

ТВиМС, 4-й семестр, ИУ1-4, модуль 1 (операционное исчисление)
Домашнее задание

Задача 1

Пользуясь теоремами интегрирования изображения и интегрирования оригинала, найти изображения заданных функций. Найденный результат проверить для первой из заданных функций по 1-й теореме разложения (2 балла).

- | | |
|---|---|
| 1. $\frac{1 - e^{-t}}{t}; \int_0^t \frac{1 - e^{-\tau}}{\tau} d\tau.$ | 2. $\frac{e^t - 1}{t}; \int_0^t \frac{e^{\tau} - 1}{\tau} d\tau.$ |
| 3. $\frac{\sin t}{t}; \int_0^t \frac{\sin \tau}{\tau} d\tau.$ | 4. $\frac{1 - \cos t}{t}; \int_0^t \frac{1 - \cos \tau}{\tau} d\tau.$ |
| 5. $\frac{\operatorname{ch} t - 1}{t}; \int_0^t \frac{\operatorname{ch} \tau - 1}{\tau} d\tau.$ | 6. $\frac{\operatorname{sh} t}{t}; \int_0^t \frac{\operatorname{sh} \tau}{\tau} d\tau.$ |
| 7. $\frac{\cos \alpha t - \cos \beta t}{t}; \int_0^t \frac{\cos \alpha \tau - \cos \beta \tau}{\tau} d\tau.$ | 8. $\frac{\operatorname{ch} t - \cos t}{t}; \int_0^t \frac{\operatorname{ch} \tau - \cos \tau}{\tau} d\tau.$ |
| 9. $\frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{t}; \int_0^t \frac{e^{\alpha \tau} - e^{\beta \tau}}{\tau} d\tau.$ | 10. $\frac{e^t - \cos t}{t}; \int_0^t \frac{e^{\tau} - \cos \tau}{\tau} d\tau.$ |
| 11. $\frac{\cos t - e^{-t}}{t}; \int_0^t \frac{\cos \tau - e^{-\tau}}{\tau} d\tau.$ | 12. $\frac{\operatorname{ch} \alpha t - \operatorname{ch} \beta t}{t}; \int_0^t \frac{\operatorname{ch} \alpha \tau - \operatorname{ch} \beta \tau}{\tau} d\tau.$ |
| 13. $\frac{1 - \cos t}{t^2}; \int_0^t \frac{1 - \cos \tau}{\tau^2} d\tau.$ | 14. $\frac{\operatorname{ch} t - 1}{t^2}; \int_0^t \frac{\operatorname{ch} \tau - 1}{\tau^2} d\tau.$ |
| 15. $\frac{t - \sin t}{t^2}; \int_0^t \frac{\tau - \sin \tau}{\tau^2} d\tau.$ | 16. $\frac{e^t - t - 1}{t^2}; \int_0^t \frac{e^{\tau} - \tau - 1}{\tau^2} d\tau.$ |
| 17. $\frac{e^{-t} + t - 1}{t^2}; \int_0^t \frac{e^{-\tau} + \tau - 1}{\tau^2} d\tau.$ | 18. $\frac{\operatorname{ch} t - \cos t}{t^2}; \int_0^t \frac{\operatorname{ch} \tau - \cos \tau}{\tau^2} d\tau.$ |
| 19. $\frac{e^{\alpha t} - 1}{t}; \int_0^t \frac{e^{\alpha \tau} - 1}{\tau} d\tau.$ | 20. $\frac{1 - e^{-\beta t}}{t}; \int_0^t \frac{1 - e^{-\beta \tau}}{\tau} d\tau.$ |
| 21. $\frac{\sin \alpha t}{t}; \int_0^t \frac{\sin \alpha \tau}{\tau} d\tau.$ | 22. $\frac{1 - \cos \alpha t}{t}; \int_0^t \frac{1 - \cos \alpha \tau}{\tau} d\tau.$ |
| 23. $\frac{\operatorname{ch} \alpha t - 1}{t}; \int_0^t \frac{\operatorname{ch} \alpha \tau - 1}{\tau} d\tau.$ | 24. $\frac{\operatorname{sh} \alpha t}{t}; \int_0^t \frac{\operatorname{sh} \alpha \tau}{\tau} d\tau.$ |
| 25. $\frac{\operatorname{ch} \alpha t - \cos \beta t}{t}; \int_0^t \frac{\operatorname{ch} \alpha \tau - \cos \beta \tau}{\tau} d\tau.$ | 26. $\frac{e^{\alpha t} - \cos \beta t}{t}; \int_0^t \frac{e^{\alpha \tau} - \cos \beta \tau}{\tau} d\tau.$ |
| 27. $\frac{\cos \alpha t - e^{-\beta t}}{t}; \int_0^t \frac{\cos \alpha \tau - e^{-\beta \tau}}{\tau} d\tau.$ | 28. $\frac{e^{\alpha t} - 1 - \alpha t}{t^2}; \int_0^t \frac{e^{\alpha \tau} - 1 - \alpha \tau}{\tau^2} d\tau.$ |
| 29. $\frac{1 - \beta t - e^{-\beta t}}{t^2}; \int_0^t \frac{1 - \beta \tau - e^{-\beta \tau}}{\tau^2} d\tau.$ | 30. $\frac{1 - \cos \alpha t}{t^2}; \int_0^t \frac{1 - \cos \alpha \tau}{\tau^2} d\tau.$ |

Задача 2

Пользуясь теоремой свертывания, найти оригинал первой из заданных функций. Найти оригиналы остальных функций применяя к полученному результату либо теорему дифференцирования, либо теорему интегрирования оригинала. Для последней из заданных функций проверить ответ, либо находя по полученному оригиналу его изображение, либо находя сам оригинал иным способом (по одной из теорем разложения) (2 балла).

1. $\frac{1}{p(p^2 + 1)}$; $\frac{1}{p^2(p^2 + 1)}$; $\frac{1}{p^3(p^2 + 1)}$.
2. $\frac{1}{p(p^2 - 1)}$; $\frac{1}{p^2(p^2 - 1)}$; $\frac{1}{p^3(p^2 - 1)}$.
3. $\frac{1}{p^4 - 1}$; $\frac{p}{p^4 - 1}$; $\frac{p^2}{p^4 - 1}$; $\frac{p^3}{p^4 - 1}$.
4. $\frac{p}{p^4 - 1}$; $\frac{1}{p^4 - 1}$; $\frac{1}{p(p^4 - 1)}$; $\frac{1}{p^2(p^4 - 1)}$.
5. $\frac{1}{(p^2 + 1)^2}$; $\frac{p}{(p^2 + 1)^2}$; $\frac{p^2}{(p^2 + 1)^2}$; $\frac{p^3}{(p^2 + 1)^2}$.
6. $\frac{p}{(p^2 + 1)^2}$; $\frac{1}{(p^2 + 1)^2}$; $\frac{1}{p(p^2 + 1)^2}$; $\frac{1}{p^2(p^2 + 1)^2}$.
7. $\frac{1}{(p - 1)(p^2 + 1)}$; $\frac{p}{(p - 1)(p^2 + 1)}$; $\frac{p^2}{(p - 1)(p^2 + 1)}$.
8. $\frac{p}{(p - 1)(p^2 + 1)}$; $\frac{1}{(p - 1)(p^2 + 1)}$; $\frac{1}{p(p - 1)(p^2 + 1)}$.
9. $\frac{1}{(p + 1)(p^2 + 1)}$; $\frac{p}{(p + 1)(p^2 + 1)}$; $\frac{p^2}{(p + 1)(p^2 + 1)}$.
10. $\frac{p}{(p + 1)(p^2 + 1)}$; $\frac{1}{(p + 1)(p^2 + 1)}$; $\frac{1}{p(p + 1)(p^2 + 1)}$.
11. $\frac{1}{p(p - 1)}$; $\frac{1}{p^2(p - 1)}$; $\frac{1}{p^3(p - 1)}$.
12. $\frac{1}{p(p + 1)}$; $\frac{1}{p^2(p + 1)}$; $\frac{1}{p^3(p + 1)}$.
13. $\frac{1}{(p^2 - 1)^2}$; $\frac{p}{(p^2 - 1)^2}$; $\frac{p^2}{(p^2 - 1)^2}$.
14. $\frac{p}{(p^2 - 1)^2}$; $\frac{1}{(p^2 - 1)^2}$; $\frac{1}{p(p^2 - 1)^2}$; $\frac{1}{p^2(p^2 - 1)^2}$.
15. $\frac{1}{(p - 1)(p^2 - 2p + 2)}$; $\frac{p}{(p - 1)(p^2 - 2p + 2)}$; $\frac{p^2}{(p - 1)(p^2 - 2p + 2)}$.
16. $\frac{1}{(p - 1)^2(p^2 - 2p + 2)}$; $\frac{p}{(p - 1)^2(p^2 - 2p + 2)}$; $\frac{p^2}{(p - 1)^2(p^2 - 2p + 2)}$.
17. $\frac{1}{(p - 1)^3(p^2 - 2p + 2)}$; $\frac{p}{(p - 1)^3(p^2 - 2p + 2)}$; $\frac{p^2}{(p - 1)^3(p^2 - 2p + 2)}$.
18. $\frac{1}{p(p^2 - 2p + 2)}$; $\frac{1}{p^2(p^2 - 2p + 2)}$; $\frac{1}{p^3(p^2 - 2p + 2)}$.
19. $\frac{1}{(p + 1)(p^2 + 2p + 2)}$; $\frac{p}{(p + 1)(p^2 + 2p + 2)}$; $\frac{p^2}{(p + 1)(p^2 + 2p + 2)}$.
20. $\frac{1}{(p + 1)^2(p^2 + 2p + 2)}$; $\frac{p}{(p + 1)^2(p^2 + 2p + 2)}$; $\frac{p^2}{(p + 1)^2(p^2 + 2p + 2)}$.
21. $\frac{1}{(p + 1)^3(p^2 + 2p + 2)}$; $\frac{p}{(p + 1)^3(p^2 + 2p + 2)}$; $\frac{p^2}{(p + 1)^3(p^2 + 2p + 2)}$.

22. $\frac{1}{(p-1)(p-2)}$; $\frac{p}{(p-1)(p-2)}$; $\frac{1}{p(p-1)(p-2)}$; $\frac{1}{p^2(p-1)(p-2)}$.
23. $\frac{1}{(p-1)^2(p+1)}$; $\frac{p}{(p-1)^2(p+1)}$; $\frac{p^2}{(p-1)^2(p+1)}$; $\frac{1}{p(p-1)^2(p+1)}$.
24. $\frac{1}{(p+1)^2(p-1)}$; $\frac{p}{(p+1)^2(p-1)}$; $\frac{p^2}{(p+1)^2(p-1)}$; $\frac{1}{p(p+1)^2(p-1)}$.
25. $\frac{p+1}{p(p^2+2p+2)}$; $\frac{p+1}{p^2(p^2+2p+2)}$; $\frac{p+1}{p^3(p^2+2p+2)}$.
26. $\frac{1}{p(p^2+2p+2)}$; $\frac{1}{p^2(p^2+2p+2)}$; $\frac{1}{p^3(p^2+2p+2)}$.
27. $\frac{p-1}{p(p^2-2p+2)}$; $\frac{p-1}{p^2(p^2-2p+2)}$; $\frac{p-1}{p^3(p^2-2p+2)}$.
28. $\frac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)}$; $\frac{p}{(p-\alpha)(p-\beta)}$; $\frac{1}{p(p-\alpha)(p-\beta)}$.
29. $\frac{1}{(p^2+\alpha^2)(p^2+\beta^2)}$; $\frac{p}{(p^2+\alpha^2)(p^2+\beta^2)}$; $\frac{1}{p(p^2+\alpha^2)(p^2+\beta^2)}$.
30. $\frac{1}{(p^2-\alpha^2)(p^2-\beta^2)}$; $\frac{p}{(p^2-\alpha^2)(p^2-\beta^2)}$; $\frac{1}{p(p^2-\alpha^2)(p^2-\beta^2)}$.

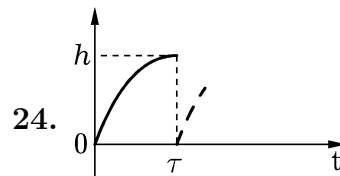
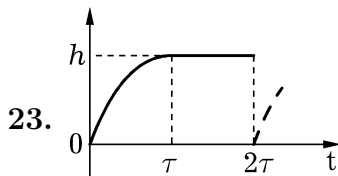
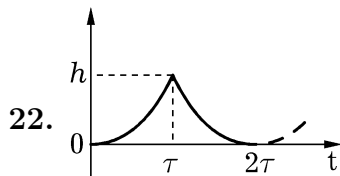
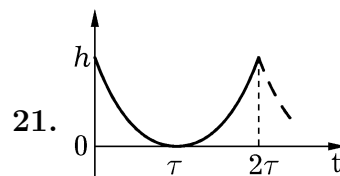
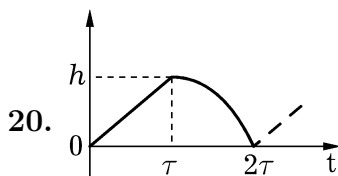
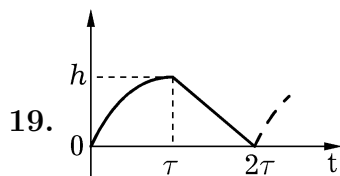
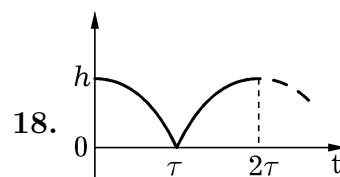
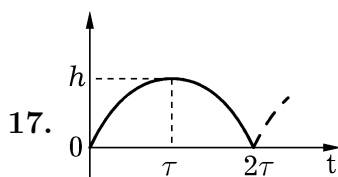
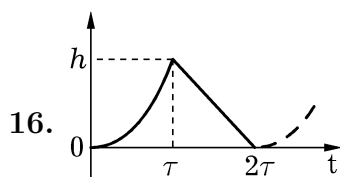
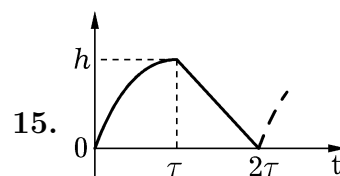
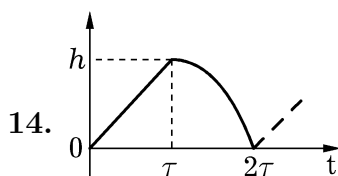
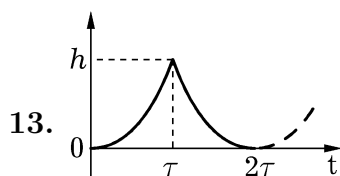
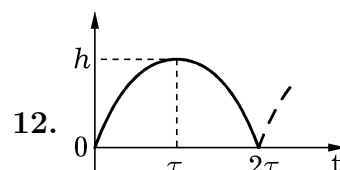
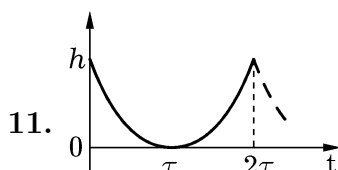
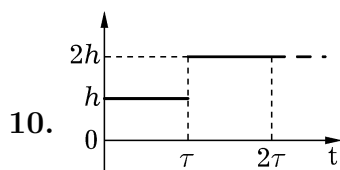
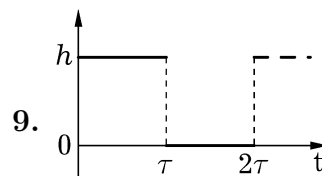
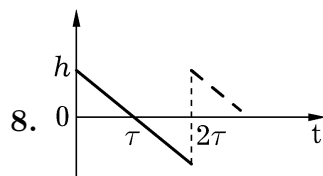
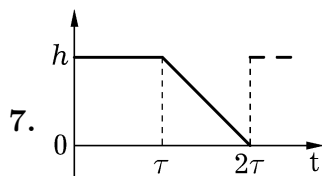
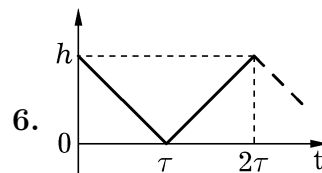
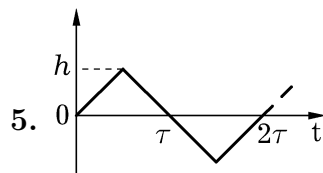
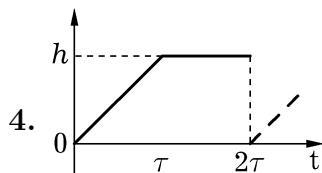
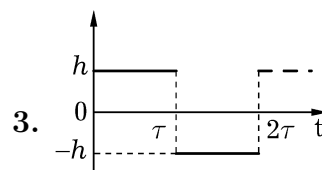
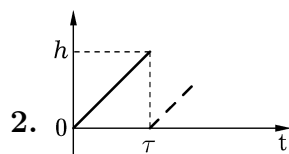
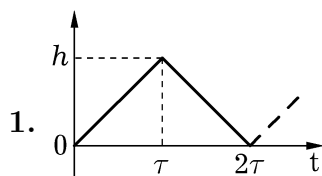
Задача 3

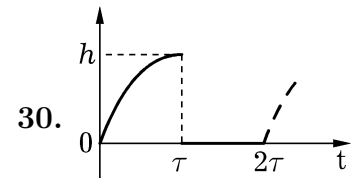
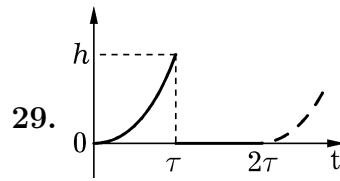
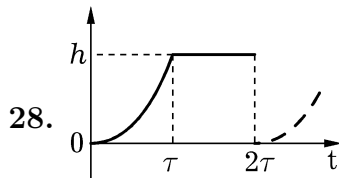
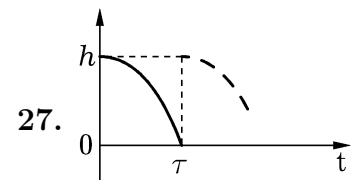
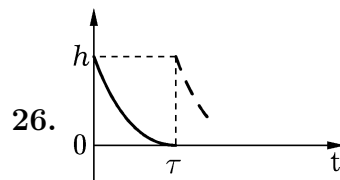
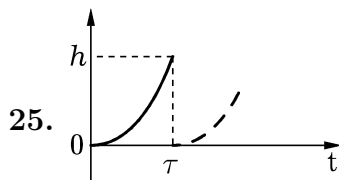
При помощи обобщенной (третьей) теоремы разложения найти оригинал заданной функции. Ответ проверить с помощью второй теоремы разложения (2 балла).

- | | | |
|------------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|
| 1. $\frac{p-c}{p(p-a)(p-b)}$ | 2. $\frac{p^2}{(p-a)(p-b)(p-c)}$ | 3. $\frac{p}{(p-a)^2(p-b)}$ |
| 4. $\frac{1}{(p-a)^3(p-b)}$ | 5. $\frac{p^2-1}{p^3+5p^2+6p}$ | 6. $\frac{p^2+1}{p^3-3p^2+2p}$ |
| 7. $\frac{p-1}{p(p^2+1)}$ | 8. $\frac{p+1}{p(p^2+1)}$ | 9. $\frac{p^2+p}{(p-1)(p^2+1)}$ |
| 10. $\frac{p+1}{(p-1)(p^2+1)}$ | 11. $\frac{1-p}{(p+1)(p^2+1)}$ | 12. $\frac{p^3+p^2+p-1}{p^4-1}$ |
| 13. $\frac{p^3+3p}{p^4-1}$ | 14. $\frac{p^2+2}{p^2(p^2+1)}$ | 15. $\frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$ |
| 16. $\frac{2p-1}{p^2(p-1)^2}$ | 17. $\frac{2p+1}{p^2(p+1)^2}$ | 18. $\frac{p^2+1}{(p^2-1)^2}$ |
| 19. $\frac{p^2+p+1}{(p^2-1)^2}$ | 20. $\frac{p^2+2p-1}{(p^2+1)^2}$ | 21. $\frac{3p^2-3p+1}{p^3(p-1)^3}$ |
| 22. $\frac{3p^2+3p+1}{p^3(p+1)^3}$ | 23. $\frac{1}{(p^2-1)(p^2-4)}$ | 24. $\frac{1}{(p^2+1)(p^2+4)}$ |
| 25. $\frac{p}{(p^2-1)(p^2-4)}$ | 26. $\frac{p}{(p^2+1)(p^2+4)}$ | 27. $\frac{p^2}{(p^2+1)(p^2+4)}$ |
| 28. $\frac{p^2}{(p^2-1)(p^2-4)}$ | 29. $\frac{p^3}{(p^2+1)(p^2+4)}$ | 30. $\frac{p^3}{(p^2-1)(p^2-4)}$ |

Задача 4

Найти изображения периодической функции, заданной графически (на графике изображен первый период функции и пунктиром показано начало второго; кривые в вариантах 11–16 — параболы с вертикальной осью, в вариантах 17–22 — синусоиды, в вариантах 23–30 — параболы с вертикальной осью) (2 балла).





Задача 5

Проинтегрировать линейное дифференциальное уравнение при заданных начальных условиях (2 балла).

1. $x'' + 4x = e^t$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$.
2. $x'' + 9x = \cos 3t$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$.
3. $x'' - 4x = t$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$.
4. $x'' - 9x = \operatorname{sh} 3t$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$.
5. $x'' - 3x' = t$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$.
6. $x'' - 4x' + 4x = e^{2t}$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$.
7. $x'' - 4x' + 5x = e^t$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$.
8. $x'' + 2x' + 2x = t^2$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$.
9. $x'' + 2x' + x = e^{-t}$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$.
10. $x'' + 4x' + 4x = e^{-2t}$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$.
11. $x'' + x' = e^{-t}$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$.
12. $x'' + 3x' + 2x = e^t$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$.
13. $x'' + x' - 2x = e^t$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$.
14. $x'' - x' - 2x = t$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$.
15. $x'' - 2x' = e^{2t}$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$.
16. $x'' + 2x = t$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$.
17. $x'' + 2x' + x = e^{-t}$, $x_0 = 1$, $x'_0 = 0$.
18. $x'' - 3x' = e^{3t}$, $x_0 = 0$, $x'_0 = -1$.
19. $x'' - 2x' + 2x = \sin t$, $x_0 = 0$, $x'_0 = 1$.
20. $x'' + 4x = \sin 2t$, $x_0 = 1$, $x'_0 = -2$.
21. $x'' - 9x = \operatorname{sh} t$, $x_0 = -1$, $x'_0 = 3$.
22. $x'' + x' = t^2$, $x_0 = 1$, $x'_0 = 0$.
23. $x'' + x' - 2x = e^{-t}$, $x_0 = 1$, $x'_0 = -2$.
24. $x'' - x' - 6x = e^{-t}$, $x_0 = 0$, $x'_0 = -1$.
25. $x''' - x' = t$, $x_0 = 0$, $x'_0 = 1$, $x''_0 = 0$.
26. $x''' - x' = e^t$, $x_0 = 1$, $x'_0 = 0$, $x''_0 = 0$.
27. $x^{IV} - x = 1$, $x_0 = 1$, $x'_0 = x''_0 = x'''_0 = 0$.
28. $x^{IV} - x'' = \operatorname{sh} t$, $x_0 = x'_0 = x''_0 = 0$, $x'''_0 = 1$.
29. $x^{IV} - x''' = e^t$, $x_0 = x'_0 = x''_0 = 0$, $x'''_0 = 1$.
30. $x''' - 2x'' + x' = 1$, $x_0 = x'_0 = x''_0 = 0$.