Билет №14

несобственные интегралы 2 рода

**Особенность на левом конце промежутка интегрирования**. Пусть функция ***f***(***x***) определена на полуинтервале (***a***, ***b***], интегрируема по любому отрезку , и имеет бесконечный предел при . Несобственным интегралом от ***f***(***x***) по отрезку  называется предел . Если этот предел конечен, говорят, что интеграл сходится; если предел не существует или бесконечен, говорят, что интеграл расходится. Примеры:

1.  - интеграл расходится;

**Особенность на правом конце промежутка интегрирования**. Пусть функция ***f***(***x***) определена на полуинтервале [***a***, ***b***), интегрируема по любому отрезку , и имеет бесконечный предел при . Несобственным интегралом от ***f***(***x***) по отрезку [***a***, ***b***] называется предел . Если этот предел конечен, говорят, что интеграл сходится; если предел не существует или бесконечен, говорят, что интеграл расходится.

**Особенность во внутренней точке промежутка интегрирования**. Пусть функция ***f***(***x***) определена на отрезке [***a***, ***b***], имеет бесконечный предел при стремлении аргумента к какой-либо внутренней точке ***c*** этого отрезка: , интегрируема по любому отрезку, не содержащему точку ***c***. Несобственным интегралом от ***f***(***x***) по отрезку [***a***, ***b***] называется . Интеграл сходится, если оба эти пределы существуют и конечны, в противном случае интеграл расходится.

**Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.**

**Теорема 1.** Для того, чтобы интеграл **** не зависел от формы пути, соединяющего точки ***А*** и ***В***, необх и дост, чтобы интеграл по любому замкнутому контуру был равен нулю.

**Док-во. Необходимость.** Пусть  - произвольный замкнутый контур, лежащий в области , ***А*** и ***В*** - произвольные точки этого контура. Так как, по условию, , то  .

 ***F***

 ***B***

 ***A***

 ***х***

 ***у***

 ***C***

 ***O***

***Е***

 ***G***

**Достаточность.** Пусть для любого контура  выполняется . Пусть ,  - произвольные точки,  и  - две различных кривых, соединяющих эти точки.  - замкнутый контур, поэтому    , ч.т.д.

**Теорема 2.** Для того, чтобы интеграл **** по любому контуру ***С*** был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы функции  и их частные производные были непрерывны, и выполнялось условие .

**Доказательство. Необходимость.** От противного. Пусть для  выполняется ****, но существует точка  такая, что . Предположим для определённости, что . Так как разность  непрерывна, существует окрестность точки  такая, что . Выберем контур ***С***, целиком лежащий в этой окрестности. Если ***D*** - область ограниченная этим контуром, то, по формуле Грина, . Но, по теореме об интегрировании неравенств,  ( - площадь области ***D***), т.е. , что противоречит условиям теоремы. Следовательно, в любой точке  выполняется условие .

Таким образом, для того, чтобы криволинейный интеграл **** не зависел от формы пути, соединяющего начальную и конечную точки (или, что то же самое, интеграл по любому замкнутому контуру был равен нулю), требуется выполнение двух условий:

Контур и ограниченная им область лежат в некоторой односвязной области, в которой

 и их частные производные непрерывны , и.