

4. $f(z) = (z-1)^2 \sin \frac{1}{z}$. Запишем разложение по степеням z в окрестности точки $z_0 = \infty$. $f(z) = (z^2 - 2z + 1) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots \right) = z - 2 + (1 - \frac{1}{3!})\frac{1}{z} + \dots$

В разложении старшая положительная степень – первая, поэтому $z_0 = \infty$ – полюс первого порядка. Это же разложение справедливо в области $|z| < R$, поэтому оно является разложением в окрестности точки $z = 0$. В нем бесконечное количество отрицательных степеней, поэтому точка $z = 0$ – существенно особая.

2. Доказать теорему о дифференцировании изображения

Теорема о дифференцировании изображения. – $tf(t) \sim F'(p)$.

Доказательство. $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$. Дифференцируем обе части по p .

$$F'(p) = \int_0^{\infty} -tf(t)e^{-pt} dt. \text{ Тогда } -tf(t) \sim F'(p).$$

Пример. Найти оригинал для изображения $F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2}$.

$$\sin t \sim \frac{1}{p^2 + 1}, \quad t \sin t \sim -\left(\frac{1}{p^2 + 1}\right)' = \frac{2p}{(p^2 + 1)^2}. \text{ Поэтому } F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)^2} \sim \frac{t}{2} \sin t.$$

Пример. Найти изображение функции $t^2 e^t$ двумя способами.

3) $t^2 \sim \frac{2}{p^3}$. По теореме смещения $t^2 e^t \sim \frac{2}{(p-1)^3}$.

4) $e^t \sim \frac{1}{p-1}$. Дважды применим теорему о дифференцировании изображения:
 $-te^t \sim -\frac{1}{(p-1)^2}, \quad t^2 e^t \sim \frac{2}{(p-1)^3}.$

20 билет

1. Сформулировать теоремы связи типа особой точки с видом лорановского распределения. И некоторые доказать

Рядом Лорана называется ряд $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.

Второе слагаемое представляет собой степенной ряд и, как всякий степенной ряд, сходится в круге $|z - z_0| < R$. Это слагаемое называется **правильной частью ряда Лорана** и является, как сумма степенного ряда аналитической функцией.

Первое слагаемое называется **главной частью ряда Лорана**. Делая в нем замену $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$, запишем главную часть в виде $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n t^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} t^n$. Относительно переменной t

это – степенной ряд, сходящийся в некотором круге $|t| < \frac{1}{r}$. Возвращаясь к переменной z , получим, что главная часть сходится во внешности круга, радиуса r :

$|z - z_0| = \frac{1}{|t|} > r$. Ряд Лорана сходится в области, представляющей собой пересечение

областей сходимости правильной и главной частей. Поэтому область сходимости ряда Лорана представляет собой круговое кольцо $r < |z - z_0| < R$. Радиусы сходимости r, R определяются для степенных рядов обычным образом, сходимость на границах кольца также исследуется, как в степенных рядах. Кольцо может быть вырождено, представлять собой окружность, если $r = R$ или пустое множество, если $r > R$.

Теорема. Для того чтобы z_0 была правильной точкой функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функции $f(z)$ была ограниченной в окрестности точки z_0 .

Доказательство. Необходимость. Если z_0 - правильная точка функции $f(z)$, то, доопределяя ее в точке z_0 , сделаем функцию аналитической, следовательно, и непрерывной, (тогда $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$). Непрерывная функция является ограниченной в некоторой окрестности точки z_0 .

Достаточность. Пусть функция $f(z)$ - аналитическая в проколотой окрестности точки z_0 $0 < |z - z_0| < \delta$ и ограничена в окрестности $|z - z_0| < \delta$.

Так как функция $f(z)$ аналитическая в круговом кольце $0 < |z - z_0| < \delta$, то по теореме Лорана ее можно разложить в этом кольце в сходящийся ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad \text{Справедливы} \quad \text{неравенства} \quad \text{Коши}$$

$$|c_n| \leq \frac{M}{\rho^n}, \quad 0 < \rho < \delta, \quad M = \max_{|z-z_0|=\rho} |f(z)|. \quad \text{Рассмотрим} \quad c_n, n < 0. \quad |c_n| \leq \frac{M}{\rho^n} - \frac{1}{\rho \rightarrow 0} \rightarrow 0.$$

Следовательно, $c_n = 0, n < 0$. Тогда ряд Лорана для функции $f(z)$ превращается в ряд

$$\text{Тейлора } f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n. \text{ Доопределим функцию в точке } z_0 \quad f(z_0) = c_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$$

. Тогда функция $f(z)$ станет аналитической в окрестности $|z - z_0| < \delta$ как сумма степенного ряда. Поэтому точка z_0 - правильная точка функции $f(z)$.

Следствие. Разложение функции в ряд Лорана в окрестности правильной точки представляет собой ряд Тейлора и не содержит членов с отрицательными степенями.

Теорема. Для того чтобы точка $z_0 \neq \infty$ была полюсом n -го порядка функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы ее разложение в ряд Лорана по степеням $z - z_0$ не содержало степеней ниже $(-n)$ и содержало слагаемое $\frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}, (c_{-n} \neq 0)$.

Доказательство. Необходимость. Если точка $z_0 \neq \infty$ - полюс n -го порядка функции $f(z)$, то $f(z) = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^n}, \psi(z_0) \neq 0, \psi(z)$ - аналитическая в $z = z_0$. Разложим

аналитическую функцию $\psi(z)$ в ряд Тейлора $\psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, (\psi(z_0) = a_0 \neq 0)$ по