15 билет

1. Доказать теорему о производной аналитической функции

Теорема. *Аналитическая функция является бесконечно дифференцируемой в области аналитичности.*

Доказательство. Можно показать, что интеграл в интегральной формуле Коши можно дифференцировать по z_0, как по параметру. Проводя это дифференцирование нужное число раз, получим формулу для n – ой производной аналитической функции.

$$f'(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_L\frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz,\ f''(z_0)=\frac{2}{2\pi i}\oint_L\frac{f(z)}{(z-z_0)^3}dz,\ f'''(z_0)=\frac{3\cdot 2}{2\pi i}\oint_L\frac{f(z)}{(z-z_0)^4}dz\ \ldots$$

$f^{(n)}(z_0)=\dfrac{n!}{2\pi i}\oint_L\dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$. *Это - формула для n – ой производной аналитической функции.*

С помощью полученных формул (деля обе части на коэффициент перед интегралом) можно вычислять интегралы вида

$$\oint_L\frac{f(z)}{z-z_0}dz=2\pi i f(z_0),\ \oint_L\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(z_0).$$

Примеры. 1. $\oint\limits_{|z|=4}\dfrac{\sin z}{z-2}dz=2\pi i\sin 2$ (по интегральной формуле Коши)

2. $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{e^z}{(z-i)^2}dz=2\pi i\left(e^z\right)'\Big|_{z=i}=2\pi i e^i=2\pi i(\cos 1+i\sin 1)$ (по формуле для первой производной)

3. Вычислить $\oint\limits_{|z-2|=5}\dfrac{\cos z}{(z-1)z^2}dz$. Аналитичность функции нарушается в точках z=0, z=1. Рассмотрим два контура: γ_1 *и* γ_2 – окружности с центрами в точках z=0, z=1, радиусами r=1/4. $\left(|z|=\dfrac{1}{4},|z-1|=\dfrac{1}{4}\right)$. По интегральной теореме Коши для многосвязной области $\oint\limits_{|z-2|=5}\dfrac{\cos z}{(z-1)z^2}dz=\oint\limits_{\gamma_1}\dfrac{\cos z}{(z-1)z^2}dz+\oint\limits_{\gamma_2}\dfrac{\cos z}{(z-1)z^2}dz=\oint\limits_{\gamma_1}\dfrac{\frac{\cos z}{z-1}}{z^2}dz+\oint\limits_{\gamma_2}\dfrac{\frac{\cos z}{z^2}}{z-1}dz=$

$$=2\pi i\left[\left(\frac{\cos z}{z-1}\right)'\Big|_{z=0}+\left(\frac{\cos z}{z^2}\right)\Big|_{z=1}\right]=2\pi i\left[\frac{-\sin z(z-1)-\cos z}{(z-1)^2}\Big|_{z=0}+\cos 1\right]=2\pi i(\cos 1-1).$$

2. Доказать теорему об интегрировании оригинала

Теорема о дифференцировании оригинала.

Пусть $f'(t)$ *- оригинал. Тогда* $f'(t)\sim pF(p)-f(+0)$.

Доказательство.

$$L(f'(t))=\int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt=f(t)e^{-pt}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty f(t)d\left(e^{-pt}\right)=\lim_{t\to+\infty}f(t)e^{-pt}-\lim_{t\to+0}f(t)e^{-pt}+pF(p)=$$

$=pF(p)-f(+0)$, так как $\lim_{t\to+\infty}f(t)e^{-pt}=0$ *при* $\operatorname{Re}p=s>s_0$.

Следствие. Если $f^{(n)}(t)$ - оригинал, то $f^{(n)}(t)$ $\sim p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - \ldots - p f^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0)$.

Доказательство. $L\left(f^{(n)}(t)\right) = L\left(\left(f^{(n-1)}(t)\right)'\right) = pL\left(f^{(n-1)}(t)\right) - f^{(n-1)}(+0) =$ $p\left(pL\left(f^{(n-2)}(t)\right) - f^{(n-2)}(+0)\right) - f^{(n-1)}(+0) = p\left(p\left(pL\left(f^{(n-3)}(t)\right) - f^{(n-3)}(+0)\right) - f^{(n-2)}(+0)\right) - f^{(n-1)}(+0) = \ldots$ $= p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - \ldots - p f^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0)$.

16 билет

1.Вывести формулу для вычисления вычетов в полюсе

Если z_0 – **правильная особая точка**, то ряд Лорана превращается в ряд Тейлора, в котором нет отрицательных степеней $z - z_0$, поэтому $\mathrm{Res}_{z_0} f(z) = 0$.

Если z_0 – **полюс первого порядка,** то разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки не содержит степеней $z - z_0$, ниже, чем –1 и содержит степень -1. Разложение выглядит так.

$f(z) = \dfrac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots \quad (c_{-1} \neq 0)$. Умножим обе части на $z - z_0$.

$f(z)(z - z_0) = c_{-1} + c_0(z - z_0) + c_1(z - z_0)^2 + \ldots$ Перейдем к пределу при $z \to z_0$, чтобы обратились в нуль все слагаемые в правой части, содержащие целые степени $z - z_0$.

$c_{-1} = \mathrm{Res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)$ - **формула для вычета функции в полюсе первого порядка.**

В том случае, когда z_0 – **полюс первого порядка функции вида**

$f(z) = \dfrac{\psi(z)}{\varphi(z)} \quad (\varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) \neq 0)$, можно получить удобную в вычислениях формулу для вычета.

$c_{-1} = \mathrm{Res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0) =$

$\lim_{z \to z_0} \dfrac{\psi(z)}{\varphi(z)}(z - z_0) = \lim_{z \to z_0} \dfrac{\psi(z)}{\dfrac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0}} = \dfrac{\psi(z_0)}{\varphi'(z_0)}$ - **формула для вычета функции в полюсе первого порядка.** Здесь использованы условия $(\varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) \neq 0)$.

Пример. Найти вычеты функции $\dfrac{1}{z^2 + 1}$ во всех особых точках конечной плоскости.

У функции два полюса первого порядка $z = i, z = -i$.

По первой формуле

$$\mathrm{Res}_i f(z) = \lim_{z \to i} \frac{1}{(z - i)(z + 1)}(z - i) = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2}$$

$$\mathrm{Res}_{-i} f(z) = \lim_{z \to i} \frac{1}{(z - i)(z + 1)}(z + i) = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2} \quad .$$

Применим вторую формулу

$\varphi(z) = z^2 + 1, \quad \varphi'(z) = 2z, \quad \psi(z) = 1$. $\mathrm{Res}_i f(z) = \dfrac{1}{2i} = -\dfrac{i}{2}$, $\mathrm{Res}_{-i} f(z) = \dfrac{1}{-2i} = \dfrac{i}{2}$.

В том случае, когда z_0 – **полюс n-го порядка,** то разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки не содержит степеней $z - z_0$, ниже, чем –n и содержит степень –n $(c_{-n} \neq 0)$. Разложение выглядит так.