

Доказательство. Обозначим $\varphi(t) = \int_0^t f(t)dt$. Это – оригинал (проверьте требования к оригиналу). $\varphi(0) = 0$. Обозначим $L(\varphi(t)) = \Phi(p)$. По теореме о дифференцировании оригинала $f(t) = \varphi'(t) \sim L(\varphi'(t)) = p\Phi(p) - \varphi(0) = F(p)$. Так как $\varphi(0) = 0$, то $\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$.

Следовательно, $\int_0^t f(t)dt \sim \frac{F(p)}{p}$.

Пример. $t^n \sim \frac{n!}{p^{n+1}}$.

$$1(t) \sim \frac{1}{p}, \quad t = \int_0^t 1(t)dt \sim \frac{1}{p^2}, \quad t^2 = 2 \int_0^t t dt \sim \frac{2}{p^3}, \quad t^3 = 3 \int_0^t t^2 dt \sim \frac{3 \cdot 2}{p^4}, \dots, t^n \sim \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

3 билет.

1. Вычет аналитической функции в изолированной особой точке. Вычет в бесконечно удаленной точке. Доказать теорему о сумме вычетов. В том случае, когда точка z_0 – **существенно особая точка**, вычет в ней вычисляется единственным способом – непосредственным разложением функции в ряд Лорана и вычислением коэффициента при -1 степени.

Пример. $f(z) = \frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z}$.

Здесь $z = 0$ – существенно особая точка. Разложение в ряд Лорана в окрестности $z = 0$:

$$f(z) = \frac{1}{z-1} \sin \frac{1}{z} = -\left(1 + z + z^2 + z^3 + \dots\right) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots\right) = \dots - \frac{1}{z} \left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots\right) + \dots$$

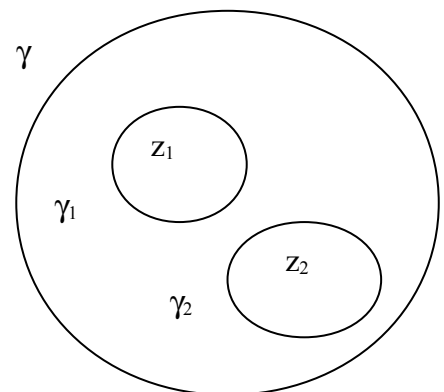
$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = -\sin 1.$$

Вычетом функции в бесконечно удаленной точке ($z = \infty$) называется коэффициент c_{-1} , (взятый со знаком минус коэффициент при -1 ой степени в разложении в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки).

Общая теорема о вычетах.

Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в области G и на ее границе – кусочно-гладком контуре γ за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1 \dots z_n$, лежащих внутри области G .

Тогда $\oint_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k} f(z)$



Доказательство. По интегральной теореме Коши для многосвязной области $\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z) dz$. Вычислим интеграл $\oint_{\gamma_k} f(z) dz$. Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_k и подставим в интеграл. По равномерной сходимости степенного ряда внутри круга сходимости, проведем почленное интегрирование и используем полученный ранее результат $\oint_{\gamma} \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ 2\pi i, & n = 1 \end{cases}$.

$$\oint_{\gamma_k} f(z) dz = \oint_{\gamma_k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{m_k} (z - z_k)^m dz = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_{m_k} \oint_{\gamma_k} (z - z_k)^m dz = c_{-1_k} 2\pi i = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_k} f(z).$$

$$\text{Тогда } \oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k} f(z).$$

Теорема. Сумма вычетов функции по всей расширенной плоскости равна нулю.

Доказательство. Выберем контур γ так, чтобы все особые точки функции лежали внутри контура. Тогда при обходе контура в положительном направлении надо учитывать особые точки, попавшие внутрь контура, т.е. все особые точки конечной плоскости. По общей теореме о вычетах $\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k} f(z)$. С другой стороны, при обходе контура в отрицательном направлении мы должны учитывать только бесконечно удаленную точку и интеграл получится тем же, но со знаком «минус» (свойство интеграла). Поэтому $-\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z)$. Складывая эти интегралы, получим

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0.$$

Следствие. Сумма вычетов функции по всей конечной плоскости равна вычету функции в бесконечно удаленной точке, взятому со знаком «минус».

Доказательство. По предыдущей теореме $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Res}_{z_k} f(z) + \operatorname{Res}_{z=\infty} f(z) = 0$. Отсюда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Res}_{z_k} f(z) = -\operatorname{Res}_{z=\infty} f(z).$$

2. Доказать теорему об интегрировании оригинала

Теорема об интегрировании оригинала. $\int_0^t f(t) dt \sim \frac{F(p)}{p}$.

Доказательство. Обозначим $\varphi(t) = \int_0^t f(t) dt$. Это – оригинал (проверьте требования к оригиналу). $\varphi(0) = 0$. Обозначим $L(\varphi(t)) = \Phi(p)$. По теореме о дифференцировании оригинала $f(t) = \varphi'(t) \sim L(\varphi'(t)) = p\Phi(p) - \varphi(0) = F(p)$. Так как $\varphi(0) = 0$, то $\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$.

Следовательно, $\int_0^t f(t) dt \sim \frac{F(p)}{p}$.