

1. Найти изображение функции:

$$f(t) = te^t \operatorname{ch} 3t$$

2. Решить задачу Коши операторным методом:

$$y'' - 3y' + 2y = e^{2t} \sin t; y(0) = 3; y'(0) = 1$$

3. Найти все значения корней

а) $\sqrt[6]{-8}$;

б) $\sqrt[4]{\sqrt{3}-i}$

4. Представить в алгебраической форме:

а) $(-1-i)^{10}$;

б) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^6$

5. Восстановить оригинал по изображению

$$F(p) = \frac{2p+3}{p^2+1}$$

6. Решить систему

$$\begin{cases} x' = 6x - y \\ y' = 3x + 2y \end{cases}; x(0) = 1; y(0) = -1.$$

Вариант 9.

1. Восстановить оригинал по изображению:

$$F(p) = \frac{p}{(p+1)^2}$$

2. Решить задачу Коши операторным методом:

$$y'' - 2y' + 10y = te^{-t}, y(0) = 1, y'(0) = -2.$$

3. Найти все значения корней

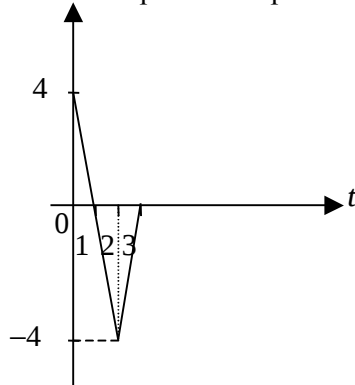
а) $\sqrt{2i}$;

б) $\sqrt[3]{-\sqrt{3}+i}$

4. Представить в алгебраической форме:

а) $(-1+i)^{14}$; б) $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{12}$

5. Найти изображение оригинала, заданного графически:



6. Решить систему

$$\begin{cases} x' = 4x + 5y \\ y' = -4x - 4y \end{cases}; x(0) = 0; y(0) = 1$$

Вариант 10.

1. Найти изображение функции:

$$f(t) = e^{3t} \sin^2 t$$

2. Решить задачу Коши операторным методом:

$$y'' + 6y' + 13y = 5t^2; y(0) = 4; y'(0) = 0$$

3. Найти все значения корней

а) $\sqrt[4]{-81}$;

б) $\sqrt[4]{-\sqrt{3}-i}$

4. Представить в алгебраической форме:

а) $(-\sqrt{3}-i)^8$; б) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^9$

5. Восстановить оригинал по изображению

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 6p + 10}$$

6. Решить систему

$$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = x - y \end{cases}; x(0) = 1; y(0) = -2.$$

Вариант 11.

1. Восстановить оригинал по изображению:

$$F(p) = \frac{1}{(p-1)^2(p+2)}$$

2. Решить задачу Коши операторным методом:

$$y'' - 5y' + 6y = e^{-t} \cos 2t, y(0) = 3, y'(0) = 1.$$

3. Найти все значения корней

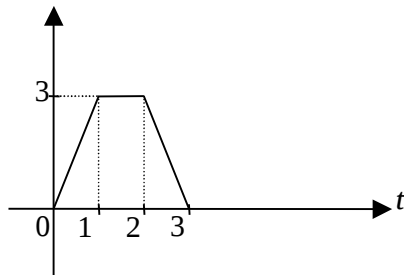
а) $\sqrt[3]{8}$;

б) $\sqrt[4]{2+2i}$

4. Представить в алгебраической форме:

а) $(2+2i)^6$; б) $\left(\frac{-1-i}{-1+i}\right)^3$

5. Найти изображение оригинала, заданного графически:



6. Решить систему

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = 4x - 2y \end{cases}; x(0) = -1; y(0) = 0$$

Вариант 12.

1. Найти изображение функции:

$$f(t) = t \cos^2 3t$$

2. Решить задачу Коши операторным методом:

$$y'' - 6y' + 10y = t \sin 2t; y(0) = 2; y'(0) = 0$$

3. Найти все значения корней

а) $\sqrt[3]{-125}$;

б) $\sqrt[3]{2-2i}$

4. Представить в алгебраической форме:

а) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} \right)^5$; б) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i} \right)^5$

5. Восстановить оригинал по изображению

$$F(p) = \frac{p^2}{(p^2+1)^2}$$

6. Решить систему

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = -4x + 4y \end{cases}; x(0) = -1; y(0) = 2.$$

Вариант 13.

1. Восстановить оригинал по изображению:

$$F(p) = \frac{p+1}{p^2-4p+13}$$

2. Решить задачу Коши операторным методом:

$$y'' + 2y' + 5y = st^2, y(0) = 4, y'(0) = -1.$$

3. Найти все значения корней

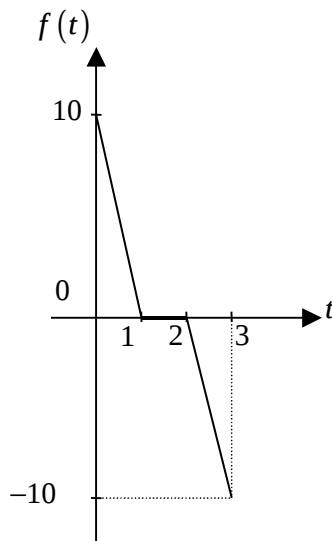
а) $\sqrt{9i}$;

б) $\sqrt[4]{-2-2i}$

4. Представить в алгебраической форме:

а) $(-2+2i)^7$; б) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{-\sqrt{3}+i} \right)^7$

5. Найти изображение оригинала, заданного графически:



6. Решить систему

$$\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -2x + 4y \end{cases}; x(0) = 0; y(0) = 1$$

Вариант 14.

1. Найти изображение функции:

$$f(t) = t \cdot e^t \cos t$$

2. Решить задачу Коши операторным методом:

$$y'' - 2y' - 3y = e^t \cos 2t; y(0) = 2; y'(0) = 0$$

3. Найти все значения корней

а) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$;

б) $\sqrt[3]{-2+2i}$

4. Представить в алгебраической форме:

а) $(-2-2i)^6$; б) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}+i} \right)^5$

5. Восстановить оригинал по изображению

$$F(p) = \frac{2p}{(p^2 + 4)^2}$$

6. Решить систему

$$\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}; x(0) = -2; y(0) = 0.$$

Вариант 15.

1. Восстановить оригинал по изображению

$$F(p) = \frac{p+2}{p^2+2p+3}$$

2. Решить задачу Коши операторным методом:

$$y'' + 9y = 2e^{-t}; y(0) = 5; y'(0) = 2.$$

3. Найти все значения корней

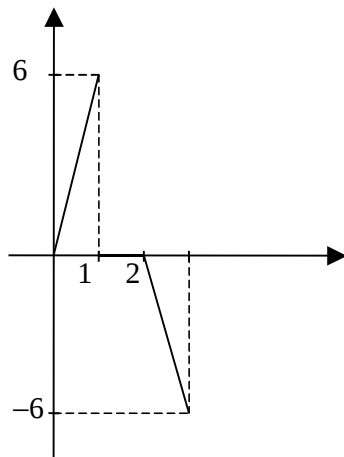
а) $\sqrt[4]{-1}$;

б) $\sqrt{-i + \sqrt{3}}$

4. Представить в алгебраической форме:

а) $\left(\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^7$; б) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{-\sqrt{3}-i}\right)^5$

5. Найти изображение оригинала, заданного графически:



6. Решить систему

$$\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}; x(0) = 1; y(0) = -2.$$

Вариант 16.

1. Найти изображение функции:

$$f(t) = t^2 \cdot e^{2t} \sin 3t$$

2. Решить задачу Коши операторным методом:

$$y'' + 4y' + 5y = t; y(0) = 2; y'(0) = -1$$

3. Найти все значения корней

а) $\sqrt[3]{-27}$;

б) $\sqrt[3]{2-2i}$

4. Представить в алгебраической форме:

а) $\left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}i\right)^8$; б) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^6$

5. Восстановить оригинал по изображению

$$F(p) = \frac{2}{(p-1)(p^2-1)}$$

6. Решить систему

$$\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + 2y \end{cases}; x(0) = -1; y(0) = 0.$$

Оглавление.

Введение.

1. Комплексные числа.
2. Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение.
3. Нахождение оригинала по изображению.
4. Решение линейных дифференциальных уравнений и систем.
5. Применение методов операционного исчисления в задачах электротехники.
6. Пример контрольной работы по операционному исчислению и комплексным числам.
7. Литература.

Литература.

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. М.: Наука, 1981, 448с.
2. Сборник задач по математике для втузов. Ч.3. Под ред. А.В. Ефимова, А.С. Поспелова. М.: издательства физико-математической литературы, 2002. 576с.
3. Краснов М.Л., Киселев А.Н., Макаренко Г.Н. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1981. 304с.
4. Глатенок И.В., Заварзина И.Ф. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление. М.: Московский энергетический институт, 1989. 48с.