

Пример. $t^n \sim \frac{n!}{p^{n+1}}.$

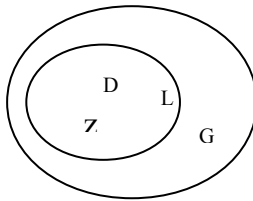
$$1(t) \sim \frac{1}{p}, \quad t = \int_0^t 1(t) dt \sim \frac{1}{p^2}, \quad t^2 = 2 \int_0^t t dt \sim \frac{2}{p^3}, \quad t^3 = 3 \int_0^t t^2 dt \sim \frac{3 \cdot 2}{p^4}, \dots, t^n \sim \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

4 билет.

1. Вывести интегральную формулу Коши

Интегральная формула Коши.

Интегральная формула Коши



Пусть функция $f(z)$ аналитическая в односвязной области G . Пусть кусочно-гладкий контур L принадлежит G вместе со своей внутренностью D . Пусть $z_0 \in D$, тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Доказательство. По интегральной теореме Коши для многосвязной области

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \text{ где } \gamma_\rho - \text{окружность с центром в точке } z_0, \text{ радиусом } \rho,$$

$\gamma_\rho : z = z_0 + \rho e^{i\varphi}, 0 \leq \varphi < 2\pi$. Радиус окружности выбран достаточно малым, чтобы окружность целиком лежала в области D . Так как $\oint_{\gamma_\rho} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$ (важный пример в

предыдущей лекции), то $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz$. Оценим $|f(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz| =$

$$= \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z_0) - f(z)}{z - z_0} dz \right| \leq \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{|f(z_0) - f(z)|}{|z - z_0|} |dz| \right| \leq$$

(на окружности γ_ρ , $|dz| = |\rho i e^{i\varphi} d\varphi| = \rho d\varphi$, так как $|i| = 1, |e^{i\varphi}| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$).

По непрерывности функции $f(z) \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \rho(\varepsilon) > 0, |z - z_0| < \rho \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.

$$\leq \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon}{\rho} \oint_{\gamma_\rho} |dz| = \frac{\varepsilon}{2\pi \rho} \int_0^{2\pi} \rho d\varphi = \frac{\varepsilon}{2\pi \rho} 2\pi \rho = \varepsilon. \quad \text{В силу произвольности } \varepsilon$$

$$|f(z_0) - \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz| = 0. \text{ Следовательно, } f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

2. Доказать теорему об интегрировании оригинала

Теорема об интегрировании оригинала. $\int_0^t f(t) dt \sim \frac{F(p)}{p}.$

Доказательство. Обозначим $\varphi(t) = \int_0^t f(t)dt$. Это – оригинал (проверьте требования к оригиналу). $\varphi(0) = 0$. Обозначим $L(\varphi(t)) = \Phi(p)$. По теореме о дифференцировании оригинала $f(t) = \varphi'(t) \sim L(\varphi'(t)) = p\Phi(p) - \varphi(0) = F(p)$. Так как $\varphi(0) = 0$, то $\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$.

Следовательно, $\int_0^t f(t)dt \sim \frac{F(p)}{p}$.

Пример. $t^n \sim \frac{n!}{p^{n+1}}$.

$$1(t) \sim \frac{1}{p}, \quad t = \int_0^t 1(t)dt \sim \frac{1}{p^2}, \quad t^2 = 2 \int_0^t t dt \sim \frac{2}{p^3}, \quad t^3 = 3 \int_0^t t^2 dt \sim \frac{3 \cdot 2}{p^4}, \dots, t^n \sim \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

5 билет.

1. Доказать теорему Абеля для степенных рядов (в комплексной плоскости)

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ сходится в точке $z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится в круге $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ расходится в точке $z_1 \neq z_0$, то он расходится во внешности круга $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$.

Доказательство (аналогично случаю действительной переменной).

1) Пусть ряд сходится в точке $z_1 \neq z_0$ и $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.

Так как ряд сходится в точке $z_1 \neq z_0$, то по необходимому признаку сходимости ряда $c_n(z_1 - z_0)^n - \frac{1}{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \Rightarrow |c_n||z_1 - z_0|^n - \frac{1}{n \rightarrow \infty} \rightarrow 0$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon), \forall n > N |c_n(z_1 - z_0)^n| < \varepsilon$.

Исследуем степенной ряд на абсолютную сходимость. Рассмотрим ряд из модулей членов ряда. $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n(z - z_0)^n|$ Оценим общий член ряда из модулей.

$$|c_n(z - z_0)^n| = \left| c_n \frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n} (z_1 - z_0)^n \right| \leq |c_n(z_1 - z_0)^n| \frac{|z - z_0|^n}{|z_1 - z_0|^n} \leq \varepsilon q^n, \text{ где } 0 < q = \frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} < 1.$$

Ряд из модулей исходного ряда сходится по первому признаку сравнения числовых рядов (ряд сравнения – сходящаяся бесконечно убывающая геометрическая прогрессия $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon q^n, 0 < q < 1$). Следовательно, исходный ряд в области $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ сходится абсолютно.

Замечание. Казалось бы, что из признака Вейерштрасса в области $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ следует равномерная сходимость исходного ряда, но здесь $q = q(z)$, а в признаке Вейерштрасса требуется указать один мажорирующий ряд для всех точек z рассматриваемой области, то есть q не должно зависеть от z . Поэтому равномерную сходимость ряда в области $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ утверждать нельзя. Однако если взять $\frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} < q_1 < 1$ (q_1 не зависит от z), то в области $|z - z_0| < q_1|z_1 - z_0|$ степенной ряд будет сходиться равномерно по признаку Вейерштрасса.