

Функция $f(z)$ называется **дифференцируемой в точке** z_0 , если ее приращение в этой точке можно представить в виде

$\Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A(z_0)\Delta z + \varepsilon(z, z_0)\Delta z$, где $\lim_{z \rightarrow z_0} \varepsilon(z, z_0) = 0$, то есть $\varepsilon(z, z_0)$ - бесконечно малая при $z \rightarrow z_0$. Главная линейная относительно Δz часть приращения функции в точке z_0 , $A(z_0)\Delta z$ называется **дифференциалом функции в точке** z_0 , ($df(z_0) = A(z_0)\Delta z$).

Замечание. Функция двух переменных $\varphi(x, y)$ называется дифференцируемой в точке (x_0, y_0) , если ее приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta \varphi(x_0, y_0) = A(x_0, y_0)\Delta x + B(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1(x, y, x_0, y_0)\Delta x + \varepsilon_2(x, y, x_0, y_0)\Delta y,$$

где $\varepsilon_1(x, y, x_0, y_0)$, $\varepsilon_2(x, y, x_0, y_0)$ - бесконечно малые при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$,

$$A = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0), B = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Теорема. Для того, чтобы функция $f(z)$ была дифференцируема в точке z_0 , необходимо и достаточно, чтобы существовала ее конечная производная в этой точке.

Доказательство. Проводится так же, как и для функции действительной переменной с использованием теоремы о связи функции, предела и бесконечно малой.

Необходимость. Пусть функция дифференцируема в точке z_0 , тогда

$$\Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A(z_0)\Delta z + \varepsilon(z, z_0)\Delta z, \text{ где } \lim_{z \rightarrow z_0} \varepsilon(z, z_0) = 0,$$

Делим обе части на Δz

$$\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = A(z_0) + \varepsilon(z, z_0). \text{ Так как } \varepsilon(z, z_0) \text{ - бесконечно малая при } z \rightarrow z_0, \text{ то по}$$

теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой, $A(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$.

Поэтому $df(z_0) = f'(z_0)\Delta z$ - **формула для вычисления дифференциала**.

Достаточность. Пусть в точке z_0 существует конечная производная функции

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0). \text{ Тогда по теореме о связи функции, предела и бесконечно малой}$$

$$\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0) + \varepsilon(z, z_0). \quad \text{Умножая на } \Delta z, \quad \text{получим}$$

$$\Delta f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon(z, z_0)\Delta z, \text{ где } \lim_{z \rightarrow z_0} \varepsilon(z, z_0) = 0. \quad \text{Следовательно, функция}$$

дифференцируема в точке z_0 .

Функция называется дифференцируемой в области, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

2. Доказать теорему о дифференцировании изображения

Теорема о дифференцировании изображения. - $tf(t) \sim F'(p)$.

Доказательство. $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$. Дифференцируем обе части по p .

$$F'(p) = \int_0^{\infty} -tf(t)e^{-pt} dt. \text{ Тогда } -tf(t) \sim F'(p).$$

Пример. Найти оригинал для изображения $F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2}$.

$$\sin t \sim \frac{1}{p^2 + 1}, \quad t \sin t \sim -\left(\frac{1}{p^2 + 1}\right)' = \frac{2p}{(p^2 + 1)}. \text{ Поэтому } F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2} \sim \frac{t}{2} \sin t.$$

Пример. Найти изображение функции $t^2 e^t$ двумя способами.

1) $t^2 \sim \frac{2}{p^3}$. По теореме смещения $t^2 e^t \sim \frac{2}{(p-1)^3}$.

2) $e^t \sim \frac{1}{p-1}$. Дважды применим теорему о дифференцировании изображения:
 $-te^t \sim -\frac{1}{(p-1)^2}, \quad t^2 e^t \sim \frac{2}{(p-1)^3}.$

19 билет.

1. Сформулировать теоремы о связи типа особой точки с видом лорановского разложения. И некоторые доказать.

Рядом Лорана называется ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.

Второе слагаемое представляет собой степенной ряд и, как всякий степенной ряд, сходится в круге $|z - z_0| < R$. Это слагаемое называется **правильной частью ряда Лорана** и является, как сумма степенного ряда аналитической функцией.

Первое слагаемое называется **главной частью ряда Лорана**. Делая в нем замену $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$, запишем главную часть в виде $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n t^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} t^n$. Относительно переменной t

это — степенной ряд, сходящийся в некотором круге $|t| < \frac{1}{r}$. Возвращаясь к переменной z , получим, что главная часть сходится во внешности круга, радиуса r :

$$|z - z_0| = \frac{1}{|t|} > r. \text{ Ряд Лорана сходится в области, представляющей собой пересечение}$$

областей сходимости правильной и главной частей. Поэтому *область сходимости ряда Лорана представляет собой круговое кольцо* $r < |z - z_0| < R$. Радиусы сходимости r, R определяются для степенных рядов обычным образом, сходимость на границах кольца также исследуется, как в степенных рядах. Кольцо может быть вырождено, представлять собой окружность, если $r = R$ или пустое множество, если $r > R$.

Теорема. Для того чтобы z_0 была правильной точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функции $f(z)$ была ограниченной в окрестности точки z_0 .

Доказательство. Необходимость. Если z_0 — правильная точка функции $f(z)$, то, доопределяя ее в точке z_0 , сделаем функцию аналитической, следовательно, и непрерывной, (тогда $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$). Непрерывная функция является ограниченной в некоторой окрестности точки z_0 .

Достаточность. Пусть функция $f(z)$ — аналитическая в проколотой окрестности точки z_0 $0 < |z - z_0| < \delta$ и ограничена в окрестности $|z - z_0| < \delta$.

Так как функция $f(z)$ аналитическая в круговом кольце $0 < |z - z_0| < \delta$, то по теореме Лорана ее можно разложить в этом кольце в сходящийся ряд Лорана