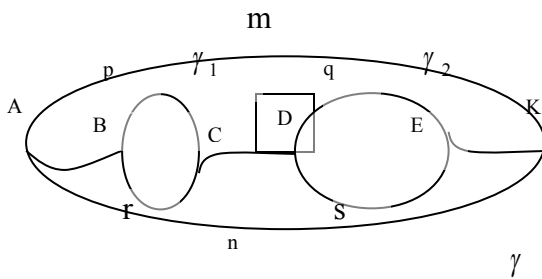


1. Доказать основную теорему Коши для многосвязной области

Интегральная теорема Коши для многосвязной области.

Пусть кусочно-гладкие контуры $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ лежат внутри контура γ и вне друг друга. Пусть $f(z)$ - аналитическая функция в области между контурами и на самих этих контурах. Тогда $\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z) dz$.



Соединим контуры линиями AB, CD, EK.

По интегральной теореме Коши интегралы по контуру $ABpCDqEKmA$ и по контуру $AnKEsDCrBA$ равны нулю. Представим эти интегралы как сумму интегралов по составляющим контуры дугам и сложим эти интегралы, сокращая интегралы по одним и тем же дугам в разных направлениях

$$0 = \oint_{ABpCDqEKmA} f(z) dz = \int_{AB} + \int_{BpC} + \int_{CD} + \int_{DqE} + \int_{EK} + \int_{KmA}$$

$$0 = \oint_{AnKEsDCrBA} f(z) dz = \int_{BA} + \int_{CrB} + \int_{DC} + \int_{EsD} + \int_{KE} + \int_{AnK}$$

Складывая интегралы, получим

$$0 = \int_{BpCrB} + \int_{DqEsD} + \int_{KmAnK} = - \oint_{\gamma_1} f(z) dz - \oint_{\gamma_2} f(z) dz + \oint_{\gamma} f(z) dz. \text{ Отсюда имеем}$$

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma_1} f(z) dz + \oint_{\gamma_2} f(z) dz. \text{ Теорема доказана для случая } n = 2. \text{ Для } n > 2$$

доказательство аналогично.

Следствие 1. В условиях теоремы при $n = 1$ будет $\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma_1} f(z) dz$. Поэтому, если

в какой-либо точке нарушается аналитичность функции, то интеграл может быть взят по любому кусочно-гладкому не самопересекающемуся контуру, охватывающему эту точку, мы получим один и тот же результат.

Следствие 2. Если кусочно-гладкий контур γ один раз охватывает некоторую точку, $\oint_{\gamma} f(z) dz = W$, а контур L n раз охватывает эту точку, то в условиях теоремы $\oint_L f(z) dz = nW$.

Докажите это самостоятельно.

2. Доказать теорему о свертке оригиналов

Теорема о свертке (теорема о произведении изображений). $f * \varphi \sim F(p)\Phi(p)$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}
L(f * \varphi) &= \int_0^{\infty} f * \varphi \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \left(\int_0^t f(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right) e^{-pt} dt = \\
&= \int_0^{\infty} \left(\int_{\tau}^{\infty} f(t-\tau) \varphi(\tau) e^{-pt} dt \right) d\tau = (v = t - \tau) = \\
&= \int_0^{\infty} \left(\int_0^{\infty} f(v) \varphi(\tau) e^{-p(v+\tau)} dv \right) d\tau = \int_0^{\infty} f(v) e^{-pv} dv \int_0^{\infty} \varphi(\tau) e^{-p\tau} d\tau = F(p) \Phi(p)
\end{aligned}$$



Пример. Найти оригинал, соответствующий изображению $G(p) = \frac{p}{p^4 - 1}$

$$\begin{aligned}
G(p) &= \frac{p}{(p^2 - 1)(p^2 + 1)} = \frac{p}{p^2 - 1} \frac{1}{p^2 + 1} = \frac{1}{p^2 - 1} \frac{p}{p^2 + 1} \\
G(p) &\sim cht * \sin t, \quad G(p) \sim sht * \cos t.
\end{aligned}$$

23 билет

1. Вывести формулу для вычисления вычета в полюсе

Если z_0 – **правильная особая точка**, то ряд Лорана превращается в ряд Тейлора, в котором нет отрицательных степеней $z - z_0$, поэтому $\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = 0$.

Если z_0 – **полюс первого порядка**, то разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки не содержит степеней $z - z_0$, ниже, чем -1 и содержит степень -1 . Разложение выглядит так.

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (c_{-1} \neq 0). \text{ Умножим обе части на } z - z_0$$

$f(z)(z - z_0) = c_{-1} + c_0(z - z_0) + c_1(z - z_0)^2 + \dots$ Перейдем к пределу при $z \rightarrow z_0$, чтобы обратились в нуль все слагаемые в правой части, содержащие целые степени $z - z_0$.

$c_{-1} = \operatorname{Res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)$ - **формула для вычета функции в полюсе первого порядка.**

В том случае, когда z_0 – **полюс первого порядка функции вида**

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} \quad (\varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) \neq 0), \text{ можно получить удобную в вычислениях}$$

формулу для вычета.

$$\begin{aligned}
c_{-1} &= \operatorname{Res}_{z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0) = \\
\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} (z - z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\psi(z)}{\frac{\varphi(z) - \varphi(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\psi(z_0)}{\varphi'(z_0)} - \text{формула для вычета функции в}
\end{aligned}$$

полюсе первого порядка. Здесь использованы условия $(\varphi(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) \neq 0)$.

Пример. Найти вычеты функции $\frac{1}{z^2 + 1}$ во всех особых точках конечной плоскости.

У функции два полюса первого порядка $z = i, z = -i$.

По первой формуле