# **Билет №1**

1. Дать определение двойнного интеграла. Сформулировать теоремы существования и привести примеры.

Пусть на плоскости ***Oxy*** задана ограниченная замкнутая область ***D*** с кусочно-гладкой границей, и пусть на области ***D*** определена функция .

Разобьём область ***D*** произвольным образом на  подобластей  (не имеющих общих внутренних точек). Символом  будем обозначать площадь области ; символом  здесь и дальше будет обозначаться наибольшее расстояние между двумя точками, принадлежащими области ***D***:

;

символом  обозначим наибольший из диаметров областей : .

В каждой из подобластей  выберем произвольную точку , вычислим в этой точке значение функции , и составим интегральную сумму .

Если существует предел последовательности интегральных сумм при , не зависящий ни от способа разбиения области ***D*** на подобласти , ни от выбора точек , то функция  называется интегрируемой по области ***D***, а значение этого предела называется двойным интегралом от функции  по области ***D*** и обозначается .

Если расписать значение  через координаты точки , и представить  как , получим другое обозначение двойного интеграла: . Итак, кратко, 

 **Теорема существования двойного интеграла.**

Если подынтегральная функция  непрерывна на области ***D***, то она интегрируема по этой области..

2. Функциональный ряд, равномерная сходимость. Док-ть признак Вейрштрасса равномерной сходимости.

Пусть дана бесконечная последовательность функций .

независимой переменной ***х***, имеющих общую область определения ***D***. Ряд называется функциональным рядом.

**Равномерная сходимость функционального ряда.** Факт сходимости ряда  к своей сумме  в точке сходимости ***х*** означает, в соответствии с определением предела, то, что для любого числа  существует такое натуральное ***N***, что при ***n***>***N*** верно . Здесь  - частичная сумма ряда в точке ***х***. Число ***N*** зависит, естественно, от , но оно зависит и от ***х***, т.е. . В некоторых точках области сходимости ряд может сходиться к своей сумме быстро, т.е. неравенство  будет выполняться при не очень больших значениях ***N***, в других точках эта сходимость может быть медленной. Если ряд сходится к своей сумме примерно с одинаковой скоростью во всех точках ***х***, то сходимость называется **равномерной**. Более точно, говорят, что **ряд  сходится равномерно на области *G*, если** для любого числа  существует такое натуральное число , одно и то же для всех точек ,что при *n*>*N* выполняется неравенство  (или, что тоже самое, , где  - остаток ряда после *n*-го члена).

**Признак Вейерштрасса равномерной сходимости ряда.**

Пусть члены функционального ряда можно мажорировать (ограничить по модулю) в области V членами сходящегося числового знакоположительного ряда, .

Тогда функциональный ряд равномерно сходится в области V.

*Доказательство.* Так как числовой ряд сходится, то для него выполнен критерий Коши  (ряд знакоположителен, ).

Тогда 

.Следовательно, выполнен критерий Коши равномерной сходимости ряда, и ряд сходится в области V равномерно.