

Теорема о дифференцировании оригинала.

Пусть $f'(t)$ - оригинал. Тогда $f'(t) \sim pF(p) - f(+0)$.

Доказательство.

$$L(f'(t)) = \int_0^{\infty} f'(t) e^{-pt} dt = f(t) e^{-pt} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} f(t) d(e^{-pt}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) e^{-pt} - \lim_{t \rightarrow +0} f(t) e^{-pt} + pF(p) =$$

$$= pF(p) - f(+0), \text{ так как } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) e^{-pt} = 0 \text{ при } \operatorname{Re} p = s > s_0.$$

Следствие. Если $f^{(n)}(t)$ - оригинал, то $f^{(n)}(t) \sim p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - \dots - pf^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0)$.

Доказательство. $L(f^{(n)}(t)) = L\left(\left(f^{(n-1)}(t)\right)'\right) = pL(f^{(n-1)}(t)) - f^{(n-1)}(+0) =$

$$p(pL(f^{(n-2)}(t)) - f^{(n-2)}(+0)) - f^{(n-1)}(+0) = p(p(pL(f^{(n-3)}(t)) - f^{(n-3)}(+0)) - f^{(n-2)}(+0)) - f^{(n-1)}(+0) = \dots$$

$$= p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - \dots - pf^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0).$$

11 билет

1. Достаточные условия дифференцируемости функции комплексного переменного (сформулировать и доказать)

Производная функции комплексной переменной вводится так же, как и для функции действительной переменной

$$f'(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Функция $f(z)$ называется **дифференцируемой в точке** z_0 , если ее приращение в этой точке можно представить в виде

$\Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A(z_0)\Delta z + \varepsilon(z, z_0)\Delta z$, где $\lim_{z \rightarrow z_0} \varepsilon(z, z_0) = 0$, то есть $\varepsilon(z, z_0)$ - бесконечно малая при $z \rightarrow z_0$. Главная линейная относительно Δz часть приращения функции в точке z_0 , $A(z_0)\Delta z$ называется **дифференциалом функции в точке** z_0 , ($df(z_0) = A(z_0)\Delta z$).

Замечание. Функция двух переменных $\varphi(x, y)$ называется дифференцируемой в точке (x_0, y_0) , если ее приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta \varphi(x_0, y_0) = A(x_0, y_0)\Delta x + B(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1(x, y, x_0, y_0)\Delta x + \varepsilon_2(x, y, x_0, y_0)\Delta y,$$

где $\varepsilon_1(x, y, x_0, y_0)$, $\varepsilon_2(x, y, x_0, y_0)$ - бесконечно малые при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$,

$$A = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0), \quad B = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Теорема. Для того, чтобы функция $f(z)$ была дифференцируема в точке z_0 , необходимо и достаточно, чтобы существовала ее конечная производная в этой точке.

Доказательство. Проводится так же, как и для функции действительной переменной с использованием теоремы о связи функции, предела и бесконечно малой.

Необходимость. Пусть функция дифференцируема в точке z_0 , тогда

$$\Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A(z_0)\Delta z + \varepsilon(z, z_0)\Delta z, \text{ где } \lim_{z \rightarrow z_0} \varepsilon(z, z_0) = 0,$$

Делим обе части на Δz

$\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = A(z_0) + \varepsilon(z, z_0)$. Так как $\varepsilon(z, z_0)$ - бесконечно малая при $z \rightarrow z_0$, то по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой, $A(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$.

Поэтому $df(z_0) = f'(z_0)\Delta z$ - **формула для вычисления дифференциала**.

Достаточность. Пусть в точке z_0 существует конечная производная функции $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$. Тогда по теореме о связи функции, предела и бесконечно малой

$\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0) + \varepsilon(z, z_0)$. Умножая на Δz , получим

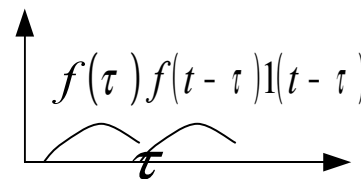
$\Delta f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon(z, z_0)\Delta z$, где $\lim_{z \rightarrow z_0} \varepsilon(z, z_0) = 0$. Следовательно, функция дифференцируема в точке z_0 .

Функция называется дифференцируемой в области, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

2. Доказать теорему запаздывания

Теорема запаздывания. $f(t - \tau)l(t - \tau) \sim e^{-p\tau} F(p)$

Здесь $f(t - \tau)l(t - \tau)$ - функция $f(t)$, удовлетворяющая условию физической реализуемости и смещенная по оси времени вправо на $\tau > 0$ - «запаздывающая функция».



Доказательство. Заметим, что $f(t - \tau)l(t - \tau) = 0$ при $t < \tau$, $l(t - \tau) = 1$ при $t > \tau$.

$$\begin{aligned} L(f(t - \tau)l(t - \tau)) &= \int_0^{\infty} f(t - \tau)l(t - \tau)e^{-pt} dt = \int_{\tau}^{\infty} f(t - \tau)e^{-p(t-\tau)}e^{-p\tau} dt = (\text{замена } t - \tau = z) \\ &= e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f(z) dz = e^{-p\tau} F(p). \end{aligned}$$

12 билет

1. Доказать основную теорему Коши для односвязной области

Интегральная теорема Коши (для односвязной области).

Пусть G - односвязная область, пусть функция $f(z)$ - аналитическая в G функция, пусть L - кусочно-гладкий контур, принадлежащий области G . Тогда $\oint_L f(z) dz = 0$.

Теорему можно сформулировать и так: *интеграл от аналитической функции вдоль кусочно-гладкого контура равен нулю.*

Доказательство.