

Задача № 19.

Пусть электрон находится в потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками. В этом случае его энергия E точно определена, а, следовательно, точно определено и значение квадрата импульса электрона $p^2 = 2m_e E$. С другой стороны, электрон находится в ограниченной области с линейными размерами a . Не противоречит ли это соотношению неопределённостей?

Решение:

Воспользуемся первым соотношением неопределённостей Гейзенберга:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar \quad (1)$$

Если электрон находится в ограниченной области пространства с линейными размерами $\Delta x = a$, то неопределённость его импульса:

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{a} \quad (2)$$

Значение импульса электрона равно:

$$p = \langle p \rangle + \Delta p \quad (3)$$

где $\langle p \rangle$ - среднее значение импульса электрона, а Δp - его неопределённость. Тогда квадрат импульса равен:

$$p^2 = (\langle p \rangle + \Delta p)^2 = \langle p \rangle^2 + 2\langle p \rangle \Delta p + \Delta p^2 \quad (4)$$

Будем считать, что движения частицы во всех направлениях равновероятно, поэтому в этом случае $\langle p \rangle = 0$, тогда $p^2 = \Delta p^2$. Минимальная энергия частицы в этом случае определяется следующим образом:

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\Delta p^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{2ma^2} \quad (5)$$

Минимальная энергия (первый энергетический уровень) электрона в потенциальной яме с абсолютно непроницаемыми стенками равняется:

$$E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad (6)$$

Следовательно, используя соотношение неопределённостей Гейзенберга, мы нашли правильное по порядку величины минимальное значение энергии электрона в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками.

