**Билет21.**

**Формула Ньютона – Лейбница.**

Пусть выполнены условия теоремы о полном дифференциале и пусть выражение

 - полный дифференциал, а функция - потенциал.

Тогда справедлива **формула Ньютона – Лейбница**

**,** где  - потенциал.

*Доказательство.*

Докажем, что ** - потенциал, то есть, что**

. Докажем первое соотношение, второе доказывается аналогично.

=

= =

= . Первое соотношение доказано.

Для доказательства второго соотношения варьируется переменная y, дуга, соединяющая точки (x0, y0), и (x, y+Δy) проводится через точку (x, y) и далее по отрезку, параллельному оси OY, соединяющему точки (x, y) и (x, y+Δy).

Так как интеграл не зависит от пути интегрирования, то дугу, соединяющую точки (x1, y1), (x2, y2) можно провести через точку (x0, y0). Поэтому **= +  = **- **** **= .**

**Теорема. Степенной ряд равномерно сходится внутри интервала сходимости.**

*Доказательство.* Пусть . Выберем , например . На интервале  и в точке x1 степенной ряд сходится абсолютно, так как этот интервал лежит внутри интервала сходимости. Тогда (точно так же, как в доказательстве теоремы Абеля оценим

, где ( не зависит от ).

Тогда в области  степенной ряд будет сходиться равномерно по признаку Вейерштрасса (члены ряда мажорируются членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии).

**Следствие.** Внутри интервала сходимости справедливы теоремы о непрерывности суммы ряда, о почленном интегрировании и дифференцировании ряда.

**Теорема.** При почленном дифференцировании и интегрировании степенного ряда его радиус сходимости не меняется.

*Доказательство.* Рассмотрим ряд из модулей членов степенного ряда (это – знакоположительный числовой ряд в конкретной точке) и определим радиус сходимости по признаку Даламбера.

.

Продифференцируем почленно степенной ряд , перейдем к ряду из модулей и найдем радиус сходимости по признаку Даламбера.

.

Таким образом, при почленном дифференцировании радиус сходимости степенного ряда не меняется. Он не меняется и при почленном интегрировании, иначе он изменился бы при почленном дифференцировании.

**4. (Бесконечная дифференцируемость суммы степенного ряда).** Сумма  степенного ряда в любой точке интервала сходимости имеет производные любого порядка; эти производные могут быть получены последовательным почленным диффер-нием исходного ряда. **Доказательство.** Справедливость этого утверждения следует из доказанной теоремы о почленном дифференцировании степенного ряда; последовательное применение этой теоремы даёт 