

**ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ /2010г**

2 курс, 4 сем., ИУ1,2,3,4.

1. Что называют: (а) случайным испытанием; (б) элементарным событием; (в) пространством элементарных событий; (г) случайным событием; (д) характеристическим множеством случайного события?
2. Дайте определение вероятности по Лапласу (комбинаторное определение).
3. Дайте геометрическое определение вероятности. Что общего между геометрическим определением вероятности и определением вероятности по Лапласу?
4. Дайте аксиоматическое (по Колмогорову) определение вероятности.
5. Используя аксиоматическое (по Колмогорову) определение вероятности, докажите следующие утверждения: (а) $P(\emptyset) = 0$; (б) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; (в) если $A \subset B$, то $P(A) \leq P(B)$.
6. Дайте определение условной вероятности. Как связаны условная и безусловная вероятности? Что понимают под теоремой умножения вероятностей?
7. Дайте определение: (а) независимых случайных событий; (б) полной группы случайных событий.
8. Выведите формулу полной вероятности.
9. Получите формулу Байеса.
10. Дайте определение независимых испытаний. Что понимают под схемой Бернулли?
11. Докажите, что при n испытаниях по схеме Бернулли вероятность P_{nm} того, что ровно m из них будут успешными, определяется равенством:

$$P_{nm} = C_n^m \cdot p^m (1-p)^{n-m}.$$

12. Проводятся n испытаний по схеме Бернулли и

$$P_{nm} = C_n^m \cdot p^m (1-p)^{n-m}.$$

Докажите, что

- (а) $\sum_{m=0}^n P_{nm} = 1$;
- (б) $\sum_{m=m_1+1}^{m_2} P_{nm}$ – вероятность того, что число успешных испытаний не превосходит $m_2 \leq n$, но больше m_1 , где $0 \leq m_1 < m_2 \leq n$.

13. Дайте определение скалярной случайной величины, сформулируйте и докажите основные свойства ее функции распределения.
14. Что называют дискретной случайной величиной? Сформулируйте и докажите утверждение о виде функции распределения дискретной случайной величины.
15. Дайте определение непрерывной скалярной случайной величины и сформулируйте основные свойства ее плотности распределения вероятностей.
16. Что называют функцией Лапласа и какими свойствами она обладает?
17. Дайте определение обобщенной плотности распределения вероятностей дискретной скалярной случайной величины и приведите аргументы для обоснования его корректности.
18. Выведите понятие n -мерного случайного вектора и сформулируйте основные свойства его функции распределения.
19. Что называют дискретным случайным вектором? Сформулируйте и докажите утверждение о виде функции распределения дискретного случайного вектора.
20. Дайте определение непрерывного случайного вектора. Сформулируйте и докажите основные свойства его плотности распределения вероятностей.
21. Что понимают под функцией случайных величин? Сформулируйте и решите задачу о нахождении закона распределения функции случайных величин (общий случай).
22. Сформулируйте и решите задачу о нахождении закона распределения функции $\varphi: G \rightarrow Q$ случайных величин, где $G \subset R^n$, $Q \subset R^n$ и уравнение $Y = \varphi(X)$ имеет единственное решение в G для каждого $Y \in Q$.
23. Дайте определение независимых случайных величин. Каким основным свойством обладает совместный закон распределения независимых случайных величин?
24. Что называют математическим ожиданием скалярной функции случайных величин? Сформулируйте и докажите основные свойства математического ожидания.
25. Что называют дисперсией скалярной случайной величины? Сформулируйте и докажите основные свойства дисперсии.

26. Дайте определение ковариации двух скалярных случайных величин. Сформулируйте и докажите основные свойства ковариации.

27. Что понимают под коэффициентом корреляции двух скалярных случайных величин? Сформулируйте и докажите основные свойства коэффициента корреляции.

28. Дайте определение ковариационной матрицы случайного вектора. Сформулируйте и докажите основные свойства ковариационной матрицы.

29. Что понимают под законом больших чисел и что является его основным содержанием? Докажите неравенства Чебышева.

30. Сформулируйте и докажите: (а) теорему Чебышева; (б) теорему Бернулли.

31. Сформулируйте центральную предельную теорему. Сформулируйте и докажите теорему Муавра-Лапласа.

32. Пусть $k(\omega)$ – число "успехов" в серии из n испытаний по схеме Бернулли и n – велико. Докажите, что в этом случае

$$P\left(\left|\frac{k(\omega)}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi_0\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right),$$

где p – вероятность "успеха" в каждом отдельном испытании.

33. Сформулируйте основную задачу математической статистики. Что понимают под: 1) случайной выборкой; 2) выборкой; 3) выборочным пространством; 4) статистикой?

34. В чём заключается задача построения точечной оценки? Дайте определение несмещённой оценки и докажите, что выборочная дисперсия – смещённая оценка дисперсии.

35. Что понимают под эффективностью точечных оценок? Докажите, что выборочное среднее – эффективная оценка для математического ожидания в подклассе линейных несмещённых оценок.

36. Что понимают под состоятельностью точечных оценок? Докажите, что выборочное среднее – состоятельная оценка для математического ожидания.

37. Сформулируйте и докажите теорему Рао.

38. Сформулируйте и докажите следствия из теоремы Рао.

39. В чём состоит идея метода "максимального правдоподобия" построения точечных оценок (случай дискретных случайных величин)? Случайная величина распределена по закону Пуассона с параметром μ . Определите оценку "максимального правдоподобия" $\hat{\mu}(\vec{X}_n)$. Какими свойствами обладает эта оценка?

40. В чём состоит идея метода "максимального правдоподобия" построения точечных оценок (случай непрерывных случайных величин)? $\xi(\omega) \sim N(m, \sigma^2)$. Определите оценки "максимального правдоподобия" $\hat{\mu}(\vec{X}_n)$ и $\hat{\sigma}^2(\vec{X}_n)$. Какими свойствами обладают эти оценки?

41. Чем обусловлена необходимость построения интервальных оценок и что понимают под интервальной оценкой? Как определить вероятность совершения ошибки при построении интервальной оценки и что понимают под вероятностной характеристикой точности интервальной оценки?

42. Изложите принципиальную схему построения интервальных оценок и её обоснование, введя понятие центральной статистики.

43. Пусть $\xi(\omega) \sim N(m, \sigma^2)$, где дисперсия известна. По данным случайной выборки $\vec{\xi}_n(\omega)$ постройте γ -доверительный интервал для m при заданных положительных α_1 и α_2 , где $\gamma = 1 - \alpha_1 - \alpha_2$. Проведите анализ полученного результата.

44. Что понимают под: 1) статистической гипотезой; 2) параметрической гипотезой; 3) простой и сложной параметрическими гипотезами; 4) критерием проверки статистических гипотез; 5) критическим множеством?

45. Что понимают под: 1) ошибками I-го и II-го рода при проверке статистических гипотез; 2) уровнем значимости критерия; 3) мощностью критерия?

46. Сформулируйте и решите задачу проверки простых параметрических гипотез (критерий Неймана – Пирсона).

47. $\xi(\omega) \sim N(m, \sigma^2)$, где дисперсия σ известна. По данным случайной выборки $\vec{\xi}_n(\omega)$ необходимо проверить основную гипотезу $H_0 : m = m_0$ при наличии конкурирующей гипотезы $H_1 : m = m_1 > m_0$.

48. Сформулируйте задачу проверки двух сложных параметрических гипотез и проанализируйте её специфику. Что понимают под размером критерия и функцией его мощности?

49. Дайте определение равномерно наиболее мощного критерия и докажите, что в случае своего существования при фиксированном размере он минимизирует вероятность совершения ошибки II-го рода.

1. Классическое определение вероятности. Алгебра событий. Комбинаторика. Теоремы умножения и сложения. Условная вероятность.

1. На 10 карточках написаны буквы "а", "а", "а", "м", "м", "т", "т", "е", "и", "к". После тщательного перемешивания карточки раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что на первых 8 карточках получится слово "тематика"?

2. В группе 13 студентов, среди которых 6 отличников. По списку отобраны 7 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов окажутся 4 отличника.

3. Найдите вероятность того, что дни рождения 12 случайным образом выбранных человек придутся на разные месяцы года.

4. В лотерее из 50 билетов 8 выигрышных. Какова вероятность того, что среди пяти наугад выбранных билетов два будут выигрышными?

5. Двенадцать книг на полке расставляются наугад. Определить вероятность того, что при этом четыре определённые книги окажутся поставленными рядом.

6. Из букв слова "вероятность", составленного с помощью разрезной азбуки, наугад последовательно извлекаются 4 буквы и складываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово "сорт"?

7. Вероятности попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны: $p_1 = 0,9$; $p_2 = 0,8$. Найти вероятность попадания при одном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий.

2. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

1. Известно, что 90% выпускаемых заводом изделий отвечает стандарту. Упрощенная схема контроля признаёт пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0.98 и нестандартную с вероятностью 0.05. Определите вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, отвечает стандарту.

2. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить 4 бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны 0.3; 0.4; 0.6; 0.3.

3. Из десяти сдающих экзамен студентов 7 знают все 30 билетов, 2 - по 20 билетов и 1 - 15. Знание билета гарантирует сдачу экзамена с вероятностью 0,85, а незнающий билет может сдать экзамен с вероятностью 0,1. Какова вероятность того, что первый случайно вызванный преподавателем студент сдаст экзамен?

4. В первой коробке 20 радиоламп, из них 18 - стандартных, во второй - 10 ламп, из них 9 стандартных. Из второй коробки наудачу взята лампа и переложена в первую. Найти вероятность того, что лампа, наудачу извлечённая из первой коробки, будет стандартной.

5. Двое рабочих выпускают за смену одинаковое число деталей. Вероятность брака у первого равна 0,05, у второго - 0,1. В конце смены была обнаружена бракованная деталь. Найти вероятность того, что она сделана первым рабочим.

3. Схема Бернулли.

1. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 0.2. Какова вероятность того, что сообщение из 4 знаков: а) не будет искажено; б) содержит ровно одно искажение; в) содержит не более 2 искажений.

2. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет: а) менее 2-х раз; б) не менее 2-х раз.

3. Что вероятнее: выиграть у равносильного противника (ничейный исход исключается) три партии из четырёх или пять из восьми?

4. Сколько нужно параллельно соединить элементов, вероятность безотказной работы каждого из которых за время t равна 0,9, чтобы вероятность безотказной работы всей системы за время t была не менее 0,999?

4. Одномерные и многомерные случайные величины. Функции от случайных величин. Законы распределения и числовые характеристики.

1. Случайный вектор (ξ, η) имеет плотность распределения вероятностей: $f(x, y) = \frac{a}{1 + x^2 + x^2 y^2 + y^2}$. Найти коэффициент a , плотности распределения вероятностей отдельных величин. Выяснить, зависит ли ξ и η друг от друга. Найти вероятность попадания случайной точки (ξ, η) в первую четверть системы координат.

2. Задана функция: $\varphi(x) = \begin{cases} \frac{k}{1+x^2}, & -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x \leq \sqrt{3} \\ 0, & x < -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad x > \sqrt{3} \end{cases}$. Может ли быть $\varphi(x)$ функцией распределения

или плотностью распределения некоторой случайной величины ξ и при каком значении k ? Найти вероятность $P(0 < \xi < 1)$ попадания случайной величины ξ в интервал $(0; 1)$.

3. Случайный вектор имеет распределение $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2}, & x^2 + y^2 \leq r^2; \\ 0, & x^2 + y^2 > r^2 \end{cases}$. Найти: 1) одномерные плотности распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$; 2) установить, зависимы ли X и Y .

4. Случайная величина X равномерно распределена в интервале $(-\pi/2; \pi/2)$. Найти плотность распределения $p(y)$ случайной величины $Y = \sin X$.

5. На вход измерительного прибора поступает случайный вектор $(X; Y)$ со следующими характеристиками: $MX = -10$; $MY = 10$; $\sigma_x = 2$, $\sigma_y = 3$; $\rho_{xy} = 0,7$. На выходе прибора измеряется величина $Z = 3X - Y$. Определить математическое ожидание и дисперсию величины Z .

6. Задана плотность совместного распределения системы непрерывных случайных величин (X, Y) : $p(x, y) = \begin{cases} 4xy e^{-x^2-y^2}, & x > 0, y > 0; \\ 0, & x < 0 \text{ или } y < 0 \end{cases}$. Найти: а) математические ожидания X и Y ; б) дисперсии X и Y .

7. Имеются две случайные величины X и Y , у которых коэффициент корреляции $\rho_{xy} = 0,6$. Величина X распределена по нормальному закону $p(x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-2)^2}{8}}$. Величина Y равномерно распределена в интервале $(0;4)$. Определить: а) математическое ожидание и дисперсию $X + Y$; б) математическое ожидание и дисперсию $2X - Y$.

8. Случайные величины X и Y имеют математические ожидания $M[X] = -2$; $M[Y] = 4$. Найдите математическое ожидание случайной величины $Z = 5XY - 3$, если $\text{cov}[X, Y] = 6$.

9. Имеется две независимые случайные величины X и Y . Величина X распределена по нормальному закону $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-1)^2}{8}}$. Величина Y распределена равномерно в интервале $(-2;1)$. Определить: 1) $M(X + Y)$; 2) $M(XY)$; 3) $M(X^2)$; 4) $M(X - Y^2)$; 5) $D(X + Y)$; 6) $D(X - Y)$.

5. Закон больших чисел. Неравенство Чебышева.

1. Последовательность независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ задана законом распределения

X_n	a	$-a$
p	$\frac{n}{2n+1}$	$\frac{n+1}{2n+1}$

. Применима ли к заданной последовательности теорема Чебышева?

2. Вероятность получения с конвейера изделия высшего качества равна 0.5. Оцените вероятность того, что среди 1000 изделий, полученных с конвейера, содержится от 400 до 500 изделий высшего качества. Оценку произведите, используя: а) неравенство Чебышева; б) интегральную приближенную формулу Муавра-Лапласа.

3. Найти вероятность того, что при 720 бросаниях игральной кости "шестёрка" выпадает от 100 до 130 раз.

4. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0.05. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом (математическим ожиданием) отказов за время T окажется: а) менее двух; б) не более двух.