Задача № 10.

Нерелятивистская частица массой m_1, обладающая кинетической энергией E_k, налетает на покоящуюся частицу массой m_2. Найдите дебройлевские длины волн обеих частиц в системе их центра масс.

Решение:

Для начала определим скорость центра масс:

$$v_c = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \qquad (1)$$

так как в нашем случае $v_2 = 0$. Скорость первой частицы до соударения v_1 найдём, используя выражение для её кинетической энергии:

$$E_k = \frac{m_1 v_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2E_k}{m_1}} \qquad (2)$$

Найдём скорости частиц в системе их центра масс до соударения:

$$v_{1c} = v_1 - v_c = v_1 - \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} = v_1\left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)$$
$$v_{2c} = v_2 - v_c = -\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2} \qquad (3)$$

Пусть скорости частиц в системе их центра масс после соударения равны v_{1c}' и v_{2c}'. Тогда для системы центра масс запишем закон сохранения полной механической энергии и закон сохранения импульса (в системе центра масс сумма импульсов всех частиц, как известно, равна нулю):

$$\frac{m_1 v_{1c}^2}{2} + \frac{m_2 v_{2c}^2}{2} = \frac{m_1 (v_{1c}')^2}{2} + \frac{m_2 (v_{2c}')^2}{2} \qquad (4)$$

$$m_1 v_{1c}' + m_2 v_{2c}' = 0 \qquad (5)$$

Решая систему уравнений (4) и (5), получим:

$$v_{1c}' = -\frac{m_2}{m_1(m_2^2 + m_1 m_2)} \cdot \sqrt{m_1 m_2 (m_1 + m_2)(m_1 v_{1c}^2 + m_2 v_{2c}^2)} \qquad (6)$$

$$v_{2c}' = \frac{1}{(m_2^2 + m_1 m_2)} \cdot \sqrt{m_1 m_2 (m_1 + m_2)(m_1 v_{1c}^2 + m_2 v_{2c}^2)} \qquad (7)$$

С учётом выражений (3), получим:

$$v_{1c}' = -\frac{m_2}{m_1(m_2^2 + m_1 m_2)} \cdot \sqrt{m_1 m_2 (m_1 + m_2)\left(m_1 v_1^2 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 + m_2 v_1^2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \right)} =$$

$$-\frac{m_1 m_2^2 v_1}{m_1(m_2^2 + m_1 m_2)} = -\frac{m_2^2}{(m_2^2 + m_1 m_2)} v_1 \qquad (8)$$

$$v_{2c}' = \frac{1}{(m_2^2 + m_1 m_2)} \cdot \sqrt{m_1 m_2 (m_1 + m_2)\left(m_1 v_1^2 \left(1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 + m_2 v_1^2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \right)} =$$

$$\frac{m_1 m_2}{(m_2^2 + m_1 m_2)} v_1 \qquad (9)$$

Найдём импульсы этих частиц в системе центра масс:

$$p_{1c}' = m_1 v_{1c}' = -\frac{m_1 m_2^2}{(m_2^2 + m_1 m_2)} v_1 \qquad (10)$$

$$p_{2c}' = m_2 v_{2c}' = \frac{m_1 m_2^2}{(m_2^2 + m_1 m_2)} v_1 \qquad (11)$$

Подставляя сюда выражение для v_1 из уравнения (2), получим:

$$p_{1c}' = -\frac{m_1 m_2^2}{(m_2^2 + m_1 m_2)} \sqrt{\frac{2E_k}{m_1}} = -\frac{m_2^2}{(m_2^2 + m_1 m_2)} \sqrt{2 m_1 E_k} \qquad (12)$$

$$p_{2c}' = \frac{m_1 m_2^2}{(m_2^2 + m_1 m_2)} \sqrt{\frac{2E_k}{m_1}} = \frac{m_2^2}{(m_2^2 + m_1 m_2)} \sqrt{2 m_1 E_k} \qquad (13)$$

Найдём дебройлевские длины волн частиц в системе их центра масс:

$$\lambda_{1Бc}' = \lambda_{2Бc}' = \frac{2\pi\hbar}{p_{2c}'} = \pi\hbar \frac{(m_2^2 + m_1 m_2)}{m_2^2} \sqrt{\frac{2}{m_1 E_k}} \qquad (14)$$

Ответ:

$$\lambda_{1Бc}' = \lambda_{2Бc}' = \pi\hbar \frac{(m_2^2 + m_1 m_2)}{m_2^2} \sqrt{\frac{2}{m_1 E_k}}\ .$$