

степеням $(z - z_0)$ и подставим разложение.

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = \frac{a_0}{(z - z_0)^n} + \frac{a_1}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots, \quad a_0 \neq 0.$$

Достаточность. Пусть $f(z) = \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots, (c_{-n} \neq 0)$. Тогда

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n} (c_{-n} + c_{-n+1}(z - z_0) + \dots) = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^n}, \quad \text{где } \psi(z_0) = c_{-n} \neq 0, \quad \psi(z) -$$

аналитическая в точке z_0 функция (как сумма степенного ряда). Поэтому z_0 - полюс n -го порядка функции $f(z)$.

Теорема. Разложение функции в ряд Лорана в окрестности существенно особой точки конечной плоскости z_0 содержит бесконечное количество отрицательных степеней $(z - z_0)$.

Доказательство. Если разложение в ряд Лорана в окрестности особой точки конечной плоскости z_0 не содержит отрицательных степеней, то точка z_0 - правильная (доказанная выше теорема) - противоречие. Если разложение в ряд Лорана содержит конечное число отрицательных степеней, то точка z_0 - полюс (доказанная выше теорема) - противоречие. Остается только вариант наличия в разложении бесконечного числа слагаемых с отрицательными степенями.

Классификация особой точки z_0 (конечной плоскости) функции $f(z)$ по ее разложению в ряд Лорана в окрестности этой точки.

Если разложение функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности z_0 (по степеням $z - z_0$):

4. Не содержит отрицательных степеней, то z_0 - правильная точка $f(z)$.
5. Содержит конечное число отрицательных степеней, то z_0 - полюс $f(z)$, причем наименьшая отрицательная степень определяет порядок полюса.
6. Содержит бесконечное количество членов с отрицательными степенями, то z_0 - существенно особая точка $f(z)$.

Это следует из доказанных выше теорем.

Классификация бесконечно удаленной особой точки $z_0 = \infty$ функции $f(z)$ по ее разложению в ряд Лорана в окрестности этой точки.

Разложение в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$, т.е. в области $|z| > R$ представляет собой ряд Лорана по степеням z : $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$, в котором *главная часть*, определяющая особенности функции, содержит *положительные степени*, а *правильная часть* – *отрицательные степени*.

Если разложение в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$, т.е. в области $|z| > R$:

- 4 Не содержит положительных степеней, то $z_0 = \infty$ - правильная точка $f(z)$.
- 5 Содержит конечное число положительных степеней, то $z_0 = \infty$ - полюс $f(z)$, причем наивысшая положительная степень определяет порядок полюса.

- 6 Содержит бесконечное количество членов с положительными степенями, то $z_0 = \infty$ - существенно особая точка $f(z)$.

Примеры.

- 4 $f(z) = z^2$. Это и есть разложение в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$, т.е. в области $|z| > R$, поэтому $z_0 = \infty$ - полюс $f(z)$ второго порядка.

- 5 $f(z) = e^z$. Разложение по степеням z : $e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \dots$ справедливо в области $|z| > R$, т.е. в окрестности точки $z_0 = \infty$. Оно содержит бесконечное количество членов с положительными степенями, поэтому $z_0 = \infty$ - существенно особая точка $f(z)$.

- 6 $f(z) = \frac{1}{1-z}$. Запишем разложение в окрестности точки $z_0 = \infty$, т.е. в области $|z| > 1$.

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \dots \right) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \dots$$

Разложение не содержит положительных степеней z , поэтому точка $z_0 = \infty$ - правильная, точнее, нуль первого порядка.

4. $f(z) = (z-1)^2 \sin \frac{1}{z}$. Запишем разложение по степеням z в окрестности точки $z_0 = \infty$. $f(z) = (z^2 - 2z + 1) \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \dots \right) = z - 2 + (1 - \frac{1}{3!})\frac{1}{z} + \dots$

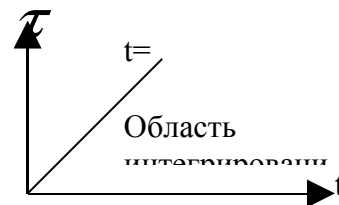
В разложении старшая положительная степень - первая, поэтому $z_0 = \infty$ - полюс первого порядка. Это же разложение справедливо в области $|z| < R$, поэтому оно является разложением в окрестности точки $z = 0$. В нем бесконечное количество отрицательных степеней, поэтому точка $z = 0$ - существенно особая.

2. Доказать теорему о свертке оригиналов

Теорема о свертке (теорема о произведении изображений). $f * \varphi \sim F(p)\Phi(p)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned} L(f * \varphi) &= \int_0^\infty f * \varphi \cdot e^{-pt} dt = \int_0^\infty \left(\int_0^t f(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right) e^{-pt} dt = \\ &= \int_0^\infty \left(\int_\tau^\infty f(t-\tau) \varphi(\tau) e^{-pt} dt \right) d\tau = (v = t - \tau) = \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(v) \varphi(\tau) e^{-p(v+\tau)} dv \right) d\tau = \int_0^\infty f(v) e^{-pv} dv \int_0^\infty \varphi(\tau) e^{-p\tau} d\tau = F(p)\Phi(p) \end{aligned}$$



Пример. Найти оригинал, соответствующий изображению $G(p) = \frac{p}{p^4 - 1}$

$$G(p) = \frac{p}{(p^2 - 1)(p^2 + 1)} = \frac{p}{p^2 - 1} \frac{1}{p^2 + 1} = \frac{1}{p^2 - 1} \frac{p}{p^2 + 1}$$