## § 10. УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ ЗАКРЕПЛЕННОЙ ТОЧКОЙ ВОКРУГ ГЛАВНЫХ ОСЕЙ ИНЕРЦИИ

Представление об устойчивости вращения тела вокруг главных осей инерции можно составить на примере движения твердого тела, закрепленного в центре масс и находящегося под действием только силы тяжести и реакции закрепленной точки. Главный момент внешних сил относительно закрепленной точки в этом случае равен нулю.

Пусть оси координат $Ox$, $Oy$, $Oz$, скрепленные с движущимся телом, являются главными осями инерции для его неподвижной точки $O$. Динамические уравнения Эйлера для такого тела имеют вид



$$\left.\begin{aligned} J_x\dot{\omega}_x+(J_z-J_y)\omega_z\omega_y=0;\\ J_y\dot{\omega}_y+(J_x-J_z)\omega_x\omega_z=0;\\ J_z\dot{\omega}_z+(J_y-J_x)\omega_y\omega_x=0. \end{aligned}\right\} \tag{66}$$

Величины $\omega_x=\omega_y=0$, $\omega_z=\text{const}=\omega_0$ удовлетворяют уравнениям (66), т. е. эти значения $\omega_x$, $\omega_y$, $\omega_z$ являются решениями этих уравнений.

Пусть теперь телу сообщены малые возмущения в виде малых начальных угловых скоростей $\omega_{0x}$ и $\omega_{0y}$ вокруг осей $Ox$ и $Oy$. Если величины $\omega_x$ и $\omega_y$ остаются малыми с изменением времени, то вращение вокруг главной оси инерции — оси вращения $Oz$ — считают устойчивым. Если эти величины неограниченно возрастают, то вращение вокруг главной оси инерции неустойчиво. Предположив, что вращение вокруг оси $Oz$ устойчиво, установим условия, которые определяют эту устойчивость. Если вращение вокруг оси $Oz$ устойчиво, т. е. $\omega_x$ и $\omega_y$ малы, то в уравнениях (66) можно пренебречь слагаемыми с $\omega_x\omega_y$. Положив $\omega_z\approx\omega_0$, из (66) после отбрасывания малых второго порядка получаем

$$\dot{\omega}_x+\frac{J_z-J_y}{J_x}\omega_0\omega_y=0;\quad \dot{\omega}_y+\frac{J_x-J_z}{J_y}\omega_0\omega_x=0. \tag{67}$$

Дифференциальные уравнения (67) путем дифференцирования и небольших преобразований приводим к виду

$$\ddot{\omega}_x+\alpha\omega_x=0;\quad \ddot{\omega}_y+\alpha\omega_y=0, \tag{68}$$

где

$$\alpha=\frac{(J_x-J_y)(J_z-J_x)}{J_xJ_y}\omega_0^2. \tag{69}$$

При $\alpha<0$ решения уравнений (68) имеют вид

$$\omega_x=C_1e^{\sqrt{|\alpha|}\cdot t}+C_2e^{-\sqrt{|\alpha|}\cdot t};\quad \omega_y=C_3e^{\sqrt{|\alpha|}\cdot t}+C_4e^{-\sqrt{|\alpha|}\cdot t}.$$

При $\alpha>0$ они выразятся в форме

$$\omega_x=C_1'\cos\sqrt{\alpha}\cdot t+C_2'\sin\sqrt{\alpha}\cdot t;\quad \omega_y=C_3'\cos\sqrt{\alpha}\cdot t+C_4'\sin\sqrt{\alpha}\cdot t,$$

где $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$, $C_1'$, $C_2'$, $C_3'$, $C_4'$ — произвольные постоянные интегрирования. Следовательно, при $\alpha>0$ имеем устойчивость вращения вокруг главной оси инерции $Oz$. Условие $\alpha>0$ может выполняться в двух следующих случаях:

$$J_z>J_y;\quad J_z>J_x \text{ и } J_z<J_y;\quad J_z<J_x.$$

Из этих условий следует, что вращение вокруг главной оси инерции $Oz$ является устойчивым, если момент инерции относительно этой оси наибольший или наименьший. В случае $\alpha<0$ имеем неустойчивость. В этом случае $J_z$ является средним по сравнению с $J_x$ и $J_y$.



**В гироскопических устройствах обычно применяют гироскопы, у которых момент инерции вокруг собственной оси вращения является наибольшим, т. е. гироскопы берутся в виде диска, а не цилиндра. Это, во-первых, при прочих равных условиях дает больший собственный кинетический момент, а во-вторых, как показывают исследования, ось вращения с наибольшим моментом инерции оказывается более устойчивой к действию сил сопротивления, зависящих линейно от угловой скорости вращения гироскопа.**