

$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$. Справедливы неравенства Коши

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}, 0 < \rho < \delta, M = \max_{\gamma_\rho} |f(z)|. \quad \text{Рассмотрим } c_n, n < 0. \quad |c_n| \leq \frac{M}{\rho^n} - \frac{M}{\rho^{n+1}} \rightarrow 0.$$

Следовательно, $c_n = 0, n < 0$. Тогда ряд Лорана для функции $f(z)$ превращается в ряд Тейлора $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$. Доопределим функцию в точке z_0 $f(z_0) = c_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$. Тогда функция $f(z)$ станет аналитической в окрестности $|z - z_0| < \delta$ как сумма степенного ряда. Поэтому точка z_0 - правильная точка функции $f(z)$.

Следствие. Разложение функции в ряд Лорана в окрестности правильной точки представляет собой ряд Тейлора и не содержит членов с отрицательными степенями.

Теорема. Для того чтобы точка $z_0 \neq \infty$ была полюсом n -го порядка функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы ее разложение в ряд Лорана по степеням $z - z_0$ не содержало степеней ниже $(-n)$ и содержало слагаемое $\frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}, (c_{-n} \neq 0)$.

Доказательство. Необходимость. Если точка $z_0 \neq \infty$ - полюс n -го порядка функции $f(z)$, то $f(z) = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^n}, \psi(z_0) \neq 0, \psi(z)$ - аналитическая в $z = z_0$. Разложим

аналитическую функцию $\psi(z)$ в ряд Тейлора $\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, (\psi(z_0) = a_0 \neq 0)$ по степеням $(z - z_0)$ и подставим разложение.

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \frac{a_0}{(z - z_0)^n} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots, a_0 \neq 0.$$

Достаточность. Пусть $f(z) = \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots, (c_{-n} \neq 0)$. Тогда

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n} (c_{-n} + c_{-n+1}(z - z_0) + \dots) = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^n}, \quad \text{где } \psi(z_0) = c_{-n} \neq 0, \psi(z) -$$

аналитическая в точке z_0 функция (как сумма степенного ряда). Поэтому z_0 - полюс n -го порядка функции $f(z)$.

Теорема. Разложение функции в ряд Лорана в окрестности существенно особой точки конечной плоскости z_0 содержит бесконечное количество отрицательных степеней $(z - z_0)$.

Доказательство. Если разложение в ряд Лорана в окрестности особой точки конечной плоскости z_0 не содержит отрицательных степеней, то точка z_0 - правильная (доказанная выше теорема) - противоречие. Если разложение в ряд Лорана содержит конечное число отрицательных степеней, то точка z_0 - полюс (доказанная выше теорема) - противоречие. Остается только вариант наличия в разложении бесконечного числа слагаемых с отрицательными степенями.

Классификация особой точки z_0 (конечной плоскости) функции $f(z)$ по ее разложению в ряд Лорана в окрестности этой точки.

Если разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности z_0 (по степеням $z - z_0$):

1. Не содержит отрицательных степеней, то z_0 - правильная точка $f(z)$.
2. Содержит конечное число отрицательных степеней, то z_0 - полюс $f(z)$, причем наименьшая отрицательная степень определяет порядок полюса.
3. Содержит бесконечное количество членов с отрицательными степенями, то z_0 - существенно особая точка $f(z)$.

Это следует из доказанных выше теорем.

Классификация бесконечно удаленной особой точки $z_0 = \infty$ функции $f(z)$ по ее разложению в ряд Лорана в окрестности этой точки.

Разложение в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$, т.е. в области $|z| > R$ представляет собой ряд Лорана по степеням z : $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$, в котором *главная часть*, определяющая особенности функции, содержит *положительные степени*, а *правильная часть* – *отрицательные степени*.

Если разложение в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$, т.е. в области $|z| > R$:

- 1 Не содержит положительных степеней, то $z_0 = \infty$ - правильная точка $f(z)$.
- 2 Содержит конечное число положительных степеней, то $z_0 = \infty$ - полюс $f(z)$, причем наивысшая положительная степень определяет порядок полюса.
- 3 Содержит бесконечное количество членов с положительными степенями, то $z_0 = \infty$ - существенно особая точка $f(z)$.

Примеры.

- 1 $f(z) = z^2$. Это и есть разложение в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$, т.е. в области $|z| > R$, поэтому $z_0 = \infty$ - полюс $f(z)$ второго порядка.
- 2 $f(z) = e^z$. Разложение по степеням z : $e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \dots$ справедливо в области $|z| > R$, т.е. в окрестности точки $z_0 = \infty$. Оно содержит бесконечное количество членов с положительными степенями, поэтому $z_0 = \infty$ - существенно особая точка $f(z)$.
- 3 $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Запишем разложение в окрестности точки $z_0 = \infty$, т.е. в области $|z| > 1$.

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \dots$$

Разложение не содержит положительных степеней z , поэтому точка $z_0 = \infty$ - правильная, точнее, нуль первого порядка.