

$$\operatorname{Res}_i f(z) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{(z-i)(z+1)} (z-i) = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$$

$$\operatorname{Res}_{-i} f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{1}{(z-i)(z+1)} (z+i) = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2}.$$

Применим вторую формулу

$$\varphi(z) = z^2 + 1, \quad \varphi'(z) = 2z, \quad \psi(z) = 1. \quad \operatorname{Res}_i f(z) = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}, \quad \operatorname{Res}_{-i} f(z) = \frac{1}{-2i} = \frac{i}{2}.$$

В том случае, когда z_0 – **полюс n -го порядка**, то разложение в ряд Лорана в окрестности этой точки не содержит степеней $z - z_0$, ниже, чем $-n$ и содержит степень $-n$ ($c_{-n} \neq 0$). Разложение выглядит так.

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-z_0)^n} + \frac{c_{-n+1}}{(z-z_0)^{n-1}} + \frac{c_{-n+2}}{(z-z_0)^{n-2}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots$$

Умножим обе части на $(z-z_0)^n$.

$$f(z)(z-z_0)^n = c_{-n} + c_{-n+1}(z-z_0) + c_{-n+2}(z-z_0)^2 + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{n-1} + c_0(z-z_0)^n + \dots$$

Уничтожим степень при коэффициенте c_{-1} дифференцированием, его надо провести $(n-1)$ раз. Получим

$$\frac{d^{n-1}(f(z)(z-z_0)^n)}{dz^{n-1}} = (n-1)!c_{-1} + n(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2(z-z_0) + \dots$$

Перейдем к пределу при $z \rightarrow z_0$. Все слагаемые в правой части, содержащие целые степени $z - z_0$ (второе, третье, четвертое и т.д.) обратятся в нуль. **Отсюда имеем формулу для вычета функции в полюсе n -ого порядка:**

$$\operatorname{Res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (f(z)(z-z_0)^n)$$

Пример. $f(z) = \frac{1}{z(z-1)^2}$. $z=0$ – полюс 1 порядка, $z=1$ – полюс 2 порядка.

$$\operatorname{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{(0-1)^2} = 1, \quad \operatorname{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left(\frac{1}{z} \right)' = -1.$$

2. Доказать свойства свертки интегралов

Сверткой $f(t) * \varphi(t)$ двух функций называется интеграл $f(t) * \varphi(t) = \int_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$.

Свойства свертки.

4. **Коммутативность.** $f * \varphi = \varphi * f$

$$\varphi * f = \int_0^t \varphi(t-\tau)f(\tau)d\tau = (\text{замена } v = t - \tau) = - \int_t^0 \varphi(v)f(t-v)dv = \int_0^t f(t-v)\varphi(v)dv = f * \varphi$$

5. **Ассоциативность.**

$$f * (\varphi * \psi) = (f * \varphi) * \psi \quad (\text{доказательство громоздко, см. его в учебнике т.Х1}).$$

6. $f * \varphi$ – оригинал, если f, φ – оригиналы.

Самостоятельно проверьте первые два требования к оригиналу. Проверим третье требование.

Пусть $|f(t)| < M_1 e^{s_1 t}$, $|\varphi(t)| < M_2 e^{s_2 t}$. Обозначим $M = M_1 M_2$, $s = \max(s_1, s_2) + \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$.

$$|f * \varphi| = \left| \int_0^t f(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |f(t-\tau)| |\varphi(\tau)| d\tau < M_1 M_2 \int_0^t e^{s_1(t-\tau)} e^{s_2\tau} d\tau \leq$$

$$a) s_1 > s_2$$

$$\leq M \int_0^t e^{s_1\tau} e^{(s_2-s_1)\tau} d\tau < M \int_0^t e^{s_1\tau} d\tau = Mte^{s_1t} < Me^{st}$$

$$б) s_1 < s_2.$$

$$\leq M \int_0^t e^{s_2(t-\tau)} e^{s_2\tau} d\tau = M \int_0^t e^{s_2\tau} d\tau = Mte^{s_2t} < Me^{st}.$$

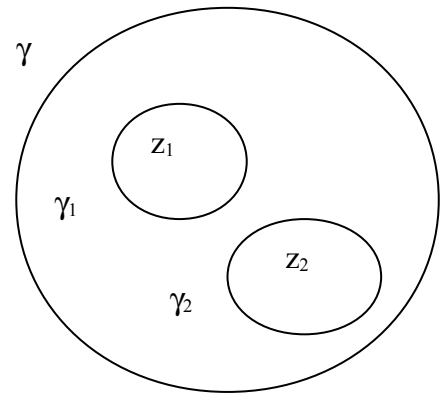
24 билет

1. Основная теорема о вычетах и ее следствия

Общая теорема о вычетах.

Пусть функция $f(z)$ - аналитическая в области G и на ее границе - кусочно-гладком контуре γ за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1 \dots z_n$, лежащих внутри области G .

$$\text{Тогда } \oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k} f(z)$$



Доказательство. По интегральной теореме Коши для многосвязной области $\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z) dz$. Вычислим интеграл $\oint_{\gamma_k} f(z) dz$. Разложим функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_k и подставим в интеграл. По равномерной сходимости степенного ряда внутри круга сходимости, проведем почленное интегрирование и используем полученный ранее результат $\oint_{\gamma} \frac{dz}{(z-z_0)^n} = \begin{cases} 0, & n \neq 1 \\ 2\pi i, & n = 1 \end{cases}$.

$$\oint_{\gamma_k} f(z) dz = \oint_{\gamma_k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m (z-z_k)^m dz = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m \oint_{\gamma_k} (z-z_k)^m dz = c_{-1_k} 2\pi i = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_k} f(z).$$

$$\text{Тогда } \oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}_{z_k} f(z).$$

2. Вывести формулу для нахождения изображения периодического оригинала.

Изображение периодической функции.

Пусть функция $f(t)$ - периодическая с периодом T . Обозначим $f_0(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [0, T] \\ 0, & t \notin [0, T] \end{cases}$.

Вычислим $L(f_0(t)) = F_0(p) = \int_0^T f(t) e^{-pt} dt$. Представим функцию $f(t)$ в виде

$f(t) = f_0(t)1(t) + f_0(t-T)1(t-T) + f_0(t-2T)1(t-2T) + \dots$ и применим теорему запаздывания

$$F(p) = F_0(p) + e^{-pT} F_0(p) + e^{-2pT} F_0(p) + \dots = F_0(p)(1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}}.$$

Примеры.

2) Найти оригинал по изображению $F(p) = \frac{e^{-2p}}{p^2 + 4}.$

$\sin 2t \sim \frac{2}{p^2 + 4}.$ По теореме запаздывания $\frac{1}{2} \sin 2(t-2)1(t-2) \sim \frac{e^{-2p}}{p^2 + 4}.$

2) Найти изображение периодической функции с периодом T . $f(t) = e^{-t}, t \in [0, T]$

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}}, \quad F_0(p) = \int_0^T e^{-t} e^{-pt} dt = \int_0^T e^{-(p+1)t} dt = \frac{1 - e^{-(p+1)T}}{p+1}$$