

2) Пусть ряд расходится в точке $z_1 \neq z_0$ и $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$.

Если ряд сходится в точке z , то по доказанному в пункте 1), он должен абсолютно сходиться в точке z_1 , следовательно, сходиться в точке $z_1 \neq z_0$. Это противоречит тому, что исходный ряд расходится в точке $z_1 \neq z_0$, следовательно исходный ряд расходится в области $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$.

2. Вывести формулу для изображения периодического оригинала

Изображение периодической функции.

Пусть функция $f(t)$ - периодическая с периодом T . Обозначим $f_0(t) = \begin{cases} f(t), t \in [0, T] \\ 0, t \notin [0, T] \end{cases}$.

Вычислим $L(f_0(t)) = F_0(p) = \int_0^T f(t) e^{-pt} dt$. Представим функцию $f(t)$ в виде

$$f(t) = f_0(t)1(t) + f_0(t-T)1(t-T) + f_0(t-2T)1(t-2T) + \dots \quad \text{и применим теорему}$$

запаздывания

$$F(p) = F_0(p) + e^{-pT} F_0(p) + e^{-2pT} F_0(p) + \dots = F_0(p)(1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}}.$$

Примеры.

1) Найти оригинал по изображению $F(p) = \frac{e^{-2p}}{p^2 + 4}$.

$$\sin 2t \sim \frac{2}{p^2 + 4}. \text{ По теореме запаздывания } \frac{1}{2} \sin 2(t-2)1(t-2) \sim \frac{e^{-2p}}{p^2 + 4}.$$

2) Найти изображение периодической функции с периодом T . $f(t) = e^{-t}, t \in [0, T]$

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}}, \quad F_0(p) = \int_0^T e^{-t} e^{-pt} dt = \int_0^T e^{-(p+1)t} dt = \frac{1 - e^{-(p+1)T}}{p+1}$$

6 билет.

1. Доказать теорему Абеля для степенных рядов (в комплексной плоскости)

Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ сходится в точке $z_1 \neq z_0$, то он абсолютно сходится в круге $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ расходится в точке $z_1 \neq z_0$, то он расходится во внешности круга $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$.

Доказательство (аналогично случаю действительной переменной).

3) Пусть ряд сходится в точке $z_1 \neq z_0$ и $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$.

Так как ряд сходится в точке $z_1 \neq z_0$, то по необходимому признаку сходимости ряда $c_n (z_1 - z_0)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow |c_n| |z_1 - z_0|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Тогда $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon), \forall n > N |c_n (z_1 - z_0)^n| < \varepsilon$.

Исследуем степенной ряд на абсолютную сходимость. Рассмотрим ряд из модулей членов ряда. $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n (z - z_0)^n|$ Оценим общий член ряда из модулей.

$$\left| c_n (z - z_0)^n \right| = \left| c_n \frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n} (z_1 - z_0)^n \right| \leq \left| c_n (z_1 - z_0)^n \right| \frac{|z - z_0|^n}{|z_1 - z_0|^n} \leq \varepsilon q^n, \text{ где } 0 < q = \frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} < 1.$$

Ряд из модулей исходного ряда сходится по первому признаку сравнения числовых рядов (ряд сравнения – сходящаяся бесконечно убывающая геометрическая прогрессия $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon q^n, 0 < q < 1$). Следовательно, исходный ряд в области $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ *сходится абсолютно*.

Замечание. Казалось бы, что из признака Вейерштрасса в области $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ следует равномерная сходимость исходного ряда, но здесь $q = q(z)$, а в признаке Вейерштрасса требуется указать один мажорирующий ряд для всех точек z рассматриваемой области, то есть q не должно зависеть от z . Поэтому равномерную сходимость ряда в области $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ утверждать нельзя. Однако если взять $\frac{|z - z_0|}{|z_1 - z_0|} < q_1 < 1$ (q_1 не зависит от z), то в области $|z - z_0| < q_1 |z_1 - z_0|$ степенной ряд будет сходиться равномерно по признаку Вейерштрасса.

4) Пусть ряд расходится в точке $z_1 \neq z_0$ и $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$.

Если ряд сходится в точке z , то по доказанному в пункте 1), он должен абсолютно сходиться в точке z_1 , следовательно, сходиться в точке $z_1 \neq z_0$. Это противоречит тому, что исходный ряд расходится в точке $z_1 \neq z_0$, следовательно исходный ряд расходится в области $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$.

2. Доказать теорему об интегрировании оригинала

Теорема об интегрировании оригинала. $\int_0^t f(t) dt \sim \frac{F(p)}{p}.$

Доказательство. Обозначим $\varphi(t) = \int_0^t f(t) dt$. Это – оригинал (проверьте требования к оригиналу). $\varphi(0) = 0$. Обозначим $L(\varphi(t)) = \Phi(p)$. По теореме о дифференцировании оригинала $f(t) = \varphi'(t) \sim L(\varphi'(t)) = p\Phi(p) - \varphi(0) = F(p)$. Так как $\varphi(0) = 0$, то $\Phi(p) = \frac{F(p)}{p}$.

Следовательно, $\int_0^t f(t) dt \sim \frac{F(p)}{p}.$

Пример. $t^n \sim \frac{n!}{p^{n+1}}.$

$$1(t) \sim \frac{1}{p}, \quad t = \int_0^t 1(t) dt \sim \frac{1}{p^2}, \quad t^2 = 2 \int_0^t t dt \sim \frac{2}{p^3}, \quad t^3 = 3 \int_0^t t^2 dt \sim \frac{3 \cdot 2}{p^4}, \dots, t^n \sim \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

7 билет.

1. Достаточные условия дифференцируемости функции комплексного переменного (сформулировать и доказать)

Производная функции комплексной переменной вводится так же, как и для функции действительной переменной