Необходимость. Пусть функция дифференцируема в точке z_0, тогда
$\Delta f(z_0) = f(z_0+\Delta z) - f(z_0) = A(z_0)\Delta z + \varepsilon(z,z_0)\Delta z,\ \text{где}\ \lim_{z\to z_0}\varepsilon(z,z_0) = 0$,

Делим обе части на Δz

$\dfrac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = A(z_0) + \varepsilon(z,z_0)$. Так как $\varepsilon(z,z_0)$ - бесконечно малая при $z\to z_0$, то по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой, $A(z_0) = \lim_{z\to z_0}\dfrac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$.

Поэтому $df(z_0) = f'(z_0)\Delta z$ - **формула для вычисления дифференциала.**

Достаточность. Пусть в точке z_0 существует конечная производная функции $\lim_{z\to z_0}\dfrac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$. Тогда по теореме о связи функции, предела и бесконечно малой $\dfrac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0) + \varepsilon(z,z_0)$. Умножая на Δz, получим $\Delta f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon(z,z_0)\Delta z,\ \text{где}\ \lim_{z\to z_0}\varepsilon(z,z_0) = 0$. Следовательно, функция дифференцируема в точке z_0.

Функция называется дифференцируемой в области, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

2. Доказать свойства свертки оригиналов

Сверткой $f(t)*\varphi(t)$ двух функций называется интеграл $f(t)*\varphi(t) = \int_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$.

Свойства свертки.

1. **Коммутативность.** $f*\varphi = \varphi * f$

$$\varphi * f = \int_0^t \varphi(t-\tau)f(\tau)d\tau = (\text{замена } v = t-\tau) = -\int_t^0 \varphi(v)f(t-v)dv = \int_0^t f(t-v)\varphi(v)dv = f*\varphi$$

2. **Ассоциативность.**

$f*(\varphi*\psi) = (f*\varphi)*\psi$ (доказательство громоздко, см. его в учебнике т.Х1).

3. $f*\varphi$ **- оригинал, если** f,φ **- оригиналы.**

Самостоятельно проверьте первые два требования к оригиналу. Проверим третье требование.

Пусть $|f(t)| < M_1e^{s_1t}$, $|\varphi(t)| < M_2e^{s_2t}$. Обозначим $M = M_1M_2,\ s = \max(s_1,s_2) + \varepsilon, \forall\varepsilon > 0$.

$$|f*\varphi| = \left|\int_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau\right| \le \int_0^t |f(t-\tau)||\varphi(\tau)|d\tau < M_1M_2\int_0^t e^{s_1(t-\tau)}e^{s_2\tau}d\tau \le$$

а) $s_1 > s_2$

$$\le M\int_0^t e^{s_1t}e^{(s_2-s_1)\tau}d\tau < M\int_0^t e^{s_1t}d\tau = Mte^{s_1t} < Me^{st}$$

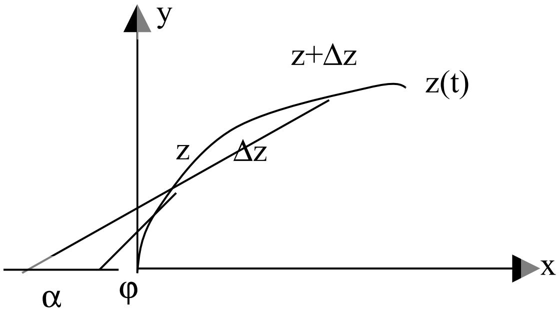
б) $s_1 < s_2$.

$$\le M\int_0^t e^{s_2(t-\tau)}e^{s_2\tau}d\tau = M\int_0^t e^{s_2t}d\tau = Mte^{s_2t} < Me^{st}.$$

10 билет.

1. Геометрический смысл производной аналитической функции

Рассмотрим комплекснозначную дифференцируемую в точке t и некоторой ее окрестности функцию действительной переменной z(t).



Рассмотрим точку z , дадим приращение Δz, α= arg Δz. Тогда $\arg\frac{\Delta z}{\Delta t} = \arg z' = \alpha$.

При $\Delta t \to 0$ секущая переходит в касательную, $\frac{\Delta z}{\Delta t} \to z'(t), tg\alpha \to tg\varphi$, где φ - угол наклона касательной к графику в точке z . Тогда $\arg\frac{\Delta z}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} \arg z'(t) = \varphi$

Наличие ненулевой производной $z'(t)$ *означает наличие касательной к графику функции с углом наклона к действительной оси, равным* $\arg z'(t)$.

Рассмотрим теперь комплекснозначную аналитическую функцию комплексной переменной $f(z)$. Пусть $z = z(t)$, где t - действительное число. Тогда $f(z) = f(z(t))$ - комплекснозначная функция действительной переменной z(t), дифференцируемая в точке t и некоторой ее окрестности.

Касательная к графику функции, по рассмотренному выше, имеет угол наклона к действительной оси равный $\arg f'(z(t))$.

По теореме о сложной функции $f'(z(t)) = f'(z)z'(t)$, поэтому

$\arg f'(z(t)) = \arg f'(z) + \arg z'(t)$. **Следовательно,** $\arg f'(z)$ **- аргумент производной аналитической функции** $f(z)$**. имеет смысл угла поворота касательной к кривой в точке** z **при ее отображении посредством функции** $f(z)$**.**

Так как $f'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z)}{\Delta z}$, $|f'(z)| = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{|\Delta f(z)|}{|\Delta z|}$, то $|f'(z)|$ - **модуль производной аналитической функции имеет смысл коэффициента растяжения при отображении посредством функции** $f(z)$**.** Все это справедливо в тех точках, в которых *производная отлична от нуля***.**

Если две кривые отображаются посредством аналитической функции $f(z)$ $(f'(z) \neq 0)$, то угол наклона касательной к каждой кривой изменяется в точке z на один и тот же угол $\arg f'(z)$**, поэтому углы между кривыми сохраняются при отображении посредством аналитической функции** (в тех точках, в которых ее *производная отлична от нуля)***.**

Отображение, сохраняющее углы между кривыми, называется **конформным**. Поэтому **отображение посредством аналитической функции** (в тех точках, в которых ее *производная отлична от нуля)* **является конформным.**

Пример. Линейное отображение $f(z) = az$ ($f'(z) = a$), как было показано выше, сводится к повороту на угол $\arg a$ и растяжению в $|a|$ раз.

2. Доказать теорему о дифференцировании оригинала