

Задача № 22.

Волновая функция основного состояния электрона в атоме водорода имеет вид $\psi(r) = A \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$, где r - расстояние электрона до ядра, a - первый радиус боровской орбиты. Определите наиболее вероятное расстояние $r_{\text{вер}}$ электрона от ядра.

Решение:

Как известно, квадрат модуля пси-функции определяет плотность вероятности нахождения частицы в единице объёма. Найдём вероятность нахождения электрона в шаровом слое единичной толщины.

Вероятность нахождения электрона в объёме dV равна: $dP = |\psi|^2 dV = A^2 \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) dV$. Теперь в

качестве объёма dV возьмём шаровой слой толщиной dr , его объём: $dV = 4\pi r^2 dr$. Вероятность нахождения электрона в таком шаровом слое равна:

$$dP = A^2 \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) 4\pi r^2 dr \quad (1)$$

Отсюда можно заключить, что вероятность нахождения электрона в шаровом слое единичной толщины:

$$\frac{dP}{dr} = 4\pi A^2 r^2 \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) = Cr^2 \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) \quad (2)$$

где $C = 4\pi A^2 = \text{const}$. Наиболее вероятное расстояние $r_{\text{вер}}$ электрона от ядра можно определить, если найти значение r , при котором функция (2) имеет максимум. Для этого найдём первую производную по r от функции (2):

$$\frac{d^2P}{dr^2} = 2Cr \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) - \frac{2Cr^2}{a} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right) \quad (3)$$

Приравнявая (3) к нулю, получаем:

$$2Cr_{\text{вер}} \exp\left(-\frac{2r_{\text{вер}}}{a}\right) - \frac{2Cr_{\text{вер}}^2}{a} \exp\left(-\frac{2r_{\text{вер}}}{a}\right) = 0 \Rightarrow r_{\text{вер}} = a \quad (4)$$

То есть наиболее вероятное расстояние электрона от ядра равно первому боровскому радиусу a . На рисунке 1 представлены графики пси-функции основного состояния электрона в атоме водорода, плотности вероятности нахождения электрона в единице объёма и плотности вероятности нахождения электрона в шаровом слое единичной толщины.

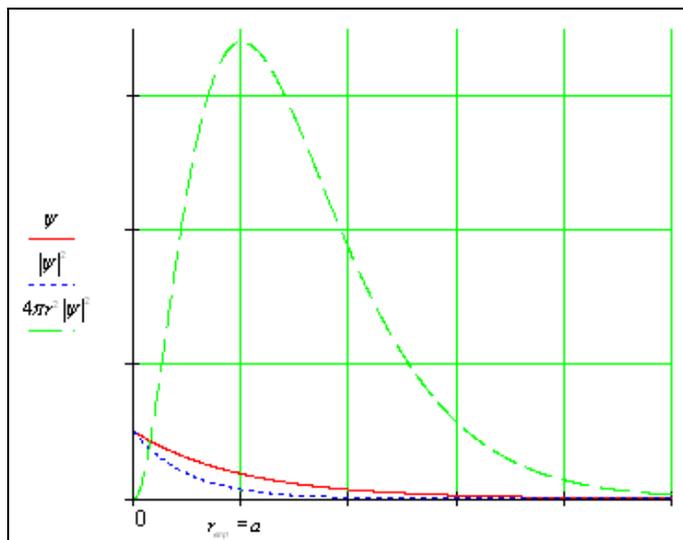


Рисунок 1

Ответ: $r_{\text{вер}} = a$

