# Задача № 21.

Пользуясь решением задачи о гармоническом осцилляторе, найдите энергетический спектр частицы массой $m_0$ в потенциальной яме вида

$$U(x) = \begin{cases} \infty, x < 0 \\ \dfrac{kx^2}{2}, x > 0 \end{cases}$$

Здесь $k = m_0\omega_0^2$, а $\omega_0$ - собственная частота гармонического осциллятора.

## *Решение:*

В задаче о квантовом гармоническом осцилляторе частица находится в потенциальной яме вида:

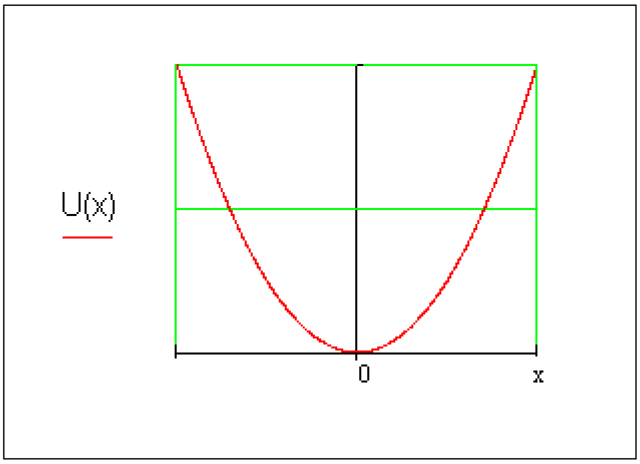



**Рисунок 1**

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} = \frac{m_0\omega_0^2 x^2}{2}$$

Составим уравнение Шредингера для частицы, находящейся в потенциальном поле вида, показанного на рисунке 1:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2}\left(E - \frac{m_0\omega_0^2 x^2}{2}\right)\psi = 0 \qquad (1)$$

Значения энергии квантового гармонического осциллятора оказываются квантованными:

$$E_v = \left(v + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0 \qquad (2)$$

где квантовое число $v$ принимает значения $v = 0,1,2,...$. Значение $E_0 = \dfrac{\hbar\omega_0}{2}$ называется нулевым энергетическим уровнем. Решения дифференциального уравнения (1) являются пси-функциями, описывающими стационарные состояния квантового гармонического осциллятора. Они имеют вид:

$$\psi_v(x) = H_v(\xi)\cdot\exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \qquad (3)$$

где $\xi = \frac{x}{x_0}$, а $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m_0 \omega_0}}$. $H_v(x)$ – специальные функции, которые называются полиномами Чебышева-Эрмита. Они вычисляются следующим образом:

$$H_v(\xi) = \frac{(-1)^v}{\sqrt{2^v v! \sqrt{\pi}}} \frac{d^v \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)}{d\xi^v} \qquad (4)$$

Первые три нормированные пси-функции, описывающие состояния квантового осциллятора, приведены ниже. Их графики на рисунке 2.

$$v = 0 \qquad \psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0 \sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) \qquad (5)$$

$$v = 1 \qquad \psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2x_0 \sqrt{\pi}}} \frac{2x}{x_0} \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) \qquad (6)$$

$$v = 2 \qquad \psi_2(x) = \frac{1}{\sqrt{8x_0 \sqrt{\pi}}} \left(\frac{4x^2}{x_0^2} - 2\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2x_0^2}\right) \qquad (7)$$

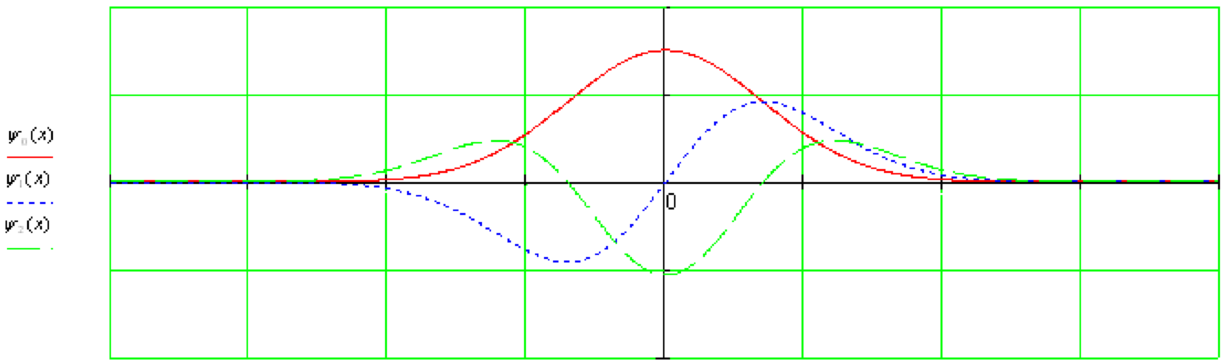
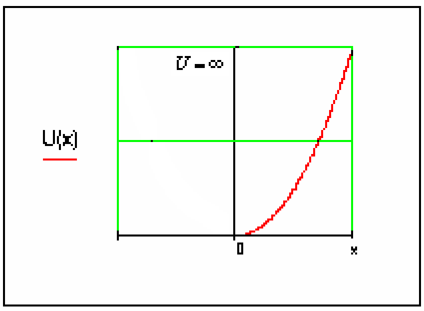



**Рисунок 2**

В нашей задаче потенциальная яма имеет вид, представленный на рисунке 3:




$$U(x) = \begin{cases} \infty, x < 0 \\ \frac{kx^2}{2}, x > 0 \end{cases}$$

**Рисунок 3**

Поэтому уравнение Шредингера для области $x > 0$ будет иметь такой же вид, как и для квантового гармонического осциллятора (уравнение (1)). В области $x < 0$ потенциальная энергия равняется бесконечности, поэтому частица в этой области находиться не может. Значит, плотность вероятности местонахождения частицы, а, следовательно, и пси-функция частицы для области $x < 0$ будут равняться нулю. Поэтому мы должны из множества собственных состояний квантового осциллятора исключить те состояния, пси-функции которых не удовлетворяют условию непрерывности пси-функций, которое в нашем случае имеет вид:

$$\psi_n(0) = 0 \qquad (8)$$

Как видно из уравнений (5), (6) и (7):

$$\psi_0(0) \neq 0$$
$$\psi_1(0) = 0$$
$$\psi_2(0) \neq 0$$

и так далее. Значит, пси-функции с чётным квантовым числом, условию непрерывности не удовлетворяют и пси-функциями стационарных состояний нашей задачи не являются. Поэтому из энергетического спектра квантового осциллятора нужно исключить значения энергий, соответствующих чётным значениям квантового числа $v$. Сделав замену $v = 2n+1, n = 0,1,2,\ldots$, получим энергетический спектр частицы для нашей задачи:

$$E_n = \left(2n + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega_0, n = 0,1,2,\ldots \qquad (9)$$

**Ответ:**

$$E_n = \left(2n + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega_0, n = 0,1,2,\ldots.$$