$$f'(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Функция $f(z)$ называется **дифференцируемой в точке** z_0**,** если ее приращение в этой точке можно представить в виде

$\Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A(z_0)\Delta z + \varepsilon(z, z_0)\Delta z,$ *где* $\lim_{z\to z_0} \varepsilon(z, z_0) = 0$, то есть $\varepsilon(z, z_0)$ - бесконечно малая при $z \to z_0$. Главная линейная относительно Δz часть приращения функции в точке z_0, $A(z_0)\Delta z$ называется **дифференциалом функции в точке** z_0**, (**$df(z_0) = A(z_0)\Delta z$).

Замечание. Функция двух переменных $\varphi(x, y)$ называется дифференцируемой в точке (x_0, y_0), если ее приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta\varphi(x_0, y_0) = A(x_0, y_0)\Delta x + B(x_0, y_0)\Delta y + \varepsilon_1(x, y, x_0, y_0)\Delta x + \varepsilon_2(x, y, x_0, y_0)\Delta y,$$

где $\varepsilon_1(x, y, x_0, y_0)$, $\varepsilon_2(x, y, x_0, y_0)$ - бесконечно малые при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$,

$$A = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0, y_0),\ B = \frac{\partial\varphi}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Теорема. Для того, чтобы функция $f(z)$ была дифференцируема в точке z_0, необходимо и достаточно, чтобы существовала ее конечная производная в этой точке.

Доказательство. Проводится так же, как и для функции действительной переменной с использованием теоремы о связи функции, предела и бесконечно малой.

Необходимость. Пусть функция дифференцируема в точке z_0, тогда

$\Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) = A(z_0)\Delta z + \varepsilon(z, z_0)\Delta z,$ *где* $\lim_{z\to z_0} \varepsilon(z, z_0) = 0$,

Делим обе части на Δz

$\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = A(z_0) + \varepsilon(z, z_0)$. Так как $\varepsilon(z, z_0)$ - бесконечно малая при $z \to z_0$, то по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой, $A(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$.

Поэтому $df(z_0) = f'(z_0)\Delta z$ - **формула для вычисления дифференциала.**

Достаточность. Пусть в точке z_0 существует конечная производная функции $\lim_{z\to z_0} \frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0)$. Тогда по теореме о связи функции, предела и бесконечно малой $\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0) + \varepsilon(z, z_0)$. Умножая на Δz, получим $\Delta f(z_0) = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon(z, z_0)\Delta z,$ *где* $\lim_{z\to z_0} \varepsilon(z, z_0) = 0$. Следовательно, функция дифференцируема в точке z_0.

Функция называется дифференцируемой в области, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

2. Доказать теорему о свертке оригиналов

Теорема о свертке (теорема о произведении изображений). $f * \varphi \sim F(p)\Phi(p)$.

Доказательство.

$$L(f*\varphi) = \int_0^\infty f*\varphi\quad e^{-pt}dt = \int_0^\infty\left(\int_0^t f(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau\right)e^{-pt}dt =$$

$$= \int_0^\infty\left(\int_\tau^\infty f(t-\tau)\varphi(\tau)\,e^{-pt}dt\right)d\tau = (v = t-\tau) =$$

$$= \int_0^\infty\left(\int_0^\infty f(v)\varphi(\tau)\,e^{-p(v+\tau)}dv\right)d\tau = \int_0^\infty f(v)e^{-pv}dv\int_0^\infty \varphi(\tau)\,e^{-p\tau}d\tau = F(p)\Phi(p)$$

Пример. Найти оригинал, соответствующий изображению $G(p) = \dfrac{p}{p^4 - 1}$

$$G(p) = \frac{p}{(p^2-1)(p^2+1)} = \frac{p}{p^2-1}\frac{1}{p^2+1} = \frac{1}{p^2-1}\frac{p}{p^2+1}$$

$$G(p) \sim cht*\sin t,\quad G(p) \sim sht*\cos t.$$

8 билет.

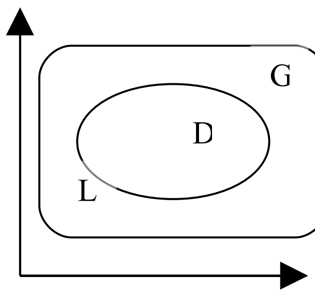
1. Доказать основную теорему Коши для односвязной области

Интегральная теорема Коши (для односвязной области).

Пусть G – односвязная область, пусть функция f(z) – аналитическая в G функция, пусть L – кусочно—гладкий контур, принадлежащий области G. Тогда $\oint_L f(z)dz = 0$.

Теорему можно сформулировать и так: *интеграл от аналитической функции вдоль кусочно-гладкого контура равен нулю.*

Доказательство.



Обозначим D – внутренность контура L . Запишем формулу Грина $\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$. Представим интеграл $\oint_L f(z)dz$ в первой форме записи через два криволинейных интеграла $\oint_L f(z)dz = \oint_L udx - vdy + i\oint_L vdx + udy$

Применим к каждому слагаемому в правой части равенства формулу Грина. В первом интеграле примем P = u, Q = -v.

$$\oint_L udx - vdy = \iint_D\left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy = 0$$

(для аналитической функции выполнены условия Коши – Римана $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$).

Во втором интеграле примем P = v, Q = u.