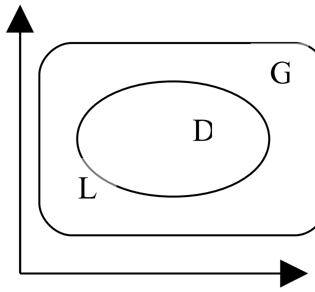


Обозначим D – внутренность контура L . Запишем формулу Грина $\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$. Представим интеграл $\oint\limits_L f(z)dz$ в первой форме записи через два криволинейных интеграла $\oint\limits_L f(z)dz = \oint\limits_L udx - vdy + i\oint\limits_L vdx + udy$

Применим к каждому слагаемому в правой части равенства формулу Грина. В первом интеграле примем P = u, Q = -v.

$$\oint\limits_L udx - vdy = \iint\limits_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy = 0$$

(для аналитической функции выполнены условия Коши – Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$).

Во втором интеграле примем P = v, Q = u.

$$\oint\limits_L vdx + udy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy = 0$$ (условие Коши – Римана).

Поэтому $\oint\limits_L f(z)dz = 0$.

Следствие. Пусть L_1, L_2 – две кусочно-гладких дуги в односвязной области G, соединяющие точки A, B. Пусть функция f(z) – аналитическая в области G. Тогда $\oint\limits_{L_1} f(z)dz = \oint\limits_{L_2} f(z)dz$.

Можно дать словесную формулировку: *интеграл от аналитической функции в односвязной области вдоль кусочно-гладкой дуги не зависит от формы дуги, а зависит только от начальной и конечной точек дуги.*

Доказательство. Образуем контур $\gamma = L_1 \cup (-L_2)$. По интегральной теореме Коши $\oint\limits_\gamma f(z)dz = 0$. Но $\oint\limits_\gamma f(z)dz = \int\limits_{L_1} f(z)dz + \int\limits_{-L_2} f(z)dz = \int\limits_{L_1} f(z)dz - \int\limits_{L_2} f(z)dz$. Следовательно, $\oint\limits_{L_1} f(z)dz = \oint\limits_{L_2} f(z)dz$.

Поэтому результат в рассмотренном выше примере не случаен.

Очень важный пример. Вычислить интеграл $\oint\limits_\gamma \frac{dz}{(z - z_0)^n}$, где n – целое число, контур γ - окружность с центром в точке z_0 радиусом ρ .

Покажем, что точки z на контуре γ можно описать уравнением $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$, $0 \le \varphi < 2\pi$, $\rho > 0$ - действительное число. В самом деле, $|z - z_0| = \rho |e^{i\varphi}| = \rho$, так как $|e^{i\varphi}| = |\cos\varphi + i\sin\varphi| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$. Таким образом, контур γ - это геометрическое место точек комплексной плоскости, расположенных на расстоянии ρ от точки z_0 - окружность с центром в точке z_0 радиусом ρ .

Если $n \le 0$, то подынтегральная функция – аналитическая внутри контура γ . Тогда по интегральной теореме Коши $\oint_\gamma \frac{dz}{(z-z_0)^n} = 0.$

Пусть $n > 0$. Так как точка z лежит на контуре γ , то $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$, $dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$. Перейдем к переменной φ . Пусть $n \ne 1$.

$$\oint_\gamma \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\varphi} d\varphi}{\rho^n e^{in\varphi}} = \rho^{1-n} i \int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\varphi} d\varphi = \frac{i\rho^{1-n}}{n-1} e^{-i(n-1)\varphi} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

по периодичности экспоненты.

Пусть $n = 1$. Тогда

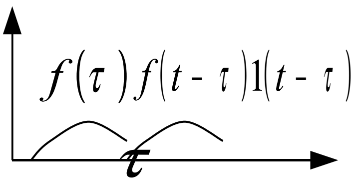
$$\oint_\gamma \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho ie^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}} d\varphi = i\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i .$$

Вывод. $\oint_\gamma \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 0, & n \ne 1 \\ 2\pi i, & n = 1 \end{cases}.$

2. Доказать теорему запаздывания

Теорема запаздывания. $f(t-\tau)1(t-\tau) \sim e^{-p\tau} F(p)$

Здесь $f(t-\tau)1(t-\tau)$ - функция $f(t)$, удовлетворяющая условию физической реализуемости и смещенная по оси времени вправо на $\tau > 0$ - «запаздывающая функция».



Доказательство . Заметим, что $f(t-\tau)1(t-\tau)$ =0 при $t < \tau$, $1(t-\tau) = 1$ *при* $t > \tau$.

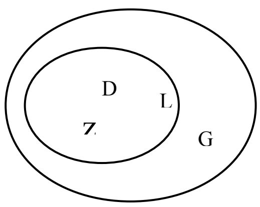
$$L(f(t-\tau)1(t-\tau)) = \int_0^\infty f(t-\tau)1(t-\tau)e^{-pt} dt = \int_\tau^\infty f(t-\tau)e^{-p(t-\tau)} e^{-p\tau} dt = (\text{замена } t-\tau = z)$$

$$= e^{-p\tau} \int_0^\infty f(z) dz = e^{-p\tau} F(p) .$$

13 билет.

1. Вывести интегральную формулу Коши

Интегральная формула Коши



Пусть функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области G . Пусть кусочно-гладкий контур L принадлежит G вместе со своей внутренностью D . Пусть $z_0 \in D$, тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Доказательство. По интегральной теореме Коши для многосвязной области