Задача № 17.

Частица массой m_0 движется в потенциальном поле, в котором её потенциальная энергия равна $U = \frac{kx^2}{2}$ (гармонический осциллятор). Оцените с помощью соотношения неопределённостей минимально возможную энергию частицы в этом поле.

Решение:

Энергия частицы равняется:

$$E = \langle E \rangle + \Delta E \qquad (1)$$

где $\langle E \rangle$ - среднее значение энергии частицы, а ΔE - неопределённость энергии. Из выражения (1) видно, что минимальное значение энергии частицы, в случае $\langle E \rangle = 0$, равняется по порядку величины её неопределённости $E_{\min} \approx \Delta E$. В этом случае неопределённость импульса частицы:

$$\Delta p = \sqrt{2m_0 \Delta E} = \sqrt{2m_0 E_{\min}} \qquad (2)$$

С наибольшей степенью вероятности частица находится в области местонахождения классического осциллятора $-x_0 < x < x_0$, где x_0 - амплитуда колебаний классического осциллятора, которую определим, решая следующее уравнение:

$$U(x_0) = E_{\min} \Rightarrow \frac{m_0 \omega_0^2 x_0^2}{2} = E_{\min} \Rightarrow x_0 = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{2E_{\min}}{m_0}} \qquad (3)$$

где $m_0 \omega_0^2 = k$.

Неопределённость частицы в этом потенциальном поле $\Delta x \approx x_0 = \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{2E_{\min}}{m_0}}$.

Воспользуемся первым соотношением неопределённостей Гейзенберга:

$$\Delta x \Delta p_x \approx \hbar \qquad (4)$$

Подставляя в уравнение (4) выражения, полученные для неопределённостей импульса и координаты, получим:

$$\sqrt{2m_0 E_{\min}} \cdot \frac{1}{\omega_0}\sqrt{\frac{2E_{\min}}{m_0}} \approx \hbar \Rightarrow E_{\min} \approx \frac{\hbar \omega_0}{2} \qquad (5)$$

Это значение соответствует нулевой энергии квантового гармонического осциллятора.

Ответ:

$$E_{\min} \approx \frac{\hbar \omega_0}{2}.$$