

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \frac{c_{-n+2}}{(z - z_0)^{n-2}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots$$

Умножим обе части на $(z - z_0)^n$.

$$f(z)(z - z_0)^n = c_{-n} + c_{-n+1}(z - z_0) + c_{-n+2}(z - z_0)^2 + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{n-1} + c_0(z - z_0)^n + \dots$$

Уничтожим степень при коэффициенте c_{-1} дифференцированием, его надо провести $(n - 1)$ раз. Получим

$$\frac{d^{n-1}(f(z)(z - z_0)^n)}{dz^{n-1}} = (n - 1)!c_{-1} + n(n - 1)(n - 2) \dots 3 \cdot 2(z - z_0) + \dots$$

Перейдем к пределу при $z \rightarrow z_0$. Все слагаемые в правой части, содержащие целые степени $z - z_0$ (второе, третье, четвертое и т.д.) обратятся в нуль. **Отсюда имеем формулу для вычета функции в полюсе n - ого порядка:**

$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (f(z)(z - z_0)^n)$$

Пример. $f(z) = \frac{1}{z(z - 1)^2}$. $z = 0$ - полюс 1 порядка, $z = 1$ - полюс 2 порядка.

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{(0 - 1)^2} = 1, \operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{1}{z} \right)' = -1.$$

2. Доказать теорему об интегрировании изображения

Теорема об интегрировании изображения. Если $\frac{f(t)}{t}$ - оригинал, то $\frac{f(t)}{t} \sim \int_p^\infty F(p) dp$.

Доказательство. Обозначим $\varphi(t) = \frac{f(t)}{t}$, $L(\varphi(t)) = \Phi(p)$. Тогда $f(t) = t\varphi(t)$.

По теореме о дифференцировании изображения $f(t) = t\varphi(t) \sim -\Phi'(p)$. Но $f(t) \sim F(p)$. Поэтому $-\Phi'(p) = F(p)$, $\int_p^\infty F(p) dp = -\int_p^\infty \Phi'(p) dp = -(\lim_{p \rightarrow \infty} \Phi(p) - \Phi(p)) = \Phi(p)$, так как $\lim_{p \rightarrow \infty} \Phi(p) = 0$, ($\Phi(p)$ - изображение).

Пример. $L\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \int_p^\infty \frac{dp}{p^2 + 1} = \operatorname{arctg} p \Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p$.

17 билет.

1. Вычет в изолированной особой точке. Доказать теорему Коши о вычетах

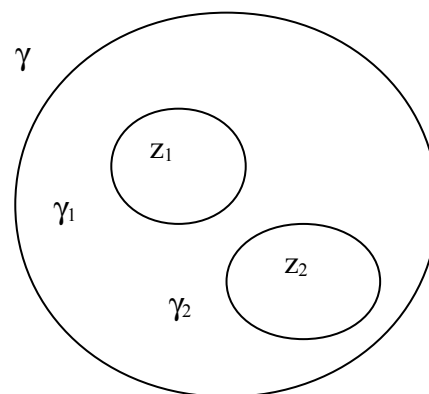
Пусть функция $f(z)$ - аналитическая в некоторой проколотой окрестности точки z_0 . Если существует комплексное число A , доопределяя которым функцию в самой точке, удастся сделать функцию аналитической в окрестности точки z_0 (включая точку z_0), то точка z_0 называется **правильной** точкой функции $f(z)$. Если такого числа не существует, то точка z_0 называется **изолированной особой точкой** $f(z)$ (однозначного характера).

Если z_0 - правильная точка функции $f(z)$, то $\exists$ конечный $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

Общая теорема о вычетах.

Пусть функция $f(z)$ - аналитическая в области G и на ее границе — кусочно-гладком контуре γ за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1 \dots z_n$, лежащих внутри области G .

$$\text{Тогда } \oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k} f(z)$$



Доказательство. По интегральной теореме Коши для многосвязной области $\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z) dz$. Вычислим интеграл $\oint_{\gamma_k} f(z) dz$. Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_k и подставим в интеграл. По равномерной сходимости степенного ряда внутри круга сходимости, проведем почленное интегрирование и используем полученный ранее результат $\oint_{\gamma} \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ 2\pi i, & n = 1 \end{cases}$.

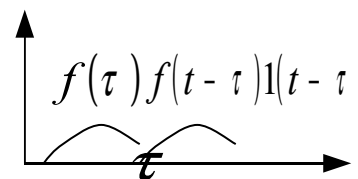
$$\oint_{\gamma_k} f(z) dz = \oint_{\gamma_k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{m_k} (z - z_k)^m dz = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{m_k} \oint_{\gamma_k} (z - z_k)^m dz = c_{-1_k} 2\pi i = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_k} f(z).$$

$$\text{Тогда } \oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k} f(z).$$

2. Доказать теорему запаздывания

Теорема запаздывания. $f(t - \tau) l(t - \tau) \sim e^{-p\tau} F(p)$

Здесь $f(t - \tau) l(t - \tau)$ - функция $f(t)$, удовлетворяющая условию физической реализуемости и смещенная по оси времени вправо на $\tau > 0$ - «запаздывающая функция».



Доказательство. Заметим, что $f(t - \tau) l(t - \tau) = 0$ при $t < \tau$, $l(t - \tau) = 1$ при $t > \tau$.

$$\begin{aligned} L(f(t - \tau) l(t - \tau)) &= \int_0^{\infty} f(t - \tau) l(t - \tau) e^{-pt} dt = \int_{\tau}^{\infty} f(t - \tau) e^{-p(t-\tau)} e^{-p\tau} dt = (\text{замена } t - \tau = z) \\ &= e^{-p\tau} \int_0^{\infty} f(z) dz = e^{-p\tau} F(p). \end{aligned}$$

18 билет

1. Вывести необходимые условия дифференцируемости функции комплексного переменного.

Производная функции комплексной переменной вводится так же, как и для функции действительной переменной

$$f'(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$