

$$G(p) \sim cht * \sin t, \quad G(p) \sim sht * \cos t.$$

21 билет

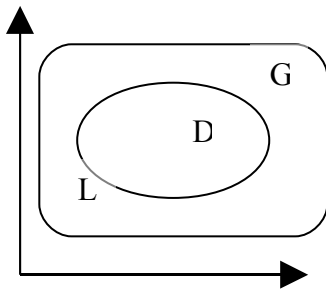
1. Доказать основную теорему Коши для односвязной области

Интегральная теорема Коши (для односвязной области).

Пусть G – односвязная область, пусть функция $f(z)$ – аналитическая в G функция, пусть L – кусочно—гладкий контур, принадлежащий области G . Тогда $\oint_L f(z) dz = 0$.

Теорему можно сформулировать и так: *интеграл от аналитической функции вдоль кусочно-гладкого контура равен нулю.*

Доказательство.



Обозначим D – внутренность контура L . Запишем формулу

Грина $\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$. Представим интеграл

$\oint_L f(z) dz$ в первой форме записи через два криволинейных интеграла $\oint_L f(z) dz = \oint_L u dx - v dy + i \oint_L v dx + u dy$

Применим к каждому слагаемому в правой части равенства формулу Грина. В первом интеграле примем $P = u$, $Q = -v$.

$$\oint_L u dx - v dy = \iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = 0$$

(для аналитической функции выполнены условия Коши – Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$).

Во втором интеграле примем $P = v$, $Q = u$.

$$\oint_L v dx + u dy = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0 \quad (\text{условие Коши – Римана}).$$

Поэтому $\oint_L f(z) dz = 0$.

Следствие. Пусть L_1 , L_2 – две кусочно-гладких дуги в односвязной области G , соединяющие точки A , B . Пусть функция $f(z)$ – аналитическая в области G . Тогда $\oint_{L_1} f(z) dz = \oint_{L_2} f(z) dz$.

Можно дать словесную формулировку: *интеграл от аналитической функции в односвязной области вдоль кусочно-гладкой дуги не зависит от формы дуги, а зависит только от начальной и конечной точек дуги.*

Доказательство. Образуем контур $\gamma = L_1 \cup (-L_2)$. По интегральной теореме Коши

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0. \text{ Но } \oint_{\gamma} f(z) dz = \int_{L_1} f(z) dz + \int_{-L_2} f(z) dz = \int_{L_1} f(z) dz - \int_{L_2} f(z) dz. \text{ Следовательно,}$$

$$\oint_{L_1} f(z) dz = \oint_{L_2} f(z) dz.$$

Поэтому результат в рассмотренном выше примере не случаен.

Очень важный пример. Вычислить интеграл $\oint_{\gamma} \frac{dz}{(z - z_0)^n}$, где n – целое число, контур γ – окружность с центром в точке z_0 радиусом ρ .

Покажем, что точки z на контуре γ можно описать уравнением $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $\rho > 0$ – действительное число. В самом деле, $|z - z_0| = \rho |e^{i\varphi}| = \rho$, так как $|e^{i\varphi}| = |\cos \varphi + i \sin \varphi| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$. Таким образом, контур γ – это геометрическое место точек комплексной плоскости, расположенных на расстоянии ρ от точки z_0 – окружность с центром в точке z_0 радиусом ρ .

Если $n \leq 0$, то подынтегральная функция – аналитическая внутри контура γ . Тогда по интегральной теореме Коши $\oint_{\gamma} \frac{dz}{(z - z_0)^n} = 0$.

Пусть $n > 0$. Так как точка z лежит на контуре γ , то $z = z_0 + \rho e^{i\varphi}$, $dz = i\rho e^{i\varphi} d\varphi$. Перейдем к переменной φ . Пусть $n \neq 1$.

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\varphi} d\varphi}{\rho^n e^{in\varphi}} = \rho^{1-n} i \int_0^{2\pi} e^{-i(n-1)\varphi} d\varphi = \frac{i\rho^{1-n}}{n-1} e^{-i(n-1)\varphi} \Big|_0^{2\pi} = 0$$

по периодичности экспоненты.

Пусть $n = 1$. Тогда

$$\oint_{\gamma} \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{\rho i e^{i\varphi}}{\rho e^{i\varphi}} d\varphi = i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i.$$

$$\text{Вывод. } \oint_{\gamma} \frac{dz}{(z - z_0)^n} = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ 2\pi i, & n = 1 \end{cases}$$

2. Доказать теорему об интегрировании изображения

Теорема об интегрировании изображения. Если $\frac{f(t)}{t}$ – оригинал, то $\frac{f(t)}{t} \sim \int_p^{\infty} F(p) dp$.

Доказательство. Обозначим $\varphi(t) = \frac{f(t)}{t}$, $L(\varphi(t)) = \Phi(p)$. Тогда $f(t) = t\varphi(t)$.

По теореме о дифференцировании изображения $f(t) = t\varphi(t) \sim -\Phi'(p)$. Но $f(t) \sim F(p)$. Поэтому $-\Phi'(p) = F(p)$, $\int_p^{\infty} F(p) dp = -\int_p^{\infty} \Phi'(p) dp = -(\lim_{p \rightarrow \infty} \Phi(p) - \Phi(p)) = \Phi(p)$, так как $\lim_{p \rightarrow \infty} \Phi(p) = 0$, ($\Phi(p)$ – изображение).

$$\text{Пример. } L\left(\frac{\sin t}{t}\right) = \int_p^{\infty} \frac{dp}{p^2 + 1} = \arctg p \Big|_p^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctg p.$$