

$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$, где γ_ρ - окружность с центром в точке z_0 , радиусом ρ , $\gamma_\rho: z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Радиус окружности выбран достаточно малым, чтобы окружность целиком лежала в области D . Так как $\oint_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$ (важный пример в предыдущей лекции), то $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz$. Оценим $|f(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz| =$
 $= |\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z_0) - f(z)}{z - z_0} dz| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{|f(z_0) - f(z)|}{|z - z_0|} |dz| \right| \leq$
 (на окружности γ_ρ , $|dz| = |\rho i e^{i\varphi} d\varphi| = \rho d\varphi$, так как $|i| = 1$, $|e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$.
 По непрерывности функции $f(z) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \rho(\varepsilon) > 0, |z - z_0| < \rho \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$).
 $\leq \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{\rho} \oint_{\gamma_\rho} |dz| = \frac{\varepsilon}{2\pi \rho} \int_0^{2\pi} \rho d\varphi = \frac{\varepsilon}{2\pi \rho} 2\pi \rho = \varepsilon$. В силу произвольности ε
 $|f(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz| = 0$. Следовательно, $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz$.

2. Доказать теорему смещения

Теорема смещения. $f(t)e^{\lambda t} \sim F(p - \lambda)$.

Доказательство. $L(f(t)e^{\lambda t}) = \int_0^\infty f(t)e^{\lambda t} e^{-pt} dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(p-\lambda)t} dt = F(p - \lambda)$

Здесь $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} \lambda + s_0$ по теореме об области определения изображения.

Примеры. $e^{\lambda t} \sin \alpha t \sim \frac{\alpha}{(p - \lambda)^2 + \alpha^2}$, $e^{\lambda t} \cos \alpha t \sim \frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \alpha^2}$,

$e^{\lambda t} \sinh \alpha t \sim \frac{\alpha}{(p - \lambda)^2 - \alpha^2}$, $e^{\lambda t} \cosh \alpha t \sim \frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 - \alpha^2}$,

Заданы изображения найти оригиналы $f(t) \sim F(p)$.

$$F(p) = \frac{3p + 4}{p^2 + 10p + 29}$$

$$F(p) = \frac{3p + 4}{p^2 + 10p + 29} = \frac{3p + 4}{(p + 5)^2 + 2^2} = 3 \frac{p + 5}{(p + 5)^2 + 2^2} - \frac{11}{2} \frac{2}{(p + 5)^2 + 2^2} \\ \sim 3e^{-5t} \cos 2t - \frac{11}{2} e^{-5t} \sin 2t = e^{-5t} \left(3 \cos 2t - \frac{11}{2} \sin 2t \right).$$

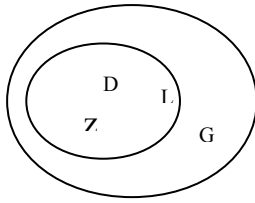
$$F(p) = \frac{p + 1}{p^2 - 4p + 3}$$

$$F(p) = \frac{p + 1}{p^2 - 4p + 3} = \frac{p + 1}{(p - 1)(p - 3)} = \frac{\frac{3}{2}}{p - 3} + \frac{-\frac{1}{2}}{p - 1} \sim \frac{3}{2} e^{3t} - \frac{1}{2} e^t.$$

14 билет

1. Вывести интегральную формулу Коши

Интегральная формула Коши



Пусть функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области G . Пусть кусочно-гладкий контур L принадлежит G вместе со своей внутренностью D . Пусть $z_0 \in D$, тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Доказательство. По интегральной теореме Коши для многосвязной области

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \text{ где } \gamma_\rho - \text{окружность с центром в точке } z_0, \text{ радиусом } \rho,$$

$\gamma_\rho : z = z_0 + \rho e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi < 2\pi$. Радиус окружности выбран достаточно малым, чтобы окружность целиком лежала в области D . Так как $\oint_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$ (важный пример в

предыдущей лекции), то $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$. Оценим $|f(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz| =$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z_0) - f(z)}{z - z_0} dz \right| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{|f(z_0) - f(z)|}{|z - z_0|} |dz| \right| \leq$$

(на окружности γ_ρ , $|dz| = |\rho i e^{i\varphi} d\varphi| = \rho d\varphi$, так как $|i| = 1, |e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$).

По непрерывности функции $f(z) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \rho(\varepsilon) > 0, |z - z_0| < \rho \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

$$\leq \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{\rho} \oint_{\gamma_\rho} |dz| = \frac{\varepsilon}{2\pi \rho} \int_0^{2\pi} \rho d\varphi = \frac{\varepsilon}{2\pi \rho} 2\pi \rho = \varepsilon. \quad \text{В силу произвольности } \varepsilon$$

$$|f(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz| = 0. \text{ Следовательно, } f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

2. Доказать теорему о дифференцировании оригинала

Теорема о дифференцировании оригинала.

Пусть $f'(t)$ - оригинал. Тогда $f'(t) \sim pF(p) - f(+0)$.

Доказательство.

$$L(f'(t)) = \int_0^\infty f'(t) e^{-pt} dt = f(t) e^{-pt} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t) d(e^{-pt}) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) e^{-pt} - \lim_{t \rightarrow +0} f(t) e^{-pt} + pF(p) =$$

$$= pF(p) - f(+0), \text{ так как } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) e^{-pt} = 0 \text{ при } \operatorname{Re} p = s > s_0.$$

Следствие. Если $f^{(n)}(t)$ - оригинал, то $f^{(n)}(t) \sim p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - \dots - pf^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0)$.

Доказательство. $L(f^{(n)}(t)) = L\left(\left(f^{(n-1)}(t)\right)'\right) = pL(f^{(n-1)}(t)) - f^{(n-1)}(+0) =$

$$p\left(pL(f^{(n-2)}(t)) - f^{(n-2)}(+0)\right) - f^{(n-1)}(+0) = p\left(p\left(pL(f^{(n-3)}(t)) - f^{(n-3)}(+0)\right) - f^{(n-2)}(+0)\right) - f^{(n-1)}(+0) = \dots$$

$$= p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - \dots - pf^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0).$$