

Задача № 2.

На какую кинетическую энергию должен быть рассчитан ускоритель заряженных частиц с массой покоя m_0 , чтобы с их помощью можно было исследовать структуры с линейными размерами l ? Решить задачу для электронов и протонов в случае $l = 10^{-15}$ м, что соответствует характерному размеру атомных ядер.

Решение:

Воспользуемся соотношением неопределённостей Гейзенберга:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar \quad (1)$$

В нашем случае $\Delta x = l$, поэтому:

$$l \cdot \Delta p \geq \hbar \quad (2)$$

Импульс частицы $p = \langle p \rangle + \Delta p$, где $\langle p \rangle$ - среднее значение, Δp - неопределённость импульса.

Значит, минимальное значение импульса равняется его неопределённости. Учитывая (2), можем записать:

$$l \cdot \Delta p = l \cdot p_{\min} = \hbar \quad (3)$$

Кинетическая энергия частицы связана с её импульсом следующим выражением (будем считать, что частица релятивистская):

$$p_{\min} = \frac{1}{c} \sqrt{K_{\min} (K_{\min} + 2m_0 c^2)} \quad (4)$$

Подставим (4) в (3) и получим уравнение:

$$\frac{l}{c} \sqrt{K_{\min} (K_{\min} + 2m_0 c^2)} = \hbar \quad (5)$$

Возведём обе части уравнения (5) в квадрат:

$$K_{\min} (K_{\min} + 2m_0 c^2) = \left(\frac{\hbar c}{l} \right)^2$$

Сделав алгебраические преобразования, приходим к квадратному уравнению относительно K_{\min} :

$$K_{\min}^2 + 2m_0 c^2 K_{\min} - \left(\frac{\hbar c}{l} \right)^2 = 0 \quad (6)$$

Решая это квадратное уравнение, получим корни:

$$K_{\min} = -m_0 c^2 \pm c \sqrt{m_0^2 c^2 + \frac{\hbar^2}{l^2}}$$

Отрицательный корень физического смысла не имеет, поэтому в качестве окончательного результата берём положительный корень:

$$K_{\min} = c \sqrt{m_0^2 c^2 + \frac{\hbar^2}{l^2}} - m_0 c^2 \quad (7)$$

Решим задачу для электронов:

Масса покоя электрона: $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ кг

Подставляя числовые значения в (7), получим:

$$K_{\min} = 3 \cdot 10^8 \sqrt{(9.1 \cdot 10^{-31})^2 \cdot 9 \cdot 10^{16} + \frac{(1.054 \cdot 10^{-34})^2}{10^{-30}}} - 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 3.15 \cdot 10^{-11} \text{ Дж} \approx 197 \text{ МэВ}$$

Решим задачу для протонов:

Масса покоя протона: $m_p = 1.672 \cdot 10^{-27}$ кг

Подставляя числовые значения в (7), получим:

$$K_{\min} = 3 \cdot 10^8 \sqrt{(1.672 \cdot 10^{-27})^2 \cdot 9 \cdot 10^{16} + \frac{(1.054 \cdot 10^{-34})^2}{10^{-30}}} - 1.672 \cdot 10^{-27} \cdot 9 \cdot 10^{16} = 3.29 \cdot 10^{-12} \text{ Дж} \approx 21 \text{ МэВ}$$

Ответ:

$$K_{\min} = c \sqrt{m_0^2 c^2 + \frac{\hbar^2}{l^2}} - m_0 c^2; \text{ для электронов: } K_{\min} = 197 \text{ МэВ}; \text{ для протонов: } K_{\min} = 21 \text{ МэВ}$$