**Билет 30.**

**1. Оператор Гамильтона. Запись дифференциальных операций векторного анализа с помощью оператора Гамильтона.**

Оператор Гамильтона .Применим оператор Гамильтона к скалярному полю .

Оператор Гамильтона представляет собой вектор-оператор. Его можно скалярно или векторно умножить на векторное поле .

Это дифференциальные операции первого порядка над скалярным и векторным полями. От скалярного поля можно взять градиент, от векторного поля можно взять дивергенцию и ротор.

**Дифференциальные операции второго порядка.**

В резуьтате дифференциальных операций первого порядка мы получаем скалярные и векторные поля .

К ним вновь можно применить дифференциальные операции первого порядка. От скалярного поля можно взять градиент, получив векторное поле . От векторных полей можно взять ротор и дивергенцию, получив скалярные поля , и векторные поля , . Итак, дифференциальные операции второго порядка позволяют получить скалярные поля ,  и векторные поля , , .

**2. Ряды Фурье. Дост усл равн сходимости ряда Ф.**

Равномерная сходимость рядов Фурье

Напомним, что последовательность функций *fn* сходится к функции *f* равномерно на промежутке [*a*,*b*], если величина \begin{displaymath}
\sup\limits_{x\in[a,b]}\vert f(x)-f_n(x)\vert,\end{displaymath}называемая супремум нормой  функции *f*-*fn*, стремится к нулю при $n\to \infty$.Ряд Фурье называется равномерно сходящимся , если последовательность его частичных сумм равномерно сходится к сумме ряда. Из общей теории функциональных рядов ясно, почему важно понятие равномерной сходимости: оно фигурирует в теоремах о непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости функционального ряда. Однако эти вопросы для тригонометрических рядов мы уже рассмотрели выше с помощью специфических премов, не использующих общей теории функциональных рядов. Поэтому сейчас для нас вопрос о равномерной сходимости ряда Фурье имеет характер чистого любопытства: верно ли, что для достаточно больших *n* график частичной суммы ряда Фурье *Sn* целиком попадает в полоску между графиками ф-ций $f+\varepsilon$и $f-\varepsilon$?

**Теорема.**  *Если $2\pi$-периодическая функция $f:R\!\!\!\!\!\! I\ \to R\!\!\!\!\!\! I\ $непрер диффер-ма, то ее ряд Фурье сходится к ней равномерно на всей числовой прямой.*

**Доказательство.** Мы уже знаем, что для каждого $x\in R\!\!\!\!\!\! I\ $ряд Фурье функции *f* сходится поточечно, поскольку $S_n(x)\to f(x)$при $n\to \infty$.Равномерную сходимость установим с помощью признака Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда, который утверждает, что если для каждого номера *n* найдутся числа *cn* такие, что для всех $x\in [a,b]$выполняются неравенства $\vert f(x)\vert\leq c_n$и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$сходится, то функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$сходится равномерно на промежутке [*a*,*b*].

Пусть, как обычно, *an*, *bn* обозначают коэффициенты Фурье функции *f*, а *a*'*n*, *b*'*n* -- коэффициенты Фурье функции *f*'. Из теоремы о дифференцировании ряда Фурье вытекает, что |*an*|=|*b*'*n*|/*n* и |*bn*|=|*a*'*n*|/*n*, а значит

\begin{displaymath}
\vert a_n\cos nx +b_n\sin nx\vert\leq
\vert a_n\vert+\vert b_n\vert=
\frac{\vert a'_n\vert}{n}+
\frac{\vert b'_n\vert}{n}\leq\end{displaymath}

\begin{displaymath}
\leq \frac12
\left(\frac{1}{n^2}+\vert a'_n\vert^2\right) +
...
 ...) =
\frac{1}{n^2}+\frac12 (\vert a'_n\vert^2+\vert b'_n\vert^2)\end{displaymath}

для всех $x\in R\!\!\!\!\!\! I\ $[среднее неравенство написано на основании очевидной формулы $yz\leq (y^2+z^2)/2$]. Сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-2}$вам известна из курса математического анализа, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\vert a'_n\vert^2+\vert b'_n\vert^2) $сходится на основании неравенства Бесселя

\begin{displaymath}
\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\vert a'_n\vert^2+\vert b'_n\vert^2) \leq
\frac1\pi\int\limits_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,dx<\infty\end{displaymath}

[ведь промежуток $[-\pi, \pi]$имеет конечную длину, а функция *f* непрерывна, а значит, и ограничена на нем]. Таким образом, заключение теоремы вытекает из признака Вейерштрасса.