**Билет №29**

1. **Потенциальное поле и его свойства. Вычисление линейного интеграла в потенциальном поле**

**Определение потенциального поля.** Векторное поле ******(***M***) называется потенциальным в области ***V***, если существует такое скалярное поле , что ******(***M***) для . Поле  называется потенциалом поля ******(***M***).

**Свойства потенциального поля.** 1. Потенциал определён с точностью до произвольной постоянной ().

2. Разность потенциалов в двух точках  опр-лена однозначно.

3. Если поле ******(***M***) потенциально, то линейный интеграл этого поля по любой кривой , целиком лежащей в ***V***, определяется только начальной и конечной точками этой кривой, и не зависит от формы кривой.  Эта формула является обобщением формулы Ньютона-Лейбница для потенциального поля.

4. Циркуляция потенциального в области ***V*** поля по любому контуру, лежащему в ***V***, равна нулю.

5. Векторная линия потенциального поля в каждой точке ***М*** ортогональна эквипотенциальной поверхности ( т.е. поверхности уровня потенциала), проходящей через точку ***М***.

6. Ротор потенциального векторного поля равен нулю: Введём **опр-ие безвихревого поля**: поле ******(***M***), ротор кот в каждой точке = нулю, называется безвихревым.

Мы доказали, что потенциальное поле необходимо безвихрево.

2. **Разложение функции в степенной ряд. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля для тригонометрической системы на отрезке [-1;1]. Полнота тригонометрической системы**.

**Теорема** (неравенство Бесселя) . *Если квадрат функции f интегрируем по промежутку $[-\pi, \pi]$,то числовой ряд \begin{displaymath}
\frac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty }
(a_n^2+b_n^2)\end{displaymath}*

*сходится и имеет место неравенство*

*\begin{displaymath}
\frac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty }
(a_n^2+b_n^2)\leq \frac1\pi \int\limits_{-\pi }^{\pi}
f^2(x)\,dx.\end{displaymath}*

**Доказательство.** Заменяя в равенстве (14) произволный многочлен *Tn* частичной суммой

\begin{displaymath}
S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{m=1}^{n}
(a_m\cos mx+b_m\sin mx)\end{displaymath}

ряда Фурье функции *f*, получим равенство

\begin{displaymath}
\int\limits_{-\pi }^{\pi }\vert S_n(x)-f(x)\vert^2\,dx=
\int...
 ... \frac{\pi }{2}a_0^2
-\pi \sum\limits_{m=1}^{n}
(a_m^2+b_m^2) .\end{displaymath}

Левая его часть неотрицательная, поскольку мы интегрируем неотрицательную функцию. Значит,

\begin{displaymath}
\frac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{m=1}^{n} (a_m^2+b_m^2)\leq
\frac1\pi \int\limits_{-\pi }^{\pi} f^2(x)\,dx. \eqno(15)\end{displaymath}

Все члены числового ряда

\begin{displaymath}
\frac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty }
(a_n^2+b_n^2)\eqno(16)\end{displaymath}

# неотрицательны, а значит, его частичные суммы монотонно возрастают. Но, согласно (15), все они ограничены одним и тем же конечным числом и поэтому имеют конечный предел. Другими словами это означает, что ряд (16) сходится. Переходя к пределу при $n\to \infty$в неравенстве (15), завершим доказательство теоремы. Полнота ортонормированной системы. Равенство Парсеваля. Замкнутые системы

Говорят, что ортонормированная система векторов *x*, *x1*, …,*xn*, …является *пополнением* последовательности *x1*, …,*xn*, ….В свою очередь ортонормированная последовательность *x1*, …,*xn*, …векторов гильбертова пространства *H* называется *полной*, если ее уже нельзя пополнить, т.е. если ее ортогональное дополнение состоит из нуля.

**Теорема** (равенство Парсеваля). *Пусть $x_1, \dots ,x_n, \dots $-- полная ортонормированная система векторов в гильбертовом пространстве H. Тогда для любых векторов x и y из H справедливо равенство \begin{displaymath}
(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty }\lambda _k\overline{\mu _k},\end{displaymath}*

где $\lambda _k=(x,x_k)$и $\mu _k=(y,x_k)$являются коэффициентами Фурье векторов x и y соответственно. В частности \begin{displaymath}
\vert\vert x\vert\vert ^2=\sum_{k=1}^{\infty } \vert\lambda _k\vert^2.\end{displaymath}