

$$\oint_L v dx + u dy = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (\text{условие Коши – Римана}).$$

$$\text{Поэтому } \oint_L f(z) dz = 0.$$

Следствие. Пусть L_1, L_2 – две кусочно-гладких дуги в односвязной области G , соединяющие точки A, B . Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в области G . Тогда $\oint_{L_1} f(z) dz = \oint_{L_2} f(z) dz$.

Можно дать словесную формулировку: *интеграл от аналитической функции в односвязной области вдоль кусочно-гладкой дуги не зависит от формы дуги, а зависит только от начальной и конечной точек дуги.*

Доказательство. Образует контур $\gamma = L_1 \cup (-L_2)$. По интегральной теореме Коши

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad \text{Но } \oint_{\gamma} f(z) dz = \int_{L_1} f(z) dz + \int_{-L_2} f(z) dz = \int_{L_1} f(z) dz - \int_{L_2} f(z) dz. \quad \text{Следовательно,}$$

$$\oint_{L_1} f(z) dz = \oint_{L_2} f(z) dz.$$

Поэтому результат в рассмотренном выше примере не случаен.

Очень важный пример. Вычислить интеграл $\oint_{\gamma} \frac{dz}{(z - z_0)^n}$, где n – целое число, контур γ – окружность с центром в точке z_0 радиусом ρ .

Покажем, что точки z на контуре γ можно описать уравнением $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $\rho > 0$ – действительное число. В самом деле, $|z - z_0| = \rho |e^{i\varphi}| = \rho$, так как $|e^{i\varphi}| = |\cos \varphi + i \sin \varphi| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$. Таким образом, контур γ – это геометрическое место точек комплексной плоскости, расположенных на расстоянии ρ от точки z_0 – окружность с центром в точке z_0 радиусом ρ .

Если $n \leq 0$, то подынтегральная функция – аналитическая внутри контура γ . Тогда по интегральной теореме Коши $\oint_{\gamma} \frac{dz}{(z - z_0)^n} = 0$.

Пусть $n > 0$. Так как точка z лежит на контуре γ , то $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$, $dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$. Перейдем к переменной φ . Пусть $n \neq 1$.

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\varphi} d\varphi}{\rho^n e^{in\varphi}} = \rho^{1-n} i \int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\varphi} d\varphi = \frac{i\rho^{1-n}}{n-1} e^{-i(n-1)\varphi} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

по периодичности экспоненты.

Пусть $n = 1$. Тогда

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}} d\varphi = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i.$$

$$\text{Вывод. } \oint_{\gamma} \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ 2\pi i, & n = 1 \end{cases}$$

2. Доказать теорему смещения

Теорема смещения. $f(t)e^{\lambda t} \sim F(p - \lambda)$.

Доказательство. $L(f(t)e^{\lambda t}) = \int_0^{\infty} f(t)e^{\lambda t} e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(p-\lambda)t} dt = F(p-\lambda)$

Здесь $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda + s_0$ по теореме об области определения изображения.

Примеры. $e^{\lambda t} \sin \alpha t \sim \frac{\alpha}{(p-\lambda)^2 + \alpha^2}, \quad e^{\lambda t} \cos \alpha t \sim \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2 + \alpha^2},$

$e^{\lambda t} \sinh \alpha t \sim \frac{\alpha}{(p-\lambda)^2 - \alpha^2}, \quad e^{\lambda t} \cosh \alpha t \sim \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2 - \alpha^2},$

Заданы изображения найти оригиналы $f(t) \sim F(p)$.

$F(p) = \frac{3p+4}{p^2+10p+29}$

$F(p) = \frac{3p+4}{p^2+10p+29} = \frac{3p+4}{(p+5)^2+2^2} = 3 \frac{p+5}{(p+5)^2+2^2} - \frac{11}{2} \frac{2}{(p+5)^2+2^2}$
 $\sim 3e^{-5t} \cos 2t - \frac{11}{2} e^{-5t} \sin 2t = e^{-5t} \left(3 \cos 2t - \frac{11}{2} \sin 2t \right).$

$F(p) = \frac{p+1}{p^2-4p+3}$

$F(p) = \frac{p+1}{p^2-4p+3} = \frac{p+1}{(p-1)(p-3)} = \frac{\frac{3}{2}}{p-3} + \frac{-\frac{1}{2}}{p-1} \sim \frac{3}{2} e^{3t} - \frac{1}{2} e^t.$

9 билет.

1. Вывести необходимые условия дифференцируемости функции комплексного переменного

Производная функции комплексной переменной вводится так же, как и для функции действительной переменной

$f'(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$

Функция $f(z)$ называется **дифференцируемой в точке** z_0 , если ее приращение в этой точке можно представить в виде

$\Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A(z_0)\Delta z + \varepsilon(z, z_0)\Delta z$, где $\lim_{z \rightarrow z_0} \varepsilon(z, z_0) = 0$, то есть $\varepsilon(z, z_0)$ - бесконечно малая при $z \rightarrow z_0$. Главная линейная относительно Δz часть приращения функции в точке z_0 , $A(z_0)\Delta z$ называется **дифференциалом функции в точке** z_0 , ($df(z_0) = A(z_0)\Delta z$).

Замечание. Функция двух переменных $\varphi(x, y)$ называется дифференцируемой в точке (x_0, y_0) , если ее приращение в этой точке можно представить в виде

$\Delta \varphi(x_0, y_0) = A(x_0, y_0)\Delta x + B(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1(x, y, x_0, y_0)\Delta x + \varepsilon_2(x, y, x_0, y_0)\Delta y,$
 где $\varepsilon_1(x, y, x_0, y_0)$, $\varepsilon_2(x, y, x_0, y_0)$ - бесконечно малые при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$,
 $A = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0)$, $B = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Теорема. Для того, чтобы функция $f(z)$ была дифференцируема в точке z_0 , необходимо и достаточно, чтобы существовала ее конечная производная в этой точке.

Доказательство. Проводится так же, как и для функции действительной переменной с использованием теоремы о связи функции, предела и бесконечно малой.