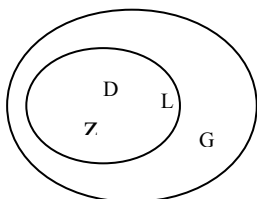


1 билет

1. Доказать интегральную формулу Коши

Интегральная формула Коши



Пусть функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области G . Пусть кусочно-гладкий контур L принадлежит G вместе со своей внутренностью D . Пусть $z_0 \in D$, тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Доказательство. По интегральной теореме Коши для многосвязной области

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \text{ где } \gamma_\rho - \text{окружность с центром в точке } z_0, \text{ радиусом}$$

ρ , $\gamma_\rho: z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Радиус окружности выбран достаточно малым, чтобы окружность целиком лежала в области D . Так как $\oint_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$ (важный пример в

предыдущей лекции), то $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz$. Оценим $|f(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz| =$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z_0) - f(z)}{z - z_0} dz \right| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{|f(z_0) - f(z)|}{|z - z_0|} |dz| \right| \leq$$

(на окружности γ_ρ , $|dz| = |\rho i e^{i\varphi} d\varphi| = \rho d\varphi$, так как $|i| = 1$, $|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$.

По непрерывности функции $f(z) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \rho(\varepsilon) > 0, |z - z_0| < \rho \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$).

$$\leq \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{\rho} \oint_{\gamma_\rho} |dz| = \frac{\varepsilon}{2\pi \rho} \int_0^{2\pi} \rho d\varphi = \frac{\varepsilon}{2\pi \rho} 2\pi \rho = \varepsilon. \quad \text{В силу произвольности } \varepsilon$$

$$|f(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz| = 0. \text{ Следовательно, } f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

2. Доказать теорему о дифференцировании оригинала

Теорема о дифференцировании оригинала.

Пусть $f'(t)$ - оригинал. Тогда $f'(t) \sim pF(p) - f(+0)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} L(f'(t)) &= \int_0^\infty f'(t) e^{-pt} dt = f(t) e^{-pt} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t) d(e^{-pt}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) e^{-pt} - \lim_{t \rightarrow +0} f(t) e^{-pt} + pF(p) = \\ &= pF(p) - f(+0), \text{ так как } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) e^{-pt} = 0 \text{ при } \operatorname{Re} p = s > s_0. \end{aligned}$$

Следствие. Если $f^{(n)}(t)$ - оригинал, то $f^{(n)}(t) \sim p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - \dots - pf^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0)$.

$$\text{Доказательство. } L(f^{(n)}(t)) = L\left(\left(f^{(n-1)}(t)\right)'\right) = pL(f^{(n-1)}(t)) - f^{(n-1)}(+0) =$$

$$p(pL(f^{(n-2)}(t)) - f^{(n-2)}(+0)) - f^{(n-1)}(+0) = p(p(pL(f^{(n-3)}(t)) - f^{(n-3)}(+0)) - f^{(n-2)}(+0)) - f^{(n-1)}(+0) = \dots \\ = p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - \dots - pf^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0).$$

2 билет.

1. Доказать теорему о производной аналитической функции

Теорема. Аналитическая функция является бесконечно дифференцируемой в области аналитичности.

Доказательство. Можно показать, что интеграл в интегральной формуле Коши можно дифференцировать по z_0 , как по параметру. Проводя это дифференцирование нужное число раз, получим формулу для n -ой производной аналитической функции.

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz, \quad f''(z_0) = \frac{2}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^3} dz, \quad f'''(z_0) = \frac{3 \cdot 2}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^4} dz \dots \\ f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz. \text{ Это - формула для } n\text{-ой производной аналитической}$$

функции.

С помощью полученных формул (деля обе части на коэффициент перед интегралом) можно вычислять интегралы вида

$$\oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0), \quad \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0).$$

Примеры. 1. $\oint_{|z|=4} \frac{\sin z}{z-2} dz = 2\pi i \sin 2$ (по интегральной формуле Коши)

2. $\oint_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-i)^2} dz = 2\pi i (e^z)' \Big|_{z=i} = 2\pi i e^i = 2\pi i (\cos 1 + i \sin 1)$ (по формуле для первой производной)

3. Вычислить $\oint_{|z-2|=5} \frac{\cos z}{(z-1)z^2} dz$. Аналитичность функции нарушается в точках $z=0$, $z=1$. Рассмотрим два контура: γ_1 и γ_2 – окружности с центрами в точках $z=0$, $z=1$, радиусами $r=1/4$. $\left(|z| = \frac{1}{4}, |z-1| = \frac{1}{4}\right)$. По интегральной теореме Коши для многосвязной

области $\oint_{|z-2|=5} \frac{\cos z}{(z-1)z^2} dz = \oint_{\gamma_1} \frac{\cos z}{(z-1)z^2} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{\cos z}{(z-1)z^2} dz = \oint_{\gamma_1} \frac{\cos z}{z^2} dz + \oint_{\gamma_2} \frac{\cos z}{z-1} dz =$
 $= 2\pi i \left[\left(\frac{\cos z}{z-1} \right)' \Big|_{z=0} + \left(\frac{\cos z}{z^2} \right) \Big|_{z=1} \right] = 2\pi i \left[\frac{-\sin z(z-1) - \cos z}{(z-1)^2} \Big|_{z=0} + \cos 1 \right] = 2\pi i (\cos 1 - 1).$

2. Доказать теорему об интегрировании оригинала

Теорема об интегрировании оригинала. $\int_0^t f(t) dt \sim \frac{F(p)}{p}.$